

## РАСЧЁТ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ВИДЕ ЛИНИИ

Дмитриев А.Ю.<sup>1</sup>, Досколович Л.Л.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН,

<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

### Аннотация

Рассмотрен расчёт преломляющей поверхности для формирования изображения в виде линии. Предложено представление поверхности в виде огибающей семейства картезианских овалов. Для задачи формирования диаграммы направленности в виде прямоугольника предложено приближённое решение в виде преломляющей поверхности, формирующей мнимое изображение в виде отрезка.

**Ключевые слова:** геометрическая оптика, преломляющая поверхность, диаграмма направленности, лучи.

### Введение

Формирование изображений в виде линии является актуальным для задач лазерной оптики, радиофизики и светотехники. Задача расчёта оптического элемента для формирования изображения в виде линии состоит в определении формы преломляющей поверхности оптического элемента из условия, что преломлённые лучи приходят в точки на линии. При этом линия является каустикой семейства преломлённых лучей.

Методы решения задач данного класса в приближении геометрической оптики хорошо разработаны для дифракционных оптических элементов [1–4]. В этом случае задача ставится как задача расчёта эйконала светового поля на некоторой поверхности (обычно на плоскости), обеспечивающего заданные направления распространения лучей. Восстановление формы поверхности дифракционного элемента по функции эйконала предполагает использование приближения тонкого оптического элемента [5]. Использование данного приближения недопустимо при расчёте преломляющих поверхностей, преломляющих лучи на большие углы (более  $5...10^\circ$ ).

В работах [6–10] предложены итерационные методы расчёта преломляющих оптических элементов для формирования изображения в виде набора точек. Данные методы могут быть использованы для расчёта преломляющих поверхностей, формирующих сложные двумерные изображения, и в том числе изображения в виде линии [7]. Однако методы [6–10] являются вычислительно сложными из-за необходимости многократного решения прямой задачи на каждом шаге итерационного процесса.

В данной работе рассматривается расчёт преломляющей поверхности для формирования изображения в виде линии. Поверхность представлена в аналитическом виде, соответствующем огибающей семейства картезианских овалов. Рассмотрен расчёт преломляющей поверхности, формирующей изображение в виде отрезка. Такая поверхность является приближённым решением задачи формирования диаграммы направленности в виде прямоугольника.

### 1. Расчёт преломляющей поверхности для фокусировки в кривую

Рассмотрим задачу расчёта поверхности  $Q$  для формирования изображения в виде линии при сферическом падающем пучке. Поверхность  $Q$  является границей раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Сферический пучок формируется точечным источником, расположенным в начале координат (рис. 1). Линия задана векторной функцией одного аргумента

$$\mathbf{X}(\sigma) = (X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)), \quad \sigma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (1)$$

где  $\sigma$  – натуральный параметр.

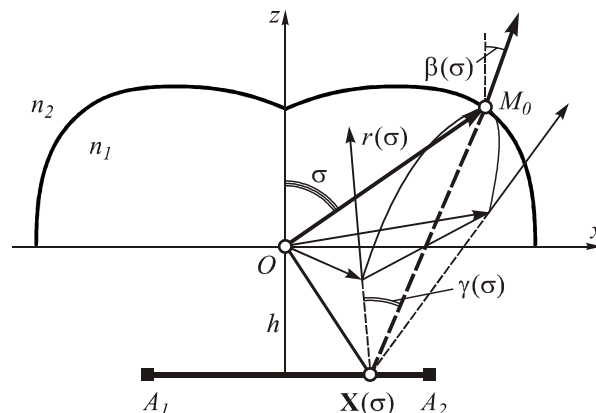


Рис. 1. Геометрия задачи формирования ДН в виде прямоугольника

Поверхность  $Q$  предлагается определить в виде огибающей семейства поверхностей по параметру  $\sigma$ , каждая из которых фокусирует падающий пучок от источника в точку  $\mathbf{X}(\sigma)$  линии. Уравнение поверхности несложно получить из принципа Ферма (принцип равенства оптических путей от источника к точке на кривой) в виде [5]:

$$\frac{1}{n} |\mathbf{M}| \pm |\mathbf{X}(\sigma) - \mathbf{M}| = \psi(\sigma), \quad (2)$$

где  $\mathbf{M} = (x, y, z)$ ,  $n = n_2 / n_1$  – относительный показатель преломления,  $\psi(\sigma)$  – константа при фиксированном  $\sigma$ . Уравнение (2) определяет поверхность в

невном виде в декартовых координатах. Знаки «±» в левой части соответствуют случаям действительного и мнимого фокуса. Поверхность (2) является картезианским овалом [5]. Уравнение огибающей определяется уравнением (2) и его производной по параметру  $\sigma$  [10]:

$$\left( \frac{\mathbf{X}(\sigma) - \mathbf{M}}{|\mathbf{X}(\sigma) - \mathbf{M}|}, \frac{d\mathbf{X}(\sigma)}{d\sigma} \right) = \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}. \quad (3)$$

Таким образом, поверхность для формирования изображения в виде линии (1) определяется системой уравнений (2), (3).

Так как  $\sigma$  является натуральным параметром, то из уравнения наклонов [1] можно показать, что  $\left| \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \right| \leq 1$ . Таким образом, уравнение (3) является уравнением кругового конуса с единичным вектором оси

$$\mathbf{a}(\sigma) = \frac{d\mathbf{X}(\sigma)}{d\sigma}, \quad (4)$$

совпадающим с касательной к кривой фокусировки, и углом при вершине

$$\alpha(\sigma) = \arccos \left( \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \right). \quad (5)$$

Введём единичный вектор  $\mathbf{q}(\sigma, \varphi)$ , являющийся образующей конуса лучей (3), где  $\varphi$  – некоторый параметр, описывающий положение вектора на конусе. Запишем уравнение преломляющей поверхности в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\sigma, \varphi) &= (x(\sigma, \varphi), y(\sigma, \varphi), z(\sigma, \varphi)) = \\ &= \mathbf{X}(\sigma) + \mathbf{q}(\sigma, \varphi) \cdot l(\sigma, \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $l(\sigma, \varphi)$  – расстояние по направлению  $\mathbf{q}(\sigma, \varphi)$  от точки линии  $\mathbf{X}(\sigma)$  до поверхности. Подставив (6) в (2), получим для  $l(\sigma, \varphi)$  следующее уравнение:

$$\frac{1}{n} |\mathbf{X}(\sigma) + l(\sigma, \varphi) \mathbf{q}(\sigma, \varphi)| \pm l(\sigma, \varphi) = \psi(\sigma). \quad (7)$$

Легко видеть, что расчёт  $l(\sigma, \varphi)$  из уравнения (7) сводится к решению квадратного уравнения.

Получим ещё одно представление огибающей семейства картезианских овалов. Представим картезианский овал (2) в виде:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}; \sigma) = \mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot l(\mathbf{u}; \sigma), \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  – некоторые криволинейные координаты,  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  – единичный вектор направления (вектор луча от точечного источника),  $l(\mathbf{u}; \sigma)$  – расстояние по направлению луча от источника до поверхности. Подставив (8) в (2), получим для  $l(\mathbf{u}; \sigma)$  следующее уравнение:

$$\frac{1}{n} l(\mathbf{u}; \sigma) \pm |\mathbf{X}(\sigma) - l(\mathbf{u}; \sigma) \mathbf{e}(\mathbf{u})| = \psi(\sigma). \quad (9)$$

Расчёт  $l(\mathbf{u}; \sigma)$  из уравнения (9) сводится к решению квадратного уравнения. Уравнение огибающей семейства картезианских овалов, записанных в параметрическом виде (8), определяется уравнениями (8), (9) и условием [11]:

$$\frac{\partial l(\mathbf{u}; \sigma)}{\partial \sigma} = 0. \quad (10)$$

Последнее условие также определяет уравнение конуса (3), где точка поверхности  $\mathbf{M}$  определена в виде (8).

Рассмотрим случай, когда размеры поверхности являются малыми по сравнению с расстоянием до линии, то есть при  $l/|\mathbf{X}| \ll 1$ . Разлагая корень в (9), получим:

$$l(\mathbf{u}; \sigma) = \frac{\psi_1(\sigma)}{1 \mp n(\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{p}(\sigma))}, \quad (11)$$

где  $\psi_1(\sigma) = n(\psi(\sigma) \mp |\mathbf{X}(\sigma)|)$ ,  $\mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{X}(\sigma)/|\mathbf{X}(\sigma)|$ . Без потери общности рассмотрим случай знака «-» в знаменателе в (11). При условии (11) уравнение (10) принимает вид:

$$\left( \mathbf{e}(u, v), \frac{\mathbf{v}(\sigma)}{|\mathbf{v}(\sigma)|} \right) = \zeta(\sigma), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{v}(\sigma) = \left( \mathbf{p}(\sigma) \frac{d\psi_1(\sigma)}{d\sigma} - \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma} \psi_1(\sigma) \right), \quad (13)$$

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{n} \frac{d\psi_1(\sigma)}{d\sigma} / |\mathbf{v}(\sigma)|. \quad (14)$$

Уравнение (12) соответствует уравнению кругового конуса с вершиной в начале координат (точка расположения источника излучения) и осью  $\mathbf{v}(\sigma)$ . Точно такое же уравнение конуса возникает в задаче формирования диаграммы направленности, представленной функцией  $\mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{X}(\sigma)/|\mathbf{X}(\sigma)|$  [12, 13]. Таким образом, в рассмотренном приближении ( $|\mathbf{X}| \gg l$ ) лучи, приходящие от источника на преломляющую поверхность, которые после преломления попадают в точку  $\mathbf{X}(\sigma)$ , лежат на поверхности кругового конуса (12).

Представление поверхности в виде (8), (9), (12) является приближённым, но в ряде случаев позволяет существенно упростить расчёт. Как показано далее, при формировании изображения в виде отрезка указанное представление позволяет свести расчёт преломляющей поверхности к интегрированию двух дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производной.

## 2. Преломляющая поверхность для формирования мнимого изображения отрезка (прямоугольной диаграммы направленности)

Рассмотрим задачу формирования диаграммы направленности (ДН) в виде прямоугольника. Приближённым решением данной задачи является преломляющая поверхность, формирующая изображение в виде отрезка.

Будем рассматривать формирование мнимого изображения отрезка, так как в этом случае потери энергии, связанные с полным внутренним отражением лучей от поверхности, будут значительно меньше, чем при формировании изображения действительного отрезка. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Поверхность для формирования мнимого изображения в виде отрезка  $A_1A_2$  является огибающей семейства картезианских овалов (2), каждый из которых формирует сферический пучок, исходящий из точки  $\mathbf{X}(\sigma)$ , лежащей на отрезке  $A_1A_2$ . Угол  $\gamma(\sigma)$  определяет размер ДН по оси  $Oy$  и зависит от расстояния  $h$  от начала координат до отрезка  $A_1A_2$ . Уравнение огибающей поверхности определяется выражениями (3), (6), (7).

Аналогично подходу, представленному в работах [12, 13], предлагается расчёт трёхмерной поверхности огибающей проводить через расчёт цилиндрического профиля  $r(\sigma)$ , являющегося сечением поверхности плоскостью  $y = 0$ . Функция  $r(\sigma)$  определяется из дифференциального уравнения вида [12, 13]:

$$\frac{dr(\sigma)}{d\sigma} = -r(\sigma) \frac{\sin(\sigma - \beta(\sigma))}{(n_1/n_2) - \cos(\sigma - \beta(\sigma))}. \quad (15)$$

Функция  $\beta(\sigma)$  определяет распределение энергии вдоль отрезка. Для расчёта функции  $\beta(\sigma)$  будем использовать дифференциальное уравнение первого порядка, полученное в [13] для случая формирования ДН в виде отрезка. Данное дифференциальное уравнение получено при условии, что световой поток, заключенный между конусами (12), переходит в соответствующий элемент ДН. Указанное условие соответствует приближению  $|\mathbf{X}| \gg l$ , рассмотренному в пункте 1. Авторы не приводят в данной статье вид дифференциального уравнения для функции  $\beta(\sigma)$  из работы [13] в силу его громоздкости. Однако следует отметить, что дифференциальное уравнение в [13] является разрешённым относительно производной. Интегрирование этого уравнения является тривиальной задачей и может быть выполнено с использованием стандартного метода Рунге–Кутты. После расчёта функции  $\beta(\sigma)$  дальнейший расчёт огибающей поверхности может быть проведён по формуле (6), где

$$\mathbf{q}(\sigma, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta(\sigma)\right) \\ \sin \varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta(\sigma)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta(\sigma)\right) \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{X}(\sigma) = \begin{pmatrix} r(\sigma) \sin(\sigma) - \frac{h - r(\sigma) \cos(\sigma)}{\operatorname{ctg}(\beta(\sigma))} \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\psi(\sigma) = nr(\sigma) + |\mathbf{M}_0(\sigma) - \mathbf{X}(\sigma)|, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_0(\sigma) = (r(\sigma) \sin(\sigma), 0, r(\sigma) \cos(\sigma)). \quad (19)$$

При этом функция  $l(\sigma, \varphi)$  может быть получена из квадратного уравнения (7) в виде:

$$l(\sigma, \varphi) = \left( - (n^2 \psi - (\mathbf{X}, \mathbf{q})) + \frac{1}{1 - n^2} \sqrt{(n^2 \psi - (\mathbf{X}, \mathbf{q}))^2 - (1 - n^2)(|\mathbf{X}|^2 - n^2 \psi^2)} \right). \quad (20)$$

Случай отрицательного дискриминанта соответствует случаю полного внутреннего отражения. В данных точках преломляющая поверхность не определена.

Использование данного приближения при расчёте функции  $\beta(\sigma)$  обуславливает приближённый характер решения задачи формирования ДН в виде прямоугольника.

На рис. 2 представлена поверхность для формирования ДН в виде прямоугольника с угловыми размерами  $120^\circ$  по оси  $Ox$  и  $40^\circ$  по оси  $Oy$ , рассчитанная по полученным формулам. Данная ДН соответствует формированию мнимого изображения отрезка в плоскости  $z = 10$  мм. Максимальные размеры поверхности вдоль осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  составляют 16,57 мм, 10,52 мм и 10 мм, соответственно.

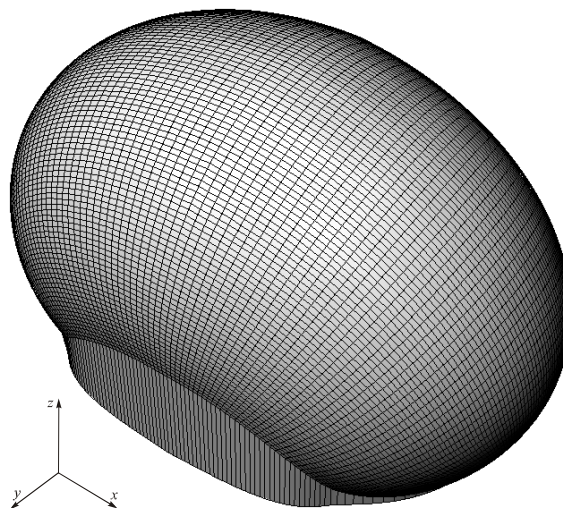


Рис. 2. Поверхность для формирования ДН в виде прямоугольника с угловыми размерами  $120^\circ \times 40^\circ$

На рис. 3 представлен результат моделирования работы рассчитанной поверхности в коммерческой программе по светотехнике TracePro [14]. Результат моделирования показывает хорошее качество формируемой ДН. Среднеквадратичное отклонение от равномерного распределения интенсивности от равномерного составило около 15%. Световая эффективность оптического элемента (доля излучённого светового потока, попадающая в области заданной ДН) составила около 67%. Такие потери объясняются полным внутренним отражением лучей. Действительно, максимально возможный угол поворота луча при преломлении на поверхности в случае  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1$  составляет менее  $49^\circ$ . При формировании ДН с рис. 3 максимальный угол поворота луча составляет

90°, что и обуславливает значительные энергетические потери.

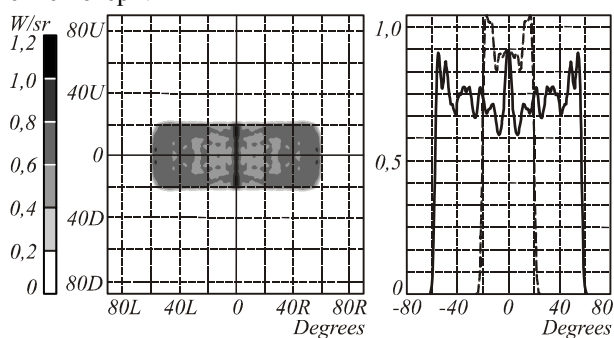


Рис. 3. ДН в виде прямоугольника, формируемая поверхностью с рис. 2

### Заключение

Получено общее представление преломляющей поверхности для формирования изображения в виде линии, соответствующее огибающей семейства картезианских овалов. Предложено приближённое решение задачи формирования прямоугольной ДН соответствующей преломляющей поверхности, формирующей мнимое изображение отрезка. Проведён расчёт преломляющей поверхности для формирования прямоугольной ДН с угловыми размерами  $120^\circ \times 40^\circ$ . Результаты моделирования работы поверхности показали высокое качество формируемой ДН.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственный контракт № 07.514.11.4060).

### Литература

1. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В.А. Сойфера – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
2. Гончарский, А.В. Введение в компьютерную оптику / А.В. Гончарский, В.В. Попов, В.В. Степанов – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 309 с.
3. Данилов, В.А. Теория когерентных фокусаторов / В.А. Данилов, Б.Е. Кинбер, А.Е. Шилов // Компьютерная оптика. – 1987. – № 1. – С. 40-52.
4. Дмитриев, А.Ю. Геометрооптический расчёт дифракционных оптических элементов для фокусировки в плоскую кривую в непараксиальном случае / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 420-426.
5. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973.
6. Olikier, V.I. Mathematical Aspects of Design of Beam Shaping Surfaces in Geometrical Optics / V.I. Olikier // Trends in Nonlinear Analysis. – 2002. – P. 191-222.
7. Michaelis, D. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber, and A. Bräuer // Optics Letters. – 2011. – V. 36, N 6. – P. 918-920.
8. Wang, L. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / Kai Wang, Fei Chen, Zongyuan Liu // Optics Express. – 2010. – V. 18, N 2. – P. 413-425.

9. Fournier, F.R. Fast freeform reflector generation using source-target maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // Optics Express. – 2010. – V. 18, N 5. – P. 5295-5304.
10. Moiseev, M.A. Design of high-efficient freeform LED lens for illumination of elongated rectangular regions / M.A. Moiseev L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, N S3. – P. A225-A233.
11. Математическая энциклопедия. Т.3. – М.: «Советская энциклопедия», 1982.
12. Дмитриев, А.Ю. Расчёт преломляющих поверхностей для формирования диаграммы направленности в виде отрезка линии / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 297-301.
13. Дмитриев, А.Ю. Расчёт преломляющих поверхностей для формирования диаграммы направленности в виде отрезка / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 4. – С. 476-480.
14. [http://www.lambdaires.com/software\\_products/tracepro/](http://www.lambdaires.com/software_products/tracepro/)

### References

1. Diffractive Computer Optics. Chapter 3 / ed. by V.A. Soifer. – Moscow: Fizmatlit Publisher, 2007. – (In Russian).
2. Goncharsky, A.V. Introduction to computer optics / A.V. Goncharsky, V.V. Popov, V.V. Stepanov – Moscow: Moscow State University Publisher, 1991. – 309 p. – (In Russian).
3. Danilov, V.A. Theory of coherent focusers / V.A. Danilov, B.E. Kinber, A.E. Shilov // Computer optics. – 1987. – Vol. 1. – P. 40-52. – (In Russian).
4. Dmitriev, A.Yu. Geometric-optics design of diffractive optical elements to focus into a plane line / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich // Computer Optics. – 2009. – V. 33, N 4. – P. 297-301. – (In Russian).
5. Born, M. Principles of optics / M. Born, E. Wolf – Moscow: “Nauka” Publisher, 1973. – (In Russian).
6. Olikier, V.I. Mathematical Aspects of Design of Beam Shaping Surfaces in Geometrical Optics / V.I. Olikier // Trends in Nonlinear Analysis. – 2002. – P. 191-222.
7. Michaelis, D. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber and A. Bräuer // Optics Letters. – 2011. – V. 36, N 6. – P. 918-920.
8. Wang, L. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / Kai Wang, Fei Chen, Zongyuan Liu // Optics Express. – 2010. – V. 18, N 2. – P. 413-425.
9. Fournier, F.R. Fast freeform reflector generation using source-target maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // Optics Express. – 2010. – V. 18, N 5. – P. 5295-5304.
10. Moiseev, M.A. Design of high-efficient freeform LED lens for illumination of elongated rectangular regions / M.A. Moiseev L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, N S3. – P. A225-A233.
11. Mathematical encyclopaedia. V. 3. – Moscow: “Sovetskaya encyclopaedia” Publisher, 1982. – (In Russian).
12. Dmitriev, A.Yu. Designing of refracting surface to generate a line-shaped directivity diagram / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich // Computer Optics. – 2010. – V. 34, N 3. – P. 297-301. – (In Russian).
13. Dmitriev, A.Yu. Design of refracting surface to generate a line-segment directivity diagram / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich // Computer Optics. – 2010. – V. 34, N 4. – P. 476-480. – (In Russian).
14. [http://www.lambdaires.com/software\\_products/tracepro/](http://www.lambdaires.com/software_products/tracepro/)

**DESIGN OF REFRACTING SURFACE TO GENERATE  
A LINE-SHAPED IMAGE**A.Yu. Dmitriev<sup>1</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Image Processing Systems Institute of the RAS,<sup>2</sup> S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)**Abstract**

A method of designing a refracting surface to generate a line-shaped image is presented. A relationship for the surface is derived as an envelope of family of cartesian ovals. The refracting surface that generates the imaginary picture of the line-segment is presented as an approximate solution of the problem of generating the rectangular directivity diagram.

**Key words:** geometric optics, refractive freeform surface, directivity diagram, rays.

**Сведения об авторах**

**Дмитриев Антон Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения Российской академии наук Института систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: геометрическая оптика, дифракционная оптика.

E-mail: [tonydm@yandex.ru](mailto:tonydm@yandex.ru).

**Anton Yurievich Dmitriev**, a researcher of Image Processing Systems Institute of the RAS. Academic degree: Candidate of Physico-mathematical Sciences. Research interests: geometric optics, diffraction optics.

**Сведения об авторе Досколович Леонид Леонидович – см. стр.340 этого номера.**

Поступила в редакцию 12 мая 2012 г.