# ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

## СРАВНЕНИЕ ДВУХ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ НАБОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

*Мясников В.В.*
*Институт систем обработки изображений РАН*

***Аннотация***

В работе производится сравнение двух подходов к построению наборов линейных локальных признаков (ЛЛП) цифровых сигналов. Первый из анализируемых подходов основан на формировании набора ЛЛП из отдельно конструируемых эффективных ЛЛП, каждый из которых имеет свой алгоритм вычисления признака. Второй подход предполагает построение эффективного набора ЛЛП, имеющего единый алгоритм совместного вычисления всех признаков. Сравнение как аналитическое, так и экспериментальное производится по нескольким показателям, отражающим вычислительные и качественные свойства конструируемых ЛЛП. Также производится экспериментальное сравнение двух сопоставляемых подходов с известными решениями.

*Ключевые слова:* цифровые сигналы, линейные локальные признаки, набор признаков, вычислительная сложность, качество обработки, эффективность.

### *Введение*

Настоящая работа продолжает цикл работ [1-5] автора и направлена на развитие аппарата локального анализа цифровых сигналов и изображений. Под *локальным признаком* цифрового сигнала обычно понимают числовую характеристику – результат преобразования отсчётов цифрового сигнала, попавших в область локального анализа. Для *линейного локального признака* (ЛЛП) такое преобразование является линейным с постоянными параметрами. Простейшим примером ЛЛП является локальное среднее цифрового сигнала, которое может быть вычислено как напрямую (с использованием алгоритма прямой свёртки), так и рекурсивно (с использованием рекурсивного алгоритма). Даже из этого простейшего примера видно, что любой ЛЛП характеризуется двумя составляющими – *конечной импульсной характеристикой признака* (*КИХ признака* – ядро линейной свёртки) и *алгоритмом вычисления/расчёта значения ЛЛП*. При этом если КИХ ЛЛП определяет его качественные характеристики, то алгоритм расчёта значения ЛЛП характеризует его вычислительную сложность. Следует также отметить, что для решения практических задач обычно используют *наборы признаков*, то есть для одной и той же области анализа цифрового сигнала вычисляется не одно, а несколько значений признаков. Существенно, что расчёт значений признаков набора может быть произведён как несколькими алгоритмами, так и одним. В последнем случае говорят о *наборе совместно вычисляемых признаков*. Качественные характеристики (как совместно, так и независимо вычисляемых наборов ЛЛП) определяются множеством соответствующих КИХ признаков. *Общая формулировка задачи построения эффективного (набора) ЛЛП* подразумевает построение ЛЛП (или набора ЛЛП) с наилучшим качеством при ограничении на сложность его/их вычисления [2-5].

Несмотря на кажущуюся простоту представленной формулировки, следует признать проблему построения признаков и наборов чрезвычайно сложной. Связано это не столько со сложностью решения такой задачи для конкретного практического применения, сколько с отсутствием собственно математически корректной формулировки этой задачи. Дополнительные сложности связаны также с многообразием постановок прикладных задач, различными типами обрабатываемых данных и т.п. Поэтому на практике вместо формализованной постановки задачи построения эффективных ЛЛП и её решения производится просто выбор признаков из конечного множества уже известных: коэффициентов дискретного преобразования Фурье, коэффициентов косинусного преобразования, моментных инвариантов, статистических моментов и др. [6-8]. Естественно, об оптимальности такого решения говорить не приходится.

В авторских работах [2, 3] был предложен математически формализованный подход к построению эффективных ЛЛП, а в работе [5] этот подход был обобщён на случай построения эффективного набора совместно вычисляемых ЛЛП. Эти подходы позволяют практически для любой прикладной задачи сконструировать *эффективный ЛЛП* (или *эффективный набор ЛЛП*). Под «эффективностью» ЛЛП понимается удовлетворение двум основным требованиям:

- алгоритм вычисления значения признака(ов) обладает заранее заданной вычислительной сложностью;
- КИХ признака (ов) наилучшим образом согласована с наперёд заданным показателем качества.

При выполнении указанных требований эффективные ЛЛП позволяют установить рациональный баланс между двумя противоположными группами признаков:

- признаками, оптимальными в смысле некоторого критерия качества, но не имеющими подходящего или быстрого алгоритма вычисления (например, признаки, полученные с использованием преобразования Карунена-Лоэва);
- признаками, полученными с использованием быстрых алгоритмов, но не имеющими отношения к

содержательной постановке задачи и соответствующим показателям качества (например, признаки, полученные с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье).

Автору настоящей работы не известны другие подходы, которые позволяют регулярным образом конструировать эффективные ЛЛП для конкретных задач.

Основной целью настоящей работы является сравнение двух авторских подходов к построению наборов ЛЛП. Первый из подходов конструирует набор ЛЛП путём построения множества эффективных ЛЛП, каждый из которых содержит свой алгоритм расчёта признака. Второй подход конструирует эффективный набор ЛЛП, в котором присутствует единый алгоритм совместного вычисления всех признаков. Цель сравнения – выявление преимуществ и недостатков каждого из подходов и определение (если возможно) лучшего. В дополнение к сравнению авторских подходов производится сравнение их с традиционно используемыми решениями.

Работа организована следующим образом. В первом разделе приводятся краткие сведения об эффективных ЛЛП, наборах совместно вычисляемых ЛЛП, а также задачах и методах их построения. Материалы этого раздела в развёрнутой форме можно найти в работах автора [2-5]. Второй раздел играет вспомогательную роль, позволяя установить соответствие ключевых параметров наборов независимо и совместно вычисляемых ЛЛП. В третьем разделе представлены результаты аналитического сравнения совпадающих по ключевым параметрам наборов ЛЛП по вычислительной сложности алгоритмов их расчёта. В четвёртом разделе аналогичное сравнение производится при совпадающем числе степеней свободы наборов ЛЛП. Пятый раздел содержит результаты аналитического сравнения вычислительной сложности решения задачи построения независимо и совместно вычисляемых ЛЛП. В последнем, шестом, разделе представлены примеры решения нескольких групп практических задач построения эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП и наборов независимо вычисляемых ЛЛП с целью сравнения результатов по показателям эффективности (вычислительной сложности и качеству конструируемых ЛЛП) между собой и с типовыми методами решения (в том числе, с использованием известного оптимального решения). В заключение работы приведены благодарности и список использованной литературы.

## *1. Наборы независимо и совместно вычисляемых линейных локальных признаков цифровых сигналов*

Пусть $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbf{K}$ – коммутативное кольцо с единицей. Пусть также $\left\{x(n)\right\}_{n=0}^{N-1}$ – *входной сигнал* длины $N$ над $\mathbf{K}$.

**Определение 1.** *Линейным локальным признаком (ЛЛП) длины $M$ над* $\mathbf{K}$ называется пара $\left(\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A\right)$, где $\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}$ – некоторая КИХ длины $M$, задаваемая в виде конечной последовательности над $\mathbf{K}$ и удовлетворяющая ограничению $h(m)\neq 0, h(M-1)\neq 0$, а $A$ – алгоритм вычисления линейной свёртки (1) произвольного входного сигнала над $\mathbf{K}$ с КИХ $\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}$:

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(n-m),\quad n=\overline{M-1,N-1}. \tag{1}$$

Под *набором из $R$ независимо вычисляемых ЛЛП длины $M$ над* $\mathbf{K}$ будем далее понимать следующее множество ЛЛП: $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$.

**Определение 2.** *Набором из $R$ совместно вычисляемых ЛЛП длины $M$ над* $\mathbf{K}$ называется пара $\left(\left\{h_r(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}}, A\right)$, где $\left\{h_r(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}}$ – набор из $R$ КИХ-ик, каждая из которых задаётся в виде конечной последовательности над $\mathbf{K}$ и удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{aligned}&h_0(0)\neq 0,\\&\forall r\in\overline{0,R-1}\quad \exists m\in\overline{0,M-1}\quad h_r(m)\neq 0,\\&\exists\, r\in\overline{0,R-1}\quad h_r(M-1)\neq 0;\end{aligned} \tag{2}$$

а $A$ – алгоритм вычисления набора линейных свёрток произвольного входного сигнала $\left\{x(n)\right\}_{n=\overline{0,N-1}}$ над $\mathbf{K}$ с набором КИХ $\left\{h_r(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}}$ $(M<N)$:

$$y_r(n)=h_r(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{M-1}h_r(m)x(n-m),\quad n=\overline{M-1,N-1},\quad r=\overline{0,R-1}. \tag{3}$$

Для отличия элементов наборов независимо вычисляемых ЛЛП от совместно вычисляемых ЛЛП последние будем обозначать $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}}, A^{set}\right)$.

В работах автора [2-5] предложен способ построения наборов независимо и совместно вычисляемых ЛЛП, основанный на конструировании (наборов) последовательностей отсчётов КИХ в виде неоднородных линейных (взаимно) рекуррентных последовательностей (ЛРП или ЛВРП). Для этих (наборов) последовательностей, получивших название НМС-(наборов) последовательностей[1], вычислительная сложность расчёта линейных свёрток (1)

[1] Аббревиатура НМС введена в работе [2] и расшифровывается как «нормализованные с минимальной сложностью».

или (2) оказывается минимальной. При фиксированных параметрах линейных (взаимно) рекуррентных соотношений (ЛРС или ЛВРС, соответственно) указанные множества НМС-последовательностей или НМС-наборов последовательностей образуют *семейства*, обозначаемые соответственно, $\wp(M,K,\bar{c})$ или $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$. Здесь $K$ – порядок ЛРС для отсчётов последовательности, $R$ – число последовательностей в наборе, $T$ – порядок взаимной рекуррентности (для наборов), $\bar{c}$ и $\bar{a}$ – коэффициенты ЛРС или ЛВРС, соответственно. Как показано в предшествующих работах, мощности указанных семейств удовлетворяют соотношениям [2-5] (величина $C_*^*$ – биномиальный коэффициент):

$$\forall M > K \ge 1,\ \bar{a}\left(a_K \ne 0\right) \quad \left|\wp\left(K,M,\bar{c}\right)\right| \le C_{M+K-2}^{K-1}, \quad (4)$$

$$\begin{gathered}\forall M > K \ge 1 \quad R \ge T \ge 1 \\ \left|\wp_{(b,c,d)}\left(R,M,T,K,\bar{a}\right)\right| \le C_{R(M+K)-1}^{RK} - C_{R(M+K-1)-1}^{RK}.\end{gathered} \quad (5)$$

Каждая последовательность семейства, наряду с его параметрами, характеризуется ещё некоторым множеством $\Theta$ дополнительных независимых параметров – *степеней свободы*. Мощности множеств $\Theta$ степеней свободы определяются выражениями [2-5]:

$$\left|\Theta_{\wp(M,K,\bar{c})}\right| = K, \quad \left|\Theta_{\wp(R,M,T,K,\bar{a})}\right| = RK. \quad (6)$$

Для всех НМС-последовательностей или НМС-наборов последовательностей из семейств $\wp(M,K,\bar{c})$ и $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ вычислительная сложность алгоритмов $A^{ind}$ и $A^{set}$ расчёта соответствующих признаков или наборов признаков определяется соотношениями [2-5]:

$$u\left(A^{ind}\right) \le 2K\frac{N}{N-M+1}, \quad (7)$$

$$u\left(A^{set}\right) \le \frac{N}{N-M+1}\left(\begin{gathered}R(K-1)-(R-1)\xi_{add} + \\ +(K+1)T\left(R-\frac{T-1}{2}\right)\end{gathered}\right). \quad (8)$$

*Частные задачи* построения *эффективного ЛЛП* или *эффективного набора ЛЛП* также определяются похожими способами [2-5]. Например, *частная задача построения эффективного набора ЛЛП* определяются как задачи поиска в заранее предопределённом семействе $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ такого набора (с соответствующим ему алгоритмом совместного вычисления ЛЛП $A^{set}$), для которого выполняется условие минимума специфичной для решаемой задачи целевой функции $\Psi:\mathbf{K}^{RM}\to\mathbf{R}$:

$$\begin{gathered}\Psi\left(h_0(0),\dots,h_0(M-1),\dots,h_{R-1}(0),\dots,h_{R-1}(M-1)\right) \\ \to \min_{\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}} \in \wp(R,M,T,K,\bar{a})}.\end{gathered} \quad (9)$$

Для *частной задачи построения эффективного ЛЛП* изменения в формулировке касаются семейства $\wp(M,K,\bar{c})$ и целевой функции $\Psi:\mathbf{K}^M\to\mathbf{R}$. Отличия решений этих задач заключаются в том, что в первом случае сразу формируется набор совместно вычисляемых ЛЛП $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,R-1}}, A^{set}\right)$, а во втором – только один ЛЛП $\left(\left\{h(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A\right)$. Заметим, что с использованием частной задачи построения эффективного ЛЛП возможно построение набора независимо вычисляемых признаков $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$, например, путём их последовательного построения с соответствующей модификацией целевых функций каждой их решаемых частных задач.

Следующий раздел устанавливает взаимосвязь между параметрами наборов совместно и независимо вычисляемых ЛЛП, точнее, между параметрами ЛВРС для семейства $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ и параметрами ЛРС каждой из последовательностей набора $\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}$ $\left(r=\overline{0,R-1}\right)$. Эта взаимосвязь позволяет ввести формализованное понятие «*сопоставимости*» семейств $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ и $\left\{\wp(M,K_r,\bar{c}_r)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$. Факт сопоставимости подразумевает, что по крайней мере для одного набора последовательностей из $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ можно указать точно такой же набор последовательностей из $\left\{\wp(M,K_r,\bar{c}_r)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$.

## *2. Решение однородного линейного взаимно рекуррентного соотношения*

Рассмотрим набор ЛВРП $\left\{h_r(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}$ $\left(r=\overline{0,R-1}\right)$ семейства $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$, удовлетворяющий ЛВРС [5, 9]:

$$h_r(m) = \begin{cases} b_{rm}, \quad r=\overline{0,T-1},\ m=\overline{0,K-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{\min(K,m)} a_{0k}^r h_r(m-k) + \\ + \sum\limits_{t=1}^{\min(r,T-1)} \sum\limits_{k=0}^{\min(K,m)} a_{tk}^r h_{r-t}(m-k) + \phi_r(m), \\ \qquad\qquad r \ge T \vee m \ge K. \end{cases} \quad (10)$$

В случае, когда $\phi_r(m)\equiv 0$, ЛВРП и ЛВРС называют *однородными* [9]. Характеристики последовательностей в таком наборе определяет следующая лемма.

**Лемма 1** (о решении однородного ЛВРС). *Пусть $T=R\ge 1$ и однородное ЛВРС*

$$h_r(m)=\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{r}h_r(m-k)+ \\ +\sum_{t=1}^{r}\sum_{k=0}^{K}a_{tk}^{r}h_{r-t}(m-k),\quad r=\overline{0,R-1} \tag{11}$$

*порядка* ($T$,$K$) *определяет отсчёты набора* $R$ *последовательностей* $\left\{h_r(m)\right\}_{r=\overline{0,R-1};\ m=0,1,\ldots}$ *на всей их области определения. Определим матрицы* $Q_r(z)$ *размера* $r\times r$, *каждый элемент* $q_{ij}^{r}(z)$ *которых задаётся* $\left(q_{ij}^{r}(z)\equiv q_{ij}^{t}(z)\quad \forall i,j<\min(r,t)\right)$ *выражением:*

$$q_{ij}^{r}(z)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{i}z^{-k}-1, & i=j,\\ 0, & i<j, \quad i,j=\overline{0,r-1}.\\ \sum_{k=0}^{K}a_{(i-j)k}^{i}z^{-k}, & i>j,\end{cases} \tag{12}$$

*Тогда каждая* $r$*-я последовательность набора на всей её области определения удовлетворяет однородному ЛРС вида:*

$$h_r(m)=\sum_{s=1}^{K(r+1)}c_s^{r+1}h_r(m-s),\quad r=\overline{0,R-1}, \tag{13}$$

*где величины* $\left\{c_s^r\right\}_{s=1}^{Kr}$ *– это коэффициенты в определителе матрицы* $Q_r(z)$:

$$\det\left(Q_r(z)\right)=\prod_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{i}z^{-k}-1\right)= \\ =1-\sum_{s=1}^{Kr}c_s^r z^{-s}. \tag{14}$$

<u>Доказательство:</u> запишем явную последовательность соотношений (11) для $r=\overline{0,R-1}$, перенеся все слагаемые в левую часть соответствующих выражений:

$$r=0:\quad \sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{0}h_0(m-k)-h_0(m)=0,$$

$$r=1:\quad \left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{1}h_1(m-k)-h_1(m)\right)+ \\ +\sum_{k=0}^{K}a_{1k}^{1}h_0(m-k)=0,$$

$$\ldots$$

$$r<R:\quad \left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{r}h_r(m-k)-h_r(m)\right)+ \\ +\sum_{t=1}^{r}\sum_{k=0}^{K}a_{tk}^{r}h_{r-t}(m-k)=0.$$

Взяв $Z$-преобразование [6] от каждого из выражений, получим:

$$r=0:\quad \left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{0}z^{-k}-1\right)H_0(z)=0,$$

$$r=1:\quad \left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{1}z^{-k}-1\right)H_1(z)+ \\ +\left(\sum_{k=0}^{K}a_{1k}^{1}z^{-k}\right)H_0(z)=0,$$

$$\ldots \tag{15}$$

$$r<R:\quad \left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{r}z^{-k}-1\right)H_r(z)+ \\ +\sum_{t=1}^{r}\left(\sum_{k=0}^{K}a_{tk}^{r}z^{-k}\right)H_{r-t}(z)=0.$$

Эту систему уравнений можно представить в матричном виде. Для этого обозначим:

$$\overline{h}_r(z)=\left(H_0(z)\quad H_1(z)\quad \ldots\quad H_{r-1}(z)\right)^T,$$

$$Q_r(z)= \\ =\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{0}z^{-k}-1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \sum_{k=0}^{K}a_{1k}^{1}z^{-k} & \sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{1}z^{-k}-1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & 0\\ \sum_{k=0}^{K}a_{(r-2)k}^{r-2}z^{-k} & \sum_{k=0}^{K}a_{(r-3)k}^{r-2}z^{-k} & & \sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{r-2}z^{-k}-1 & 0\\ \sum_{k=0}^{K}a_{(r-1)k}^{r-1}z^{-k} & \sum_{k=0}^{K}a_{(r-2)k}^{r-1}z^{-k} & \ldots & \sum_{k=0}^{K}a_{1k}^{r-1}z^{-k} & \sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{r-1}z^{-k}-1\end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы удовлетворяют соотношению (12) в формулировке леммы. Определитель матрицы $Q_r(z)$, очевидно, имеет вид, определяемый выражением (14).

Тогда система линейных алгебраических уравнений (15) примет вид:

$$Q_R(z)\overline{h}_R(z)=0.$$

Дальнейшее доказательство проведём по индукции, поскольку последовательность с номером $r$ может зависеть только от последовательностей с меньшими номерами.

Итак, пусть $r=0$. Тогда имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{0}z^{-k}-1\right)H_0(z)=0,$$

где $\sum_{k=1}^{K}a_{0k}^{0}z^{-k}-1=q_{00}^{R}=\det\left(Q_1(z)\right)$.

Пусть $r>0$, и для любого меньшего $r$ утверждение леммы выполняется. Запишем выражение для $r$-го уравнения в системе линейных алгебраических уравнений (15):

$$\forall r>0:\qquad \sum_{t=0}^{r}q_{rt}^{R}(z)H_t(z)=0.$$

Умножим это уравнение на произведение:

$$\prod_{i=0}^{r-1} q_{ii}^R = \prod_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{0k}^i z^{-k} - 1\right),$$

имеем

$$\forall r > 0:\ \sum_{t=0}^{r}\left(\prod_{i=0}^{r-1} q_{ii}^R\right) q_{rt}^R(z) H_t(z) =$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{r} q_{ii}^R\right) H_r(z) + \sum_{t=0}^{r-1}\left(H_t(z)\prod_{i=0}^{t} q_{ii}^R\right) \times$$
$$\times \left(q_{rt}^R(z)\prod_{i=t+1}^{r-1} q_{ii}^R\right) = 0.$$

Учитывая индуктивность доказательства, в соответствии с которой выполняется:

$$\forall t < r:\ H_t(z)\prod_{i=0}^{t} q_{ii}^R = 0,$$

искомое выражение перепишется в виде:

$$\forall r > 0:\ \left(\prod_{i=0}^{r} q_{ii}^R\right) H_r(z) + \sum_{t=0}^{r-1} 0 \cdot \left(q_{rt}^R(z)\prod_{i=t+1}^{r-1} q_{ii}^R\right) =$$
$$= \left(\prod_{i=0}^{r} q_{ii}^R\right) H_r(z) = 0,$$

где

$$\prod_{i=0}^{r} q_{ii}^R = \prod_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{0k}^i z^{-k} - 1\right) = \det\left(Q_{r+1}(z)\right).$$

Учитывая возможность представления определителя в виде (14), имеем:

$$\det\left(Q_{r+1}(z)\right) H_r(z) = \left(1 - \sum_{s=1}^{K(r+1)} c_s^{r+1} z^{-s}\right) H_r(z) = 0.$$

Отсюда, используя обратное $Z$-преобразование, получаем искомое выражение (13) для последовательности $h_r(m)$.

■

Из представленного доказательства леммы очевидно следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть выполняются условия леммы 1, тогда:*

$$\prod_{i=0}^{r}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{0k}^i z^{-k} - 1\right) H_r(z) = 0.$$

**Замечание.** В частных случаях для конкретных последовательностей порядок ЛРС, полученный с помощью приведённой леммы, может оказаться завышенным. Простым примером является набор последовательностей, которые не связаны друг другом. В этом случае матрица $Q_R(z)$ является диагональной, и решением для всех последовательностей является соотношение $\forall r:\ H_r(z) q_{rr}^R = 0$. Решение, которое даёт в этой ситуации лемма 1, не противоречит ему, поскольку $H_r(z) q_{rr}^R = 0 \Rightarrow H_r(z)\prod_{i=0}^{r} q_{ii}^R = 0$. Однако это решение оказывается «не минимальной формы».

Последние два утверждения и выражение (13), приведённое в формулировке леммы, делают очевидным следующее предложение.

**Предложение 1.** *Пусть выполняются условия леммы 1, тогда последовательность с номером набора удовлетворяет однородному ЛРС порядка не выше* $K(r+1)$.

Учитывая доказанную связь между наборами последовательностей, дадим следующее определение, позволяющее обозначать этот факт.

**Определение 3.** Множество семейств $\left\{\wp\left(M, K_r, \bar{c}^r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ ЛРП и семейство $\wp\left(R, M, T, K, \bar{a}\right)$ ЛВРП называются *сопоставимыми*, если выполняются соотношения:

$$K_r = K(r+1),$$
$$\prod_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=1}^{K} a_{0k}^i z^{-k} - 1\right) = 1 - \sum_{s=1}^{Kr} c_s^r z^{-s},\quad r = \overline{0, R-1}. \tag{16}$$

Как было указано выше, факт сопоставимости подразумевает, что по крайней мере для одного (однородного) набора последовательностей из $\wp\left(R, M, T, K, \bar{a}\right)$ можно указать точно такой же набор последовательностей из $\left\{\wp\left(M, K_r, \bar{c}_r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$. Заметим также, что, хотя совпадающих наборов последовательностей для сопоставимых семейств может оказаться больше одного, полного совпадения наборов последовательностей обычно не происходит.

Результаты настоящего раздела позволяют произвести аналитическое сравнение наборов сопоставимых семейств. Результаты этого анализа представлены в следующем разделе.

### *3. Аналитическое сравнение наборов ЛЛП для сопоставимых семейств*

Пусть $N, R, M, T, K \in \mathbf{N}$ и $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{\substack{r=\overline{0,R-1};\\ m=\overline{0,M-1}}}, A^{set}\right)$ – произвольный эффективный набор ЛЛП семейства $\wp\left(R, M, T, K, \bar{a}\right)$. Вычислительная сложность алгоритма расчёта ЛЛП, соответствующего любому набору последовательностей этого семейства, удовлетворяет соотношению (8). С другой стороны, из сопоставимого $\wp\left(R, M, T, K, \bar{a}\right)$ множества семейств $\left\{\wp\left(M, K_r, \bar{c}^r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ могут быть сконструированы отдельные эффективные ЛЛП

$$\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}.$$

Тогда, учитывая соотношения (7) и (16), вычислительная сложность расчёта ЛЛП набора $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ имеет вид:

$$\sum_{r=0}^{R-1} u\left(A_r^{ind}\right) \le \frac{N}{N-M+1}\sum_{r=0}^{R-1} 2K(r+1) = \\ = \frac{N}{N-M+1} KR(R+1).$$

Сравнивая правую часть этого выражения с соотношением (8), можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Предложение 2.** *Пусть* $K,R,M,T \in \mathbf{N}$, $K \ge 1$, $R \ge T \ge 2$. *Тогда*

$$\begin{pmatrix} R(K-1)-(R-1)\xi_{add} + \\ +(K+1)T\left(R-\dfrac{T-1}{2}\right)\end{pmatrix} < KR(R+1). \quad (17)$$

<u>Доказательство:</u> рассмотрим разность левой и правой частей выражения (17):

$$\Delta(R,T,K) \equiv \begin{pmatrix} R(K-1)-(R-1)\xi_{add} + \\ +(K+1)T\left(R-\dfrac{T-1}{2}\right)\end{pmatrix} - \\ -KR(R+1).$$

Эта функция может быть записана в виде полинома второй степени относительно *T*:

$$\Delta(R,T,K) = T^2\left(-\frac{K+1}{2}\right) + T(K+1)\left(R+\frac{1}{2}\right) + \\ +\left(R^2(-K) - R(1+\xi_{add}) + \xi_{add}\right).$$

Очевидно, что для интересующей нас области $K \ge 1$, $R \ge T \ge 2$ эта функция не убывает по *T*, так как

$$\Delta(R,T+1,K) - \Delta(R,T,K) = (K-1)(R-T) \ge 0.$$

Поскольку $T \le R$, $\Delta(R,T,K)$ принимает максимальные значения при $T = R$, то есть:

$$\forall\, 2 \le T \le R \quad \Delta(R,T,K) \le \Delta(R,R,K).$$

Для уточнения ситуации рассмотрим функцию $\Delta(R,T,K)$ при $T = R$. Имеем:

$$\Delta(R,R,K) = -R^2\frac{K-1}{2} + R\left(\frac{K-1}{2} - \xi_{add}\right) + \xi_{add}.$$

Эта функция убывает по *R* на области определения, поскольку:

$$\Delta(R+1,R+1,K) - \Delta(R,R,K) = \\ = -R(K-1) - \xi_{add} < 0.$$

Учитывая также, что в частном случае $T = R = 2$, справедливо неравенство

$$\left.\Delta(R,T,K)\right|_{R=T=2} = -(K-1) - \xi_{add} < 0,$$

имеем окончательно систему неравенств:

$$\Delta(R,T,K) < \Delta(R,R,K) < \Delta(2,2,K) < 0,$$

откуда следует соотношение (17).

■

**Следствие 2.**

*Пусть* $K,R,M,T \in \mathbf{N}$, $K \ge 1$, $R \ge T \ge 2$, *наборы ЛЛП* $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{\substack{m=\overline{0,M-1},\\ r=\overline{0,R-1}}}, A^{set}\right)$ *и* $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=0}^{M-1}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ *сконструированы для сопоставимых семейств* $\wp(R,M,T,K,\overline{a})$ *и* $\left\{\wp(M,K_r,\overline{c}_r)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$, *соответственно, и соотношения (7) и (8) выполняются в виде равенств. Тогда*

$$u\left(A^{set}\right) < \sum_{r=0}^{R-1} u\left(A_r^{ind}\right). \quad (18)$$

Данное следствие позволяет утверждать о потенциальном преимуществе *в вычислительном плане* эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП по сравнению с набором независимо вычисляемых эффективных ЛЛП, сконструированных для сопоставимых семейств. Следует, однако, заметить, что для практических задач преимущество по эффективности, характеризуемой парой ключевых характеристик – вычислительной сложности и качества – эффективного набора ЛЛП перед набором независимо вычисляемых эффективных ЛЛП может и отсутствовать. Объективные причины такой ситуации следующие:

- число степеней свободы (6) для набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП оказывается существенно больше, чем для эффективного набора ЛЛП. А именно: если для эффективного набора ЛЛП число степеней свободы составляет, в соответствии с соотношением (6), величину $KR$, то для набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП эта величина равна:

$$\sum_{r=0}^{R-1}\left|\Theta_{\wp(M,K(r+1),\overline{c})}\right| = \\ = \sum_{r=0}^{R-1} K(r+1) = KR\frac{R+1}{2}; \quad (19)$$

- для получения выражения (18) использовалось предположение о выполнении в виде равенств соотношений (7) и (8).

Первая из указанных причин имеет принципиальное значение, поскольку означает возможность конструирования признаков, лучше адаптированных под конкретную задачу.

### *4. Аналитическое сравнение наборов ЛЛП при совпадающем числе степеней свободы*

Пусть $N, R, M, T, K \in \mathbf{N}$, и $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{\substack{r=\overline{0,R-1};\\ m=\overline{0,M-1}}}, A^{set}\right)$ – некоторый эффективный набор ЛЛП семейства $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$. Число степеней свободы эффективного набора ЛЛП составляет *KR*. Пусть также сконструированы отдельные эффективные ЛЛП в количестве $\tilde{R}$ штук: $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,\tilde{R}-1}}$, причём количество эффективных $\tilde{R}$ ЛЛП выбирается таким, чтобы число степеней свободы в обоих наборах совпадало. Поскольку число степеней свободы для набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП определяется выражением (19), легко показать, что в этом случае должно выполняться соотношение:

$$\tilde{R}\left(\tilde{R}+1\right) = 2R\,. \tag{20}$$

Тогда справедливо следующее предложение.

**Предложение 3.** *Пусть* $K, R, \tilde{R}, M, T \in \mathbf{N}$, $K \ge 1$, $R \ge T \ge 2$ *и выполняется выражение (20). Тогда*

$$\left(\begin{aligned}&R(K-1)-(R-1)\xi_{add}+\\&\quad+(K+1)T\left(R-\frac{T-1}{2}\right)\end{aligned}\right) > K\tilde{R}\left(\tilde{R}+1\right).$$

<u>Доказательство:</u> рассмотрим разность левой и правой частей приведённого неравенства, подставив в правую часть соотношение (20):

$$\Delta(R,T,K) \equiv \left(\begin{aligned}&R(K-1)-(R-1)\xi_{add}+\\&\quad+(K+1)T\left(R-\frac{T-1}{2}\right)\end{aligned}\right) - 2KR\,.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\Delta(R,T,K) &= (K+1)(T-1)\left(R-\frac{T}{2}\right)-\xi_{add}(R-1) \ge\\ &\ge (T-1)R-\xi_{add}(R-1) \ge\\ &\ge R\left(T-1-\xi_{add}\right)+\xi_{add} \ge 2-\xi_{add} > 0.\end{aligned}$$

■

**Следствие 3.** *Пусть* $K, R, M, T \in \mathbf{N}$, $K \ge 1$, $R \ge T \ge 2$, *совместно и независимо вычисляемые ЛЛП имеют одинаковое число степеней свободы (выполняется соотношение (20)), и соотношения (7) и (8) выполняются в виде равенств. Тогда*

$$u\left(A^{set}\right) > \sum_{r=0}^{\tilde{R}-1} u\left(A_r^{ind}\right). \tag{21}$$

Данное следствие позволяет утверждать о потенциальном преимуществе *в вычислительном плане* набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП по сравнению с эффективным набором совместно вычисляемых ЛЛП, обладающими одинаковым числом степеней свободы. В то же время, аналогично рассмотренной в третьем разделе ситуации, для практических задач указанное преимущество может и отсутствовать. Объективные причины такой ситуации следующие:

- при одинаковом числе степеней свободы в эффективном наборе совместно вычисляемых ЛЛП количество ЛЛП оказывается больше, чем в наборе независимо вычисляемых ЛЛП. Действительно, в соответствии с соотношением (20) $R = \tilde{R}\dfrac{\left(\tilde{R}+1\right)}{2} > \tilde{R} \quad \left(\tilde{R} \ge 2\right)$;
- для получения выражения (21) использовалось предположение о выполнении в виде равенств соотношений (7) и (8).

### *5. Аналитическое сравнение вычислительной сложности решения частной задачи построения ЛЛП*

Пусть $N, R, M, T, K \in \mathbf{N}$, $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$, и $\left\{\wp\left(M,K_r,\bar{c}^r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ – сопоставимые множества семейств для, соответственно, совместно и независимо вычисляемых ЛЛП. Для сравнения вычислительной сложности решения частных задач (см. раздел 1) построения соответствующих наборов ЛЛП (эффективного набора ЛЛП $\left(\left\{h_r^{set}(m)\right\}_{\substack{r=\overline{0,R-1};\\ m=\overline{0,M-1}}}, A^{set}\right)$ и набора эффективных ЛЛП $\left\{\left(\left\{h_r^{ind}(m)\right\}_{m=\overline{0,M-1}}, A_r^{ind}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$) следует сопоставить число перебираемых наборов последовательностей из семейств $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ и $\left\{\wp\left(M,K_r,\bar{c}^r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$. В случае перебора наборов последовательностей из семейства $\wp(R,M,T,K,\bar{a})$ количество вариантов равно мощности этого семейства: $\left|\wp(R,M,T,K,\bar{a})\right|$. В случае, когда набор формируется из множества семейств $\left\{\wp\left(M,K_r,\bar{c}^r\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$, можно предложить по крайней мере две очевидные стратегии перебора наборов-претендентов на решение:

– *полный перебор*, когда допускаются все комбинации $R$ последовательностей из семейств $\wp\left(M,K_r,\bar{c}^r\right)$ $\left(r=\overline{0,R-1}\right)$. В этом случае количество вариантов составляет величину: $\prod_{r=0}^{R-1}\left|\wp\left(M,K(r+1),\bar{c}^r\right)\right|$;

– *инкрементный (последовательный) перебор*, когда наилучшая последовательность $r$-го семейства определяется только после нахождения наилучшей последовательности из ($r$-1)-го семейства. Этот вариант, очевидно, даёт квазиоптимальное решение, однако требует меньших вычислительных затрат, пропорциональных количеству вариантов: $\sum_{r=0}^{R-1}\left|\wp\left(M,K\left(r+1\right),\overline{c}^{r}\right)\right|$.

Учитывая, что мощности указанных семейств удовлетворяют соотношениям (4) и (5), об относительной сложности решения частных задач построения наборов ЛЛП можно судить, сопоставляя величину $C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}$ с величинами $\prod_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}$ (полный перебор) или $\sum_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}$ (инкрементный перебор). Для удобства рассмотрим их отношения:

– для сравнения с полным перебором

$$\frac{C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}}{\prod_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}}, \qquad (22)$$

– для сравнения с инкрементным перебором

$$\frac{C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}}{\sum_{r=1}^{R}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}}. \qquad (23)$$

Для ситуации сравнения с инкрементным перебором справедливо следующее предложение.

**Предложение 4.** *Пусть* $K,R,M,T\in\mathbf{N}$, $K\geq 1$, $R\geq T\geq 2$, $M>RK+1$. *Тогда*

$$C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}>\sum_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}.$$

Доказательство: учитывая справедливость неравенств:

$$C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}>C_{R(M+K-1)-1}^{RK},$$

$$\sum_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}\leq R\cdot C_{M-2+RK}^{RK},$$

для выражения (23) имеем:

$$\frac{C_{R(M+K)-1}^{RK}-C_{R(M+K-1)-1}^{RK}}{\sum_{r=0}^{R-1}C_{M-2+(r+1)K}^{(r+1)K-1}}\geq\frac{C_{R(M+K-1)-1}^{RK}}{R\cdot C_{M-2+RK}^{RK}}=$$

$$=\frac{1}{R}\prod_{r=1}^{RK}\frac{R\left(M-1\right)-1+r}{M-2+r}=\prod_{r=2}^{RK}\frac{R\left(M-1\right)-1+r}{M-2+r}>1.$$

■

В приведённой ниже табл. 1 даны некоторые числовые значения для величины (23). Представленные результаты позволяют утверждать не только то, что задача построения эффективного набора совместно вычисляемых ЛЛП *сложнее* задачи (инкрементного) построения аналогичного множества независимо вычисляемых эффективных ЛЛП (что следует из предложения 4), но и то, что она *существенно сложнее*!

*Таблица 1. Примеры значений величины (23)*

| $R$ | $M=21$ | | | $M=31$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K=1$ | $K=2$ | $K=3$ | $K=1$ | $K=2$ | $K=3$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3,77 | 14,28 | 48,58 | 3,84 | 14,8305 | 52,89 |
| 3 | 23,16 | 488,96 | 7969,03 | 24,31 | 555,89 | 10454,39 |
| 4 | 191,84 | 28159,80 | 2,6*10^6 | 209,89 | 36653,89 | 5,7*10^9 |

В отличие от рассмотренной ситуации с инкрементным перебором, вариант полного перебора не позволяет сделать однозначный вывод. Для примера в табл. 2 приведены значения соответствующей величины (22). Как видно из результатов, для случаев $\left(M,R,K\right)\in\left\{\left(21,2,1\right),\left(21,3,1\right),\left(31,2,1\right)\right\}$ вариант независимо вычисляемых ЛЛП оказывается предпочтительнее. Однако для других значений параметров набора сложность построения независимо вычисляемых ЛЛП растёт и оказывается больше сложности построения эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП.

*Таблица 2. Примеры значений величины (22)*

| $R$ | $M=21$ | | | $M=31$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K=1$ | $K=2$ | $K=3$ | $K=1$ | $K=2$ | $K=3$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3,95 | 0,69 | 0,21 | 3,97 | 0,48 | 0,11 |
| 3 | 1,21 | 0,01 | 6,6*10^-4 | 0,83 | 0,003 | 6,5*10^-5 |
| 4 | 0,0452 | 1,5*10^-5 | 7,2*10^-8 | 0,01 | 6,8*10^-7 | 1,3*10^-15 |

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

– *квазиоптимальное решение* частной задачи построения набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП, основанное на инкрементном переборе, в вычислительном плане проще решения (оптимального) частной задачи построения эффективного набора ЛЛП;

– при поиске *оптимального решения* предпочтительной в вычислительном плане является частная задача построения эффективного набора совместно вычисляемых ЛЛП (чем набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП).

## *6. Экспериментальное исследование показателей эффективности наборов ЛЛП*

В завершение сравнения двух предложенных подходов к построению наборов ЛЛП, а также для сравнения их с существующими типовыми решениями рассмотрим несколько примеров, позволяющих экспериментальным образом сравнить основные показатели конструируемых ЛЛП: вычислительную сложность расчёта значений признаков совместно с качественным показателем их использования в задаче. Несмотря на демонстративный характер примеров (связанный с субъективностью выбора рассматриваемых задач и, как следствие, соответствующих показателей качества), в них чётко прослеживается связь со многими реальными практическими задачами. «Рафинированность» же использованной постановки оказалась необходима для обеспечения возможности указания «идеального» решения. Следует также отметить, что общая постановка и одна из представленных ниже групп задач рассматривалась автором в предшествующей работе [5].

Общая постановка задачи следующая. Пусть необходимо разработать алгоритм или устройство, предназначенное для выполнения локального анализа реализации дискретного стационарного случайного процесса (ССП) $X(n)$ с нулевым средним и биэкспоненциальной автокорреляционной функцией:

$$R(n)=D_x\rho^{|n|},\quad n\ge 0,$$

где, для определённости, $D_x=1,\quad \rho=0,95$. Для определённости также полагаем, что длина ССП неограничена, а для проведения локального анализа в позиции $n_0$ достаточно $M=33$ текущих отсчётов ССП («окно» анализа: $X(n_0),\ldots,X(n_0+M-1)$). Пусть из каких-либо внешних соображений (например, заранее принятого технического решения) локальный анализ выполняется в два шага: вначале по отсчётам «окна» анализа рассчитываются признаки, а затем некоторая (заданная извне и настроенная) процедура на основе рассчитанных признаков производит высокоуровневый анализ (обнаружение, распознавание и т.п.). Подобная схема анализа на практике используется достаточно часто [7, 8]. И пусть для описания ССП в «окне» анализа принято решение использовать признаки, рассчитываемые как линейное преобразование / разложение отсчётов ССП, попадающих в «окно» анализа. Пусть, наконец, *качество анализа* напрямую зависит от среднеквадратической ошибки описания отсчётов ССП в «окне» с использованием набора импульсных характеристик $\left\{h_r(m)\right\}_{\substack{r=\overline{0,R-1};\\ m=\overline{0,M-1}}}$ признаков (для удобства записи начало координат помещаем в позицию $n_0$):

$$E\left(\sum_{m=0}^{M-1}\left(\sum_{r=0}^{R-1}Y_r h_r(m)-X(m)\right)^2\right),$$

здесь $E(\ldots)$ – оператор математического ожидания.

Используя эту величину как составляющую *показателя качества* конструируемого набора ЛЛП, определим его в следующем виде:

$$J_\alpha=\alpha\cdot\frac{E\left(\sum_{m=0}^{M-1}\left(\sum_{r=0}^{R-1}Y_r h_r(m)-X(m)\right)^2\right)}{E\left(\sum_{m=0}^{M-1}\left(X(m)\right)^2\right)}+$$

$$+(1-\alpha)\frac{2}{R(R-1)}\sum_{r=0}^{R-2}\sum_{t=r+1}^{R-1}\frac{\left\langle h_t,h_r\right\rangle^2}{\left\|h_t\right\|\cdot\left\|h_r\right\|}, \qquad (24)$$

$$\left(\alpha\in[0,1]\right).$$

В этом выражении первое слагаемое характеризует относительную ошибку представления фрагмента случайного процесса с помощью набора КИХ ЛЛП, а второе – степень коррелированности этого набора, определяемую по норме Гильберта-Шмидта [7]. Коэффициент $\alpha$ определяет степень предпочтения между этими двумя показателями в критерии, величина $E\left(\sum_{m=0}^{M-1}X^2(m)\right)=D_xM\quad(=33)$.

Собственно *задачей в общей постановке* является нахождение такого решения (набора признаков и алгоритма их вычисления), которое даёт наименьшее значение показателя качества набора ЛЛП (24) при некотором ограничении на сложность обработки:

$$\begin{cases}J_\alpha\to\min\\ u(\ldots)\le u_{\max}.\end{cases} \qquad (25)$$

Ниже представлены несколько вариантов решения этой задачи. Первые два (типовые способы решения) используют оптимальное по качеству разложение фрагмента ССП и отличаются только используемыми алгоритмами вычисления свёртки. В первом случае (*вариант 1*) используется прямой алгоритм вычисления свёртки, во втором (*вариант 2*) – быстрый алгоритм (БА) дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с оптимальным секционированием входного сигнала [6-8, 11]. Заметим, что второе решение де-факто является стандартом для решений задач подобного типа. *Вариант 3* решения основан на построении эффективного набора совместно вычисляемых ЛЛП, *варианты 4-7* – на построении наборов независимо вычисляемых эффективных ЛЛП (см. расшифровку этих вариантов ниже). Следует также отметить, что детальное описание типовых решений (первого и второго) и решения с использованием эффективного набора ЛЛП для случая $\alpha=1$ представлены в работе [5]. В этой же работе приведены и основные соотношения, позволяющие вычислять ошибку представления фрагмента дискретного случайного процесса с использованием неортогонального набора дискретных функций. Ниже представлены исключительно численные результаты, полученные с использованием этих выражений.

Рассматриваемые задачи делятся на три *группы* в соответствие со значением параметра $\alpha$. А именно:

- *Группа 1* ($\alpha = 1$). Построение набора ЛЛП для представления фрагмента ССП с минимальной ошибкой.
- *Группа 2* ($\alpha = 0$). Построение набора ЛЛП с минимальной степенью коррелированности КИХ ЛЛП.
- *Группа 3* ($\alpha = 1/2$). Построение набора ЛЛП, одновременно обладающего свойствами первой и второй группы.

Поиск решения задачи (25) (для вариантов 3 - 7) производится путём решения частных задач построения наборов ЛЛП. Как следует из определения таких задач [2 - 5], решение ищется в конкретном семействе, состав которого определяется как ограничениями задачи (размер окна анализа $M$ и вычислительной сложности $u_{\max}$), так и субъективно выбранными параметрами семейств $T, K, \overline{a}$ и $\left\{\overline{c}^{r}\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$. Рассматривались следующие семейства:

- для построения эффективного набора ЛЛП – семейство $\wp\left(R, M, T, K, \overline{a}\right)$ с параметрами (*вариант 3*):

$T = 2, K = 1, \quad a_{01} = 1, a_{10} = 1, a_{11} = a_{10} = 1$;

- для построения набора независимо вычисляемых эффективных ЛЛП для семейств $\left\{\wp\left(M, K_r, \overline{c}^{r}\right)\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$ с различными группами параметров:

– квазимногочлены (*вариант 4*):

$$c_k^r = \left(-1\right)^{k+1} C_{(r+1)K}^{k}, \quad \left(K = 1, \quad k = \overline{1,\left(r+1\right)K}\right);$$

– квазиэкспонента (*вариант 5*):

$$c_k^r = \frac{1}{\left(r+1\right)K}\rho^k, \quad \left(K = 1, \quad k = \overline{1,\left(r+1\right)K}\right);$$

– квази-Фибоначчи (*вариант 6*):

$R = 1, 2: \quad c_1^1 = c_1^2 = c_1^1 = 1;$

$R = 3: \quad c_1^3 = 1/2, \quad c_2^3 = 3/2, \quad c_3^3 = 1/2;$

$R = 4: \quad \ldots$

– квазигармонические (*вариант 7*):

$R = 1: \; c_1^1 = 1,$

$R = 2: \; c_2^1 = 2\cos\left(\omega\right), \quad c_2^2 = -1;$

$R = 3: \; c_3^1 = \cos\left(\omega\right), c_3^2 = 2\cos^2\left(\omega\right) - 1, c_3^3 = -\cos\left(\omega\right);$

$R = 4: \quad \ldots$

Названия групп определяются по названию последовательностей, которые удовлетворяют соответствующим однородным ЛРС (при $R \geq 2$).

Вычислительная сложность расчёта признаков для наборов ЛЛП задавалась выражениями (7) и (8), использованными в виде равенств.

Результаты проведённых исследований представлены на рис. 1-4. В соответствии с этими результатами можно сделать следующие выводы.

- Качество решения задачи представления (группа 1, рис. 1) с помощью наборов как независимо, так и совместно вычисляемых ЛЛП оказалось *существенно выше,* чем при использовании теоретически оптимального разложения Карунена-Лоэва (при наличии ограничения на вычислительную сложность)! Например, при ограничении вычислительной сложности величиной $u_{\max} = 40$ качество эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП оказалось почти в *шесть раз выше!*
- Качество решения задачи представления (группа 1, рис. 2) с помощью эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП лучше, чем с использованием любого из рассмотренных наборов независимо вычисляемых ЛЛП.
- Качество решения задач всех групп (рис. 2-4) существенно зависит от выбранных параметров семейств. Как следствие, результаты сравнения эффективных наборов ЛЛП и наборов независимо вычисляемых ЛЛП оказываются зависимыми от субъективных причин и не имеют должной степени общности.

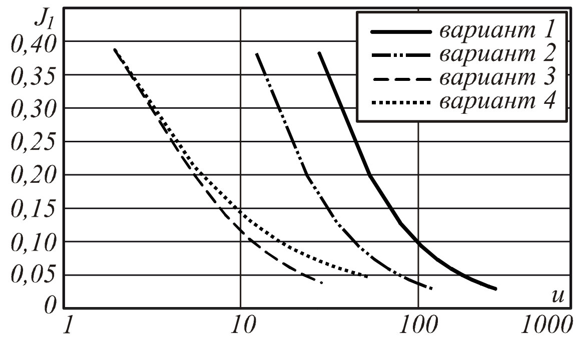


*Рис 1. Сравнение предлагаемых подходов с типовыми решениями: график зависимости показателя качества $J_1$ (ошибки представления) от вычислительной сложности расчёта признаков*

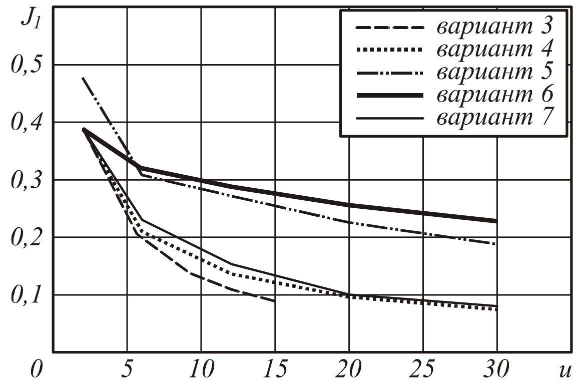


*Рис. 2. Сравнение предлагаемых подходов: график зависимости показателя качества $J_1$ (ошибки представления) от вычислительной сложности расчёта признаков*

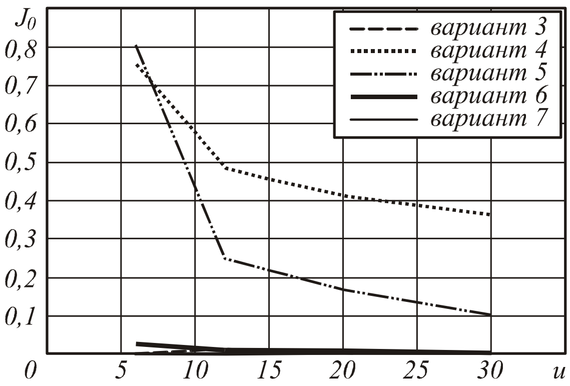


*Рис. 3. Сравнение предлагаемых подходов: график зависимости показателя качества $J_0$ (коррелированности) от вычислительной сложности расчёта признаков*

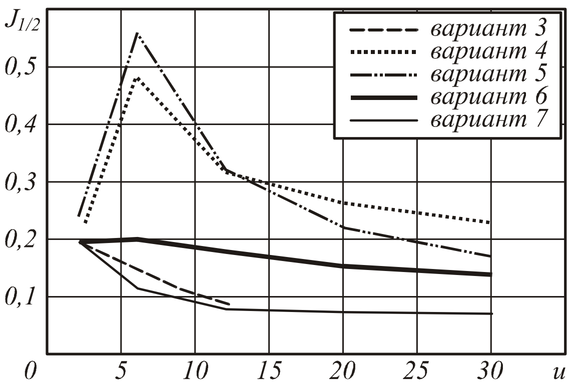


*Рис. 4. Сравнение предлагаемых подходов: график зависимости показателя качества $J_{1/2}$ от вычислительной сложности расчёта признаков*

Анализируя результаты решения всех групп задач (1-3) и принимая во внимание предшествующие выводы, можно сделать общий вывод о *сопоставимой эффективности предложенных подходов к построению наборов ЛЛП* (в смысле пары показателей – качества и вычислительной сложности) при условии адекватного подбора (субъективно выбираемых) параметров признаков (коэффициентов $\overline{a}$ и $\left\{\overline{c}^r\right\}_{r=\overline{0,R-1}}$, определяющих типы ЛЛП).

## Заключение

В работе произведено сравнение двух предложенных автором подходов к построению наборов линейных локальных признаков цифровых сигналов. Показано, что в зависимости от критериев сравнения друг с другом предложенные подходы могут иметь как преимущества, так и недостатки. В результате в общем случае можно сделать вывод о *сопоставимой эффективности* (в смысле пары показателей – качества и вычислительной сложности) обоих подходов при их корректном использовании, что позволяет факт выбора подхода оставить на усмотрение разработчика конкретной системы обработки сигналов или изображений. На примере решения модельных задач продемонстрировано убедительное преимущество обоих подходов по сравнению с типовым «оптимальным» способом её решения.

Направления дальнейших исследований связаны с разработкой численных методов и алгоритмов «быстрого» решения частной (и расширенной частной) задачи построения эффективных наборов совместно вычисляемых ЛЛП и наборов независимо вычисляемых эффективных ЛЛП.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке:

- Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проекты: 09-01-00434-а, 11-07-12060-офи-м-2011, 11-07-12062-офи-м-2011;
- Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий», проект 2.12.

## Литература

1. **Мясников, В.В.** О синтезе эффективного алгоритма над множеством алгоритмов вычисления свёртки / В.В. Мясников // Компьютерная оптика. - Вып. 29. – 2006. – С. 78-117.
2. **Мясников, В.В.** Эффективные локальные линейные признаки цифровых сигналов и изображений / В.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 31, № 4. – С. 58-76.
3. **Мясников, В.В.** Построение эффективных линейных локальных признаков в задачах обработки и анализа изображений / В.В. Мясников // Автоматика и Телемеханика. – 2010. – № 3. – С. 162-177.
4. **Мясников, В.В.** Анализ методов построения эффективных линейных локальных признаков цифровых сигналов и изображений / В.В. Мясников, А.Ю. Баврина, О.А. Титова // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 193-201.
5. **Мясников, В.В.** Эффективные наборы совместно-вычисляемых линейных локальных признаков цифровых сигналов / В.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 1. – С. 77-94.
6. Computer Image Processing, Part I: Basic Concepts and Theory / edited by Victor A. Soifer (Editor). – VDM Verlag, 2009. – 296 p.
7. Computer Image Processing, Part II: Methods and algorithms / edited by Victor A. Soifer (Editor). – VDM Verlag, 2009. – 584 p.
8. **Forsyth, D.A.** Computer Vision: A Modern Approach / D.A. Forsyth, J. Ponce // Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003. – 693 p.
9. **Agarwal, R.P.** Difference Equations and Inequality: Theory, Methods, and Applications / R.P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 998 p.
10. **Гихман, И.И.** Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1965.
11. **Nussbaumer, H.J.** Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms (2nd ed.) / H.J. Nussbaumer. – New York: Springer-Verlag, 1982.

## References

1. **Myasnikov, V.V.** On the synthesis of the efficient algorithm over the set of the convolution algorithms / V.V. Myasnikov // Computer optics. – Issue 29. – 2006. – P. 78-117. – (in Russian).
2. **Myasnikov, V.V.** Efficient linear local features of signals and images / V.V. Myasnikov // Computer optics. – 2007. – Vol. 31, N 4. – P. 58-76. – (in Russian).

3. **Myasnikov, V.V.** Construction of efficient linear local features for image processing and analysis / V.V. Myasnikov // Automation and Remote Control. – 2010. – N 3. – P. 162-177. – (in Russian).
4. **Myasnikov, V.V.** Analysis of the methods for construction of linear local features / V.V. Myasnikov, A.U. Bavrina, O.A. Titova // Computer optics. – 2010. – Vol. 34, N 3. – P. 193-201. – (in Russian).
5. **Myasnikov, V.V.** Efficient sets of jointly calculated linear local features of digital signals / V.V. Myasnikov // Computer optics. – 2011. – Vol. 35, N 1. – P. 77-94. – (in Russian).
6. Computer Image Processing, Part I: Basic Concepts and Theory / edited by Victor A. Soifer (Editor). – VDM Verlag, 2009. – 296 p.
7. Computer Image Processing, Part II: Methods and algorithms / edited by Victor A. Soifer (Editor). – VDM Verlag, 2009. – 584 p.
8. **Forsyth, D.A.** Computer Vision: A Modern Approach / D.A. Forsyth, J. Ponce // Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003. – 693 p.
9. **Agarwal, R.P.** Difference Equations and Inequality: Theory, Methods, and Applications / R.P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, 2000. – 998 p.
10. **Gihman, I. I.** Introduction to stochastic process theory / I.I. Gihman, A.V. Skorohodov – Moscow: "Nauka" Publisher, 1965. – (in Russian).
11. **Nussbaumer, H.J.** Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms (2nd ed.) / H.J. Nussbaumer. – New York: Springer-Verlag, 1982.


## COMPARISON OF TWO APPROACHES TO THE CONSTRUCTION OF SETS OF LINEAR LOCAL FEATURES OF DIGITAL SIGNALS

*V. V. Myasnikov*
*Image Processing Systems Institute of the RAS*

***Abstract***

The paper compares two approaches to the construction of sets of linear local features (LLF) of digital signals. The first of the analyzed approaches forms a set of LLF using independent efficient LLFs, each of which has its own algorithm for computing the feature value. The second approach constructs an efficient set of LLF, which has a single algorithm of joint computation of values of all features. Analytical and experimental comparison is made for several indicators of the computational and qualitative properties of the constructed LLF. An experimental comparison of two approaches with known solutions is also presented.

*Key words:* digital signals, linear local features, features set, computational complexity, processing quality, efficiency.

### *Сведения об авторе*

**Мясников Владислав Валерьевич**, 1971 года рождения. В 1994 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет (СГАУ). В 1995 году поступил в аспирантуру СГАУ, в 1998 году защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук, а в 2008 – диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук. В настоящее время работает ведущим научным сотрудником в Учреждении Российской академии наук Институте систем обработки изображений РАН и, одновременно, доцентом кафедры геоинформатики и информационной безопасности СГАУ. Круг научных интересов включает цифровую обработку сигналов и изображений, геоинформатику, нейронные сети, компьютерное зрение, распознавание образов и искусственный интеллект. Имеет около 100 публикаций, в том числе 40 статей и две монографии (в соавторстве). Член Российской ассоциации распознавания образов и анализа изображений.

E-mail: *vmyas@smr.ru* .

Страница в интернете: *http://www.ipsi.smr.ru/staff/MyasVV.htm* .

**Vladislav Valerievich Myasnikov** (1971 b.), graduated (1994) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). He received his PhD in Technical sciences (2002) and DrSc degree in Physics & Maths (2008). At present he is a leading researcher at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, and ), holding a part-time position of Associate Professor at SSAU's Geoinformatics and Information Security sub-department. The area of interests includes digital signals and image processing, geoinformatics, neural networks, computer vision, pattern recognition and artificial intelligence. He's list of publications contains about 100 scientific papers, including 40 articles and 2 monographs. He is a member of Russian Association of Pattern Recognition and Image Analysis.

*Поступила в редакцию 20 июня 2011 г.*