СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Казанский Н.Л., Харитонов С.И., Хонина С.Н.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Статья посвящена описанию взаимодействия электромагнитного поля с квантово-механической системой, представляющей заряженную бесспиновую частицу, двигающуюся в некотором потенциале, создаваемом другими заряженными частицами. Примером такой системы служит атом, молекула, квантовая точка, находящаяся во внешнем электромагнитном поле. Впервые получена система связанных уравнений, в которую в качестве неизвестных функций входят волновая функция заряженной частицы и компоненты электромагнитных полей. Работа будет полезна для специалистов, занимающихся решением задач взаимодействия электромагнитного поля со структурами пониженной размерности – квантовыми точками, квантовыми ямами. Полученная система уравнений может быть использована для описания взаимодействия структур пониженной размерности, находящихся в нанорезонаторе.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, уравнение Клейна–Гордона, электромагнитные потенциалы, уравнение Шрёдингера, вероятность перехода, волновая функция.

Введение

Изучение взаимодействия электромагнитного поля с веществом – важнейшая и старейшая тема как классической, так и квантовой физики. Она имеет множество ответвлений, одним из которых является взаимодействие сильного импульсного лазерного поля с атомами и молекулами. Под «сильным» здесь понимается поле, сравнимое с электрическим полем в атоме, удерживающим электроны вокруг ядра. Сильное поле может приводить к интенсивной одно- и многократной ионизации атома или молекулы. Изучая угловые и энергетические распределения этих электронов, физики рассчитывают получить информацию о структуре квантового объекта и тонких механизмах ионизации (отрыва электрона от атома). Становление теории таких процессов связывают с пионерскими работами Л.В. Келдыша [1] и его последователей. С тех пор появилось множество работ, где анализировались плюсы и минусы этой теории, исследовались границы применимости. Одно поверхностное их перечисление заняло бы половину объёма журнала, поэтому мы отметим только несколько недавних обзоров [2-12], где можно видеть пути развития данной науки. Теоретическое и математическое содержание большинства работ последних лет, однако, сместилось в сторону развития численных схем решения базовых уравнений, что связано с интенсивным ростом вычислительных возможностей современных ЭВМ. Несмотря на значительный прогресс такого подхода в понимании процессов, происходящих в квантовом объекте под действием интенсивного электрического лазерного импульса, аналитические модели остаются чрезвычайно актуальными, поскольку имеют предсказательное значение. Точное решение поставленной задачи известно для очень небольшого круга локальных потенциалов, в частности для потенциала осциллятора [4, 5]. Однако в этом поле нет состояний ионизации. Для простейшего актуального случая атома водорода уже приходится рассматривать различные приближения, математическая корректность которых не всегда ясна. В этой связи на помощь часто приходит свойство калибровочной инвариантности электромагнитного поля, которое, в свою очередь, позволяет получать различные эквивалентные формы уравнения Шрёдингера, связанные между собой унитарными преобразованиями, которые, как известно, ведут к инвариантности физических величин, задаваемых квадратичными формами волновой функции. Напомним, что уравнения Максвелла для электромагнитного поля можно записать в терминах скалярного и векторного потенциалов. Эти потенциалы вполне однозначно определяют наблюдаемые характеристики электромагнитного поля: напряжённости электрического и магнитного полей. При этом сами потенциалы определены неоднозначно. Например, два набора потенциалов дают одни и те же напряжённости электрического и магнитного полей для произвольной функции.

Формы уравнения Шрёдингера при использовании различных калибровочных преобразований электромагнитного поля и некоторые полезные следствия составляют содержание данной работы.

Строгое описание взаимодействия электромагнитного поля с носителями заряда, находящимися в периодическом поле кристаллической решётки, возможно только в рамках квантовой теории поля. Описание кинетических явлений в твёрдых телах, основанное на квантово-полевой теории, приводит к сложным уравнениям, анализ которых затруднён. Однако во многих практически важных случаях для описания явлений можно применить подход, основанный на решении одночастичных уравнений.

Трудность состоит в том, что обычно поведение носителей заряда в кристалле описывается с помощью уравнения Шрёдингера, которое не является инвариантным относительно преобразований Лоренца, а поведение электромагнитного поля описывается с помощью уравнений Максвелла, которые обладают релятивистской инвариантностью. Это приводит к тому, что трудно построить законченную теорию, которая описывает поведение носителей заряда в кристалле при наличии электромагнитного поля. Выход состоит в использовании уравнения Клейна–Гордона для описания поведения носителей заряда. В результате получаются правильные выражения для плотности тока и заряда, которые, в свою очередь, удовлетворяют закону сохранения электрического заряда. Следует отметить, что заряды и токи, входящие в уравнения Максвелла, должны удовлетворять этим требованиям.

Недостаток существующих записей уравнений, которые включают систему уравнений Максвелла и уравнение Шрёдингера (Клейна–Гордона), состоит в том, что уравнения Максвелла записаны относительно электромагнитных полей, а уравнение Шрёдингера или Клейна–Гордона в стандартной записи содержат электромагнитные потенциалы.

Другая сложность состоит в том, что полученная система уравнений не обладает свойством линейности. Это связано с тем, что выражения для плотности токов и зарядов содержат произведения волновой функции и её комплексного сопряжения.

Современное состояние проблемы изложено в работах [13, 14]. Однако в этих публикациях не приведены явные выражения для решений уравнения Клейна–Гордона в присутствии электромагнитного поля.

В данной работе предлагается запись системы уравнений, описывающей взаимодействие квантовой системы с электромагнитным полем, без указанных выше недостатков.

Рассмотрено калибровочное преобразование, приводящее к тому, что уравнение Клейна–Гордона также содержит выражения для электромагнитных полей.

Система уравнений, полученная в данной работе, линеаризуется. Линеаризация возможна в случае, когда внешнее электромагнитное поле является слабым по сравнению с кристаллическим полем. Для решения линеаризованных уравнений можно использовать методы, которые используются для решения уравнений Максвелла, например метод разделения переменных или метод разложения по базису.

1. Основные положения

1.1. Уравнения Максвелла в присутствии заряженного скалярного поля

Поведение заряженной частицы в электромагнитном поле описывается системой уравнения Максвелла и уравнения Клейна–Гордона.

Система уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

где $\mathbf{E},\mathbf{H}$ – напряжённости электрического и магнитного полей, $\mathbf{j},\rho$ – плотности токов и зарядов [15, 16]:

$$\begin{aligned}\rho = -\frac{e}{2mc^2}\Bigg(&\left(\psi\left(ih\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi^*\right) - \\ &-\left(\psi^*\left(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\psi\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{j} = -\frac{e}{2m}\Bigg(&\left(\psi\left(-ih\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi^*\right) - \\ &-\left(\psi^*\left(-ih\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{6}$$

$\mathbf{A},\phi$ – электромагнитные потенциалы, ψ – волновая функция заряженной частицы.

Уравнение Клейна–Гордона для волновой функции имеет вид [15, 16]

$$\frac{1}{c^2}\left(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2\psi = \left(-ih\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi + m^2c^2\psi. \tag{7}$$

Плотность заряда и плотность тока нельзя выбирать произвольно. Они должны быть связаны законом сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{8}$$

Уравнения $(1-8)$ полностью описывают движение заряженной частицы в электромагнитном поле. При этом частица описывается с помощью одночастичного квантово-механического уравнения, а электромагнитное поле – с помощью неквантовых уравнений Максвелла.

Электромагнитные потенциалы связаны с электромагнитными полями следующими соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \tag{9}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{10}$$

Условие калибровки следует из закона сохранения заряда и имеет следующий вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = 0. \tag{11}$$

В отличие от электрического и магнитного полей электромагнитные потенциалы определены неоднозначно. Нетрудно показать, что выражения для напряжённостей электрического и магнитного полей и условие калибровки потенциалов остаются неизменными, если сделать преобразование вида

$$\phi = \phi_1 + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \nabla\chi, \tag{13}$$

если функция χ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\nabla^2\chi=0. \qquad (14)$$

Данное преобразование называется калибровочным. С помощью калибровочного преобразования можно добиться, что потенциал электрического поля будет равен нулю. В этом случае электромагнитное поле будет описываться только одним векторным потенциалом. Пусть функция χ имеет вид

$$\chi(\mathbf{x},t)=c\int_{-\infty}^{t}\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (15)$$

Тогда

$$\phi(\mathbf{x},t)=\phi_1(\mathbf{x},t)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{t}\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \qquad (16)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t)-c\int_{-\infty}^{t}\nabla\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (17)$$

Подставляя в уравнение калибровки (11) выражения новых потенциалов через старые, получаем:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi_1(\mathbf{x},t)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{t}\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right]+\\+\mathrm{div}\left[\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t)-c\int_{-\infty}^{t}\nabla\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=0,\end{gathered} \qquad (18)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial\phi_1(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{A}_1(\mathbf{x},t)+\\+c\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{-\infty}^{t}\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)-\right.\\\left.-\mathrm{div}\left(\int_{-\infty}^{t}\nabla\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right]=0.\end{gathered} \qquad (19)$$

Потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению, и тогда остаётся доказать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{-\infty}^{t}\phi(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x},\tau)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x},\tau)}{\partial t}=\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}-\frac{\partial\phi(\mathbf{x},\infty)}{\partial t}. \qquad (21)$$

Последнее равенство выполнимо при условии, что потенциал ϕ удовлетворяет соотношениям:

$$\phi(\mathbf{x},\infty)=0,\ \frac{\partial\phi(\mathbf{x},\infty)}{\partial t}=0.$$

В случае, когда новый электрический потенциал $\phi_1=0$, калибровочное уравнение будет иметь простой вид

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}_1=0. \qquad (22)$$

Это означает, что поле в свободном пространстве поперечно. Данное преобразование можно выполнить только в области, где отсутствуют свободные заряды и токи.

Система уравнений (7)-(10), записанная в таком виде, затрудняет описание взаимодействия квантовой заряженной частицы с электромагнитным полем. Это связано с тем, что в уравнение Клейна–Гордона входят не сами поля, а электромагнитные потенциалы.

1.2. Представление электромагнитных потенциалов в виде суперпозиции плоских волн

Внешнее электромагнитное поле создаётся зарядами и токами. В этом случае уравнения для потенциалов будут неоднородными линейными дифференциальными уравнениями. Однако во многих практически значимых случаях функции, описывающие электромагнитные потенциалы, соответствующие внешним электромагнитным полям, удовлетворяют однородным волновым уравнениям. Примером таких полей могут служить гауссовы и бесселевы пучки, рассмотренные в работах [17-20].

В этом случае векторный и скалярный потенциал можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$\begin{gathered}\Pi=\begin{pmatrix}\phi\\A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}=\iiint\begin{pmatrix}\phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}\\A^{1\alpha_1\alpha_2\omega}\\A^{2\alpha_1\alpha_2\omega}\\A^{3\alpha_1\alpha_2\omega}\end{pmatrix}\times\\\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-ct\right)\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega,\end{gathered} \qquad (23)$$

где

$$\alpha_3=\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}. \qquad (24)$$

Калибровочное условие в этом случае приобретает вид

$$-\phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}+\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A^{j\alpha_1\alpha_2\omega}=0. \qquad (25)$$

Разложение (23) можно также записать в виде

$$\begin{gathered}\Pi=\iiint\left(B^{0\alpha_1\alpha_2}e_{0\alpha_1\alpha_2}+B^{1\alpha_1\alpha_2}e_{1\alpha_1\alpha_2}+\right.\\\left.+B^{2\alpha_1\alpha_2}e_{2\alpha_1\alpha_2}+B^{3\alpha_1\alpha_2}e_{3\alpha_1\alpha_2}\right)\times\\\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-ct\right)\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega.\end{gathered} \qquad (26)$$

Базисные вектора имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}e_{0\alpha_1\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_{1\alpha_1\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\-\alpha_2\\\alpha_1\\0\end{pmatrix},\\e_{2\alpha_1\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\\alpha_1\\\alpha_2\\-\dfrac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3}\end{pmatrix},\ e_{3\alpha_1\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}.\end{gathered} \qquad (27)$$

Коэффициенты в разложении (23) можно найти, если известны соответствующие коэффициенты в разложении электрического и магнитного поля, которые, в свою очередь, можно найти, если известно распределение электрического поля в некоторой плоскости. Получив выражения для потенциалов, можно решить уравнение Клейна–Гордона в присутствии электромагнитных полей.

Выразим коэффициенты разложения для электромагнитных потенциалов через значение электрического поля в некоторой плоскости. Учитывая разложение четырёхмерного потенциала электромагнитного поля по плоским волнам (23) и выражение электрического поля через потенциалы (9), получим следующую связь:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\iiint\begin{pmatrix}A^{1\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_1\phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}\\ A^{2\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_2\phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}\\ A^{3\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_3\phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}\end{pmatrix}\times \times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-ct\right)\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega. \quad (28)$$

Учитывая условие калибровки (25), получаем выражение для электрического поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\iiint\begin{pmatrix}A^{1\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_1\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A^{j\alpha_1\alpha_2\omega}\\ A^{2\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_2\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A^{j\alpha_1\alpha_2\omega}\\ A^{3\alpha_1\alpha_2\omega}-\alpha_3\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A^{j\alpha_1\alpha_2\omega}\end{pmatrix}\times \times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-ct\right)\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega. \quad (29)$$

Полученное выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\iiint\mathbf{M}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\mathbf{A}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\times \times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-i\omega t\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega. \quad (30)$$

Далее рассмотрим случай, когда функции коэффициентов представляются в виде

$$A^{j\alpha_1\alpha_2\omega}=g(\omega)B^{j\alpha_1\alpha_2}, \quad (31)$$

тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\iiint g(\omega)\mathbf{M}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\mathbf{B}^{\alpha_1\alpha_2}\times \times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j-i\omega t\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega. \quad (32)$$

Для того, чтобы найти коэффициенты $B^{j\alpha_1\alpha_2}$, рассмотрим выражение для электрического поля в плоскости $z=0$.

$$\mathbf{E}(x^1,x^2,0,t)=\iiint g(\omega)\mathbf{M}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\mathbf{B}^{\alpha_1\alpha_2}\times \times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j x^j-i\omega t\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\omega. \quad (33)$$

Обращая (33), получим следующее выражение для коэффициентов $B^{j\alpha_1\alpha_2}$:

$$\mathbf{B}^{\alpha_1\alpha_2}=\frac{\left[g(\omega)\mathbf{M}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\right]^{-1}}{\lambda^2}\iiint\mathbf{E}(x^1,x^2,0,t)\times \times\exp\left(-i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j x^j+i\omega t\right)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}t. \quad (34)$$

Таким образом, если известно распределение электрического поля в плоскости $z=0$, то можно найти распределение электромагнитных потенциалов в пространстве (в том числе области нахождения квантового объекта).

1.3. Уравнения Клейна–Гордона в электромагнитном поле

В данном разделе рассмотрим более подробно уравнение Клейна–Гордона. В символическом виде это уравнение для свободной частицы имеет вид [15, 16]:

$$\frac{1}{c^2}\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi=\mathrm{p}^2\psi+m^2c^2\psi, \quad (35)$$

где $\mathrm{p}=-ih\nabla$, m – масса частицы, c – скорость света, h – постоянная Планка, ψ – волновая функция частицы.

Отметим, что символическая запись представляет собой выражение, которое связывает энергию релятивистской частицы с её импульсом.

Чтобы получить уравнения Клейна–Гордона для частицы в электромагнитном поле, сделаем стандартную [15, 16] замену операторов

$$-ih\nabla\to-ih\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A},\quad ih\frac{\partial}{\partial t}\to ih\frac{\partial}{\partial t}-e\phi, \quad (36)$$

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал поля, ϕ – электрический потенциал поля, e – заряд частицы. Тогда выражение (35) преобразуется:

$$\frac{1}{c^2}\left(ih\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)^2\psi=\left(-ih\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi+m^2c^2\psi. \quad (37)$$

Раскрывая скобки и учитывая некоммутативность операторов, входящих в (37), получаем:

$$\frac{1}{c^2}\left(-h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-ihe\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}-2ihe\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}+(e\phi)^2\psi\right)= =-h^2\nabla^2\psi+ih\frac{e}{c}(\nabla\mathbf{A})\psi+2ih\frac{e}{c}\mathbf{A}(\nabla\psi)+ +\left(\frac{e}{c}\right)^2\mathbf{A}^2\psi+m^2c^2\psi. \quad (38)$$

Члены $-ihe\psi(1/c^2)\cdot\partial\phi/\partial t$ и $ih(e/c)(\nabla\mathbf{A})\psi$ сокращаются в соответствии с калибровочным соотношением (17), тогда

$$\frac{1}{c^2}\left(-h^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2ihe\phi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)= =-h^2\nabla^2\psi+2ih\frac{e}{c}\mathbf{A}(\nabla\psi)+\left(\frac{e}{c}\right)^2\left(\mathbf{A}^2-\phi^2\right)\psi+m^2c^2\psi. \quad (39)$$

Для широкого спектра задач квантовой механики можно использовать нерелятивистское приближение. Представим волновую функцию в виде

$$\psi\left(x,y,z,t\right)=\exp\left(\frac{-imc^2}{h}t\right)\chi\left(x,y,z,t\right). \quad (40)$$

В результате получаем окончательное выражение для уравнения (39):

$$\begin{aligned} &ih\left(1-\frac{e\phi}{mc^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi+e\phi\chi+\\ &+ih\frac{e}{mc}\mathbf{A}\left(\nabla\chi\right)+\frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}\right)^2\left(\mathbf{A}^2-\phi^2\right)\chi+\\ &+\frac{h^2}{2mc^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим калибровочное свойство этого уравнения. Для этого сделаем фазовое преобразование:

$$\chi(\mathbf{x},t)=\exp\left(i\frac{e}{hc}f(\mathbf{x},t)\right)\xi(\mathbf{x},t). \quad (42)$$

При условии, что функция $f(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет волновому уравнению, функция $\xi(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет уравнению следующего вида

$$\begin{aligned} &ih\left[1-\frac{e}{mc^2}\left(\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\xi+\\ &+\frac{ihe}{mc}\left[\mathbf{A}-\left(\nabla f\right)\right]\left(\nabla\xi\right)+e\left(\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\xi+\\ &+\frac{1}{2mc^2}\left\{e^2\left[\left(\mathbf{A}-\left(\nabla f\right)\right)^2-\left(\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right]+\right.\\ &\left.+h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Проводя анализ полученного уравнения, видим, что оно совпадает с предыдущим уравнением (41), но при этом изменились выражения для электромагнитных потенциалов, входящих в данное уравнение. Однако, как было отмечено выше, такое преобразование для электромагнитных потенциалов не приводит к изменению выражений, описывающих электрические и магнитные поля в системе.

Пренебрегая в выражении (43) последним членом в фигурных скобках (в связи с делением на c^2 его вклад в общую сумму мал), получим уравнение движения для заряженной частицы в электромагнитном поле в более простом виде:

$$ih\left(1-\frac{e\phi}{mc^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi+e\phi\chi+\frac{e}{mc}\mathbf{A}\,\mathrm{p}\,\chi. \quad (44)$$

Для носителей заряда в кристалле ϕ – электрический потенциал, $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля. Наличие в левой части уравнения дополнительного слагаемого позволяет использовать правильную калибровку для электромагнитных потенциалов.

Выражения для плотности заряда и плотности тока в этом приближении имеют вид:

$$\rho=e\left(1-\frac{e\phi}{mc^2}\right)\left|\chi\right|^2, \quad (45)$$

$$\mathbf{j}=\frac{e}{2m}\left(\left(\chi\,\mathrm{p}^*\,\chi^*\right)+\left(\chi^*\,\mathrm{p}\,\chi\right)-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\left|\chi\right|^2\right). \quad (46)$$

Представим электрический потенциал в виде $\phi=\phi_0+\phi_1$, векторный магнитный потенциал – в виде $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1$. Здесь ϕ_0 и $\mathbf{A}_0$ – потенциалы в отсутствие внешнего электромагнитного поля, ϕ_1 и $\mathbf{A}_1$ – потенциалы внешнего электромагнитного поля. На практике ϕ_0 – электрический потенциал внутри атома или внутри кристаллической решётки, обычно в первом приближении полагают, что векторный магнитный потенциал внутри атома и решётки равен нулю $\mathbf{A}_0=0$.

Далее представим решение χ в виде

$$\chi=\chi_0+\chi_1, \quad (47)$$

где χ_0 – решение уравнения (44) при отсутствии внешнего электромагнитного поля:

$$ih\frac{\partial\chi_0}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi_0+e\phi_0\chi_0, \quad (48)$$

а χ_1 – поправка к решению уравнения при наличии электромагнитного поля:

$$ih\frac{\partial\chi_1}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi_1+e\phi_0\chi_1-\frac{e}{mc}\mathbf{A}_1\,\mathrm{p}\left(\chi_1-\chi_0\right). \quad (49)$$

В этом случае выражения для плотности заряда и тока имеют вид:

$$\rho=\rho_0+\rho_1+\rho_{12}, \quad (50)$$

$$j=j_0+j_1+j_{12}+j_a, \quad (51)$$

$$\rho_0=e\left|\chi_0\right|^2,\ \rho_1=e\left|\chi_1\right|^2,\ \rho_{12}=e\left(\chi_0\chi_1^*+\chi_1\chi_0^*\right), \quad (52)$$

$$j_0=\frac{e}{2m}\left(\left(\chi_0\,\mathrm{p}^*\,\chi_0^*\right)+\left(\chi_0^*\,\mathrm{p}\,\chi_0\right)\right), \quad (53)$$

$$j_1=\frac{e}{2m}\left(\left(\chi_1\,\mathrm{p}^*\,\chi_1^*\right)+\left(\chi_1^*\,\mathrm{p}\,\chi_1\right)\right), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &j_{12}=\frac{e}{2m}\left(\left(\chi_0\,\mathrm{p}^*\,\chi_1^*\right)+\left(\chi_1\,\mathrm{p}^*\,\chi_0^*\right)+\right.\\ &\left.+\left(\chi_0^*\,\mathrm{p}\,\chi_1\right)+\left(\chi_1^*\,\mathrm{p}\,\chi_0\right)\right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$j_a=\frac{e\mathbf{A}}{2mc}\left(\rho_0+\rho_1+\rho_{12}\right). \quad (56)$$

В случае слабого внешнего электромагнитного поля уравнения для функций χ_0 и χ_1 принимают вид:

$$ih\frac{\partial\chi_0}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi_0+e\phi_0\chi_0, \quad (57)$$

$$ih\frac{\partial\chi_1}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi_1+e\phi_0\chi_1-\frac{e}{mc}\mathbf{A}_1\,\mathrm{p}\,\chi_0. \quad (58)$$

Выражения для плотности тока и плотности заряда:

$$\rho=\rho_0+\rho_{12}, \quad (59)$$

$$j=j_0+j_{12}+\frac{e\mathbf{A}}{2mc}\left(\rho_0+\rho_{12}\right). \quad (60)$$

В случае слабых полей уравнения, описывающие взаимодействия электромагнитного поля с носителями заряда, и выражения для плотности заряда и тока становятся линейными относительно искомой функции χ_1.

2. Взаимодействие внешнего электромагнитного поля с частицей, находящейся в постоянном электромагнитном поле

Рассмотрим теперь решение задачи о взаимодействии внешнего электромагнитного поля с частицей, находящейся в постоянном электромагнитном поле. В отсутствие внешнего электромагнитного поля уравнение для скалярной частицы имеет вид, соответствующий (57):

$$ih\frac{\partial\chi_0}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\chi_0+V_0\chi_0=H_0\left[\chi_0\right], \quad (61)$$

$$V_0=e\phi_0, \quad (62)$$

$$H_0=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2+e\phi_0. \quad (63)$$

Для его решения разделим переменные. Для этого представим решение в виде:

$$\chi_0\left(\mathbf{x},t\right)=\exp\left(-\frac{iE}{h}t\right)F_{nk}\left(\mathbf{x}\right)=G_{nk}\left(\mathbf{x},t\right), \quad (64)$$

где $\mathbf{x}=\left(x^1,x^2,x^3\right)$.

Функция, зависящая от пространственных координат, удовлетворяет уравнению Шрёдингера:

$$\left(-\frac{h^2}{2m}\nabla^2+e\phi_0\right)F_{nk}\left(\mathbf{x}\right)=E_{nk}F_{nk}\left(\mathbf{x}\right). \quad (65)$$

Общее решение записывается в виде

$$\chi_0\left(\mathbf{x},t\right)=\sum f^{nk}\left(t\right)F_{nk}\left(\mathbf{x}\right)=\sum g_0^{nk}G_{nk}\left(\mathbf{x},t\right). \quad (66)$$

При наличии внешнего электромагнитного поля уравнение для волновой функции, представляющей собой добавку к волновой функции невозмущённого состояния, имеет вид, соответствующий (58):

$$ih\frac{\partial\chi_1}{\partial t}=H_0\chi_1+V\chi_0, \quad (67)$$

$$V=-\frac{e}{mc}\mathbf{A}_1\,\mathrm{p}+e\phi_1. \quad (68)$$

Представим решение уравнения для функции $\chi_1(\mathbf{x},t)$ в виде разложения по функциям $G_{nk}(\mathbf{x},t)$, которые использовались для разложения решения невозмущённой задачи:

$$\chi_1\left(\mathbf{x},t\right)=\sum g_1^{nk}\left(t\right)G_{nk}\left(\mathbf{x},t\right). \quad (69)$$

Следует отметить, что в этом случае коэффициенты $g_1^{nk}(t)$ зависят от времени. Получим уравнение для этих коэффициентов. Подставив выражение для искомой функции в виде разложения по базису, получаем

$$\begin{aligned}&ih\sum\frac{\mathrm{d}g_1^{nk}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}G_{nk}\left(\mathbf{x},t\right)=\\&=V\left(\mathbf{x},t\right)\sum g_0^{lm}G_{lm}\left(\mathbf{x},t\right).\end{aligned} \quad (70)$$

Умножив скалярно на $G^{pq}\left(\mathbf{x},t\right)$, получаем систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $g_1^{pq}\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}&ih\frac{\mathrm{d}g_1^{pq}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=\\&=\sum_{l,m}g_0^{lm}\left(t\right)\left\langle G^{pq}\left(\mathbf{x},t\right)V\left(\mathbf{x},t\right)G_{lm}\left(\mathbf{x},t\right)\right\rangle.\end{aligned} \quad (71)$$

Полученное дифференциальное уравнение решается в квадратурах:

$$g_1^{pq}\left(t\right)=-\frac{i}{h}\sum_{lm}\int_{-\infty}^{t}g_0^{lm}V_{lm}^{pq}\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau. \quad (72)$$

Матричный элемент, соответствующий внешнему полю, имеет вид:

$$\begin{aligned}&V_{lm}^{nk}(t)=\exp\left(-\omega_{lm}^{nk}t\right)\iiint F^{nk}(\mathbf{x})\times\\&\times\left(-\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{p}+e\phi(\mathbf{x},t)\right)F_{lm}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned} \quad (73)$$

где $\omega_{lm}^{nk}=\frac{1}{h}\left(E_{lm}-E_{pq}\right)$.

В итоге решение возмущённого уравнения имеет вид:

$$\chi_1(\mathbf{x},t)=\sum_{n,k}\left(-\frac{i}{h}\sum_{l,m}\int_{-\infty}^{t}g_0^{lm}V_{lm}^{nk}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)G_{nk}(\mathbf{x},t). \quad (74)$$

Вычислим матричный элемент взаимодействия, обусловленного наличием векторного магнитного потенциала:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_{lm}^{nk}(t)=\iiint F^{nk}(\mathbf{x})\left(-\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{p}\right)F_{lm}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\\&=\iiint F^{nk}(\mathbf{x})\left(-\frac{e}{mc}\left[\iiint\mathbf{A}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\times\right.\right.\\&\left.\left.\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_jx^j-i\omega t\right)\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{p}\right)\times\\&\times F_{lm}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=-\frac{e}{mc}\iiint\mathbf{A}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\exp\left(-i\omega t\right)\times\\&\times\left[\iiint F^{nk}\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_jx^j\right)\times\right.\\&\left.\times\,\mathrm{p}\,F_{lm}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right]\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \quad (75)$$

Пусть квантовая система находится в точке $\mathbf{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right)$. Перепишем интеграл (75) в виде:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_{lm}^{nk}(t) = \\ &= -\frac{e}{mc}\iiint \mathbf{A}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\exp(-i\omega t)\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_0^j\right)\times \\ &\times\left[\iiint F^{nk}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x^j\right)\times\right. \\ &\left.\times \mathrm{p}\,F_{lm}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right]\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{76}$$

Так как значения модуля волновых функций резко убывают при удалении от точки $\mathbf{x}_0$, то аргумент экспоненты внутри квадратных скобок близок к нулю, а, следовательно, сама экспонента примерно равна единице. Тогда вместо (76) запишем:

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_{lm}^{nk}(t) = -\frac{e}{mc}\iiint \mathbf{A}^{\alpha_1\alpha_2\omega}\exp(-i\omega t)\times \\ &\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_0^j\right)\mathrm{p}_{lm}^{nk}\,\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{77}$$

где матричный элемент оператора импульса:

$$\left(p_q\right)_{lm}^{nk} = \iiint F^{nk}(\mathbf{x})\,p_q F_{lm}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{78}$$

Вычисление выражения (78) можно свести к вычислению матричного элемента оператора координаты. Тогда расчёты упрощаются, так как в этом случае отсутствует операция пространственного дифференцирования волновой функции. Используем соотношение

$$-\frac{im}{h}\left[H, x^q\right] = p_q\,, \tag{79}$$

которое представляет собой уравнение Гейзенберга для оператора координаты. Используя (79), получаем выражение для матричных элементов оператора импульса через матричные элементы оператора координаты:

$$\left(p_q\right)_{lm}^{nk} = -im\left(\omega_{lm}^{nk}\right)\left(x^q\right)_{lm}^{nk}, \tag{80}$$

$$\left(x^q\right)_{lm}^{nk} = \iiint F^{nk}(\mathbf{x})\,x^q F_{lm}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{81}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\left(v_q\right)_{lm}^{nk}(t) = \\ &= \frac{ie}{c}\left(\omega_{lm}^{nk}\right)\left(x^q\right)_{lm}^{nk}\iiint A^{q\alpha_1\alpha_2\omega}\exp(-i\omega t)\times \\ &\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_0^j\right)\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{82}$$

Матричный элемент взаимодействия, обусловленный наличием скалярного потенциала:

$$\begin{aligned}&v_{lm}^{nk}(t) = e\iiint \phi^{\alpha_1\alpha_2\omega}\exp(-i\omega t)\times \\ &\times\exp\left(i\frac{\omega}{c}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_0^j\right)U_{lm}^{nk}(t)\,\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{83}$$

где

$$U_{lm}^{nk}(t) = \iiint F^{nk}(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x},t)\,F_{lm}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{84}$$

Заключение

В работе получено приближённое решение системы уравнений, которая представляет собой систему уравнений Максвелла и уравнения Клейна–Гордона. Приведённые результаты являются фундаментальными для работ, посвящённых взаимодействию электромагнитного поля со структурами пониженной размерности. Особенностью приведённых формул является то, что они приведены в системе СГС, которая часто используется в электродинамике, а не в планковской системе единиц (h=c=1), которую обычно используют в своих работах физики-теоретики и специалисты по теории поля. Это позволяет, в свою очередь, использовать полученные формулы для решения практических задач в единицах, понятных для специалистов в других областях физики.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 11-07-12036,11-07-00153, 10-07-00553, 10-07-00109, гранта Президента РФ № НШ-4128,2012,3 и ФЦП «Кадры» (соглашения №№ 8027, 8231).

Литература

1. **Келдыш, Л.В.** Ионизация в поле сильной электромагнитной волны / Л.В. Келдыш // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 47, Вып. 5. – С. 1945-1957.
2. **Делоне, Н.Б.** Туннельная и надбарьерная ионизация атомов и ионов в поле лазерного излучения / Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов // УФН. – 1998. – Т. 168, Вып. 5. – С. 531-549.
3. **Попов, В.С.** Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) / В.С. Попов // УФН. – 2004. – Т. 174, Вып. 9. – С. 921-951.
4. **Danko, B.S.** Harmonic oscillator with the radiation reaction interaction / Bosonac S. Danko // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 51, N 5. – P. 3485-3494.
5. **Efthimiou, C.J.** Separation of variables and exactly soluble time-dependent potentials in quantum mechanics / C.J. Efthimiou, D. Spector // Phys. Rev. A. – 1994. – Vol. 49, N 4. – P. 2301-2311.
6. **Gavrila, M.** Atomic stabilization in superintense laser fields / M. Gavrila // J. Phys. B. – 2002. – Vol. 35, N 18. – P. R147-R193.
7. **Henneberger, W.C.** Perturbation method for atoms in intense light beams / W.C. Henneberger // Phys. Rev. Lett. – 1968. – Vol. 21, N 12. – P. 838-841.
8. **Lambropoulos, P.** Two-electron atoms in strong fields / P. Lambropoulos, P. Maragakis, J. Zhang // Phys. Rep. – 1998. – Vol. 305, N 5. – P. 203-293.
9. **Magnus, W.** On the exponential solution of differential equations for a linear operator / W. Magnus // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – Vol. 7. – P. 649-673.
10. **Popov, A.M.** Strong-field atomic stabilization: numerical simulation and analytical modelling / A.M. Popov, O.V. Tikhonova, E.A. Volkova // J. Phys. B. – 2003. – Vol. 36, N 10. – P. R125-R165.
11. **Scrinzi, A.** Attosecond physics / A. Scrinzi, M.Yu. Ivanov, R. Kienberger, D.M. Villeneuve // J. Phys. B. – 2006. – Vol. 39, N 1. – P. R1-R37.

12. **Wolkow, D.M.** Ubereine Klasse von Losungen der Diracschen Gleichung / D.M. Wolkow // Z. Phys. – 1935. – Vol. 94, N 3-4. – P. 250-260.
13. **Kouzaev, G.A.** Hertz vectors and the electromagnetic-quantum equations // Mod. Phys. Lett. B. – 2010. – Vol. 24(20). – P. 2117-2129.
14. **Tretyakov, O.A.** Derivation of Klein-Gordon equation from Maxwell's equations and study of relativistic time-domain waveguide modes / O.A. Tretyakov and O. Akgun // Progress In Electromagnetics Research. – 2010. - Vol. 105. – P. 171-191
15. **Боголюбов, Н.Н.** Квантовые поля / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
16. **Райдер, Л.** Квантовая теория поля / Л. Райдер. – Волгоград: Платон, 1998. – 512 с.
17. **Kotlyar, V.V.** Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1995. – Vol. 42(6). – P. 1231-1239
18. **Хонина, С.Н.** Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса-Лагерра / С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер // Оптика и спектроскопия. – 1998. – Т. 85 (4). – С. 695-703.
19. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
20. Дифракционная нанофотоника / под ред. В.А. Сойфера. М.: Физматлит, 2011. – 680 с.

References

1. **Keldysh, L.V.** Ionization in the field of a strong electromagnetic wave / L. Keldysh / / Zh. – 1964. – T. 47, no. 5. – P. 1945-1957. – (In Russian).
2. **Delone, N.B.** Tunneling and barrier-suppression ionization of atoms and ions in a laser field / N.B. Delone, V.P. Krainov // UFN. – 1998. – T. 168, no. 5. – P. 531-549. - (In Russian).
3. **Popov, V.S.** Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (Keldysh theory) / V.S. Popov // UFN. – 2004. – T. 174, no. 9. – P. 921-951. – (In Russian).
4. **Danko, B.S.** Harmonic oscillator with the radiation reaction interaction / Bosonac S. Danko // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 51, N 5. – P. 3485-3494.
5. **Efthimiou, C.J.** Separation of variables and exactly soluble time-dependent potentials in quantum mechanics / C.J. Efthimiou, D. Spector // Phys. Rev. A. – 1994. – Vol. 49, N 4. – P. 2301-2311.
6. Gavrila, M. Atomic stabilization in superintense laser fields / M. Gavrila // J. Phys. B. – 2002. – Vol. 35, N 18. – P. R147-R193.
7. **Henneberger, W.C**. Perturbation method for atoms in intense light beams / W.C. Henneberger // Phys. Rev. Lett. – 1968. – Vol. 21, N 12. – P. 838-841.
8. **Lambropoulos, P.** Two-electron atoms in strong fields / P. Lambropoulos, P. Maragakis, J. Zhang // Phys. Rep. – 1998. – Vol. 305, N 5. – P. 203-293.
9. **Magnus, W.** On the exponential solution of differential equations for a linear operator / W. Magnus // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – Vol. 7. – P. 649-673.
10. **Popov, A.M.** Strong-field atomic stabilization: numerical simulation and analytical modelling / A.M. Popov, O.V. Tikhonova, E.A. Volkova // J. Phys. B. – 2003. – Vol. 36, N 10. – P. R125-R165.
11. **Scrinzi, A.** Attosecond physics / A. Scrinzi, M.Yu. Ivanov, R. Kienberger, D.M. Villeneuve // J. Phys. B. – 2006. – Vol. 39, N 1. – P. R1-R37.
12. **Wolkow, D.M.** Ubereine Klasse von Losungen der Diracschen Gleichung / D.M. Wolkow // Z. Phys. – 1935. – Vol. 94, N 3-4. – P. 250-260.
13. **Kouzaev, G.A.** Hertz vectors and the electromagnetic-quantum equations // Mod. Phys. Lett. B. – 2010. – Vol. 24(20) . – P. 2117-2129
14. **Tretyakov, O.A.** Derivation of Klein-Gordon equation from Maxwell's equations and study of relativistic time-domain waveguide modes / O.A. Tretyakov and O. Akgun // Progress In Electromagnetics Research. – 2010. – Vol. 105. – P. 171-191.
15. **Bogolyubov, N.N**. Quantum Fields / N.N. Bogolyubov, D.V. Shirkov. – Moscow: Science Publisher, – 1980. – 319 p.
16. **Ryder, L.** Quantum Field Theory/ L.Ryder. – Wolgograd: Plato Publisher, – 1998. – 512 p.
17. **Kotlyar, V.V.** Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1995. – Vol. 42(6). – P. 1231-1239.
18. **Khonina, S.N.** Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer // Optics and Spectroscopy. – 1998. – V. 85(4). – P. 636-644.
19. Diffraction computer optics / ed. V.A. Soifer. – Moscow: Francis, London, 2007. – 736 p.
20. Diffractive nanophotonics / ed. VA Soifer. – Moscow: Francis, London, 2011. – 680 p.

JOINT SOLUTION OF THE KLEIN–GORDON AND MAXWELL'S EQUATIONS

N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina
Image Processing Systems Institute of the RAS,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

The article describes the interaction of electromagnetic fields with the quantum-dynamical system, which represents a charged spinless particle moving in some potential created by other charged particles. An example of such a system is an atom, molecule, quantum dot in an external electromagnetic field. For the first time, a system of coupled equations in which the unknown functions are the wave function of a charged particle and the components of electromagnetic fields. The paper will be useful for specialists engaged in the solution of problems of interaction of electromagnetic fields with low-dimensional structures - quantum dots and quantum wells. The resulting system of equations can be used to describe the interaction of low-dimensional structures in a nanoresonator.

Key words: Maxwell's equations, the Klein-Gordon equation, electromagnetic potentials, the Schrödinger equation, the probability of the transition, the wave function.

Сведения об авторах

*Сведения об авторах **Казанский Николай Львович и Хонина Светлана Николаевна** –*
см. стр. 478 этого номера.

Харитонов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Учреждения Российской академии наук Института систем обработки изображений РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: *prognoz2007@gmail.com* .

Sergey Ivanovich Kharitonov, Senior Researcher of Laboratory of Diffractive Optics of Image Processing Systems Institute of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from the Physics Department of the Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser" 2010 г. – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements" Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers SI Kharitonov's 87 articles, 5 patents.

Поступила в редакцию 19 сентября 2012 г.