

СОВМЕСТНОЕ РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДАЛАМБЕРА И МАКСВЕЛЛА. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Головашкин Д.Л.¹, Яблокова Л.В.²

¹ Институт систем обработки изображений РАН,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Предложена методика отыскания совместного разностного решения волнового уравнения и системы уравнений Максвелла, позволяющая совместить достоинства и избежать недостатков обоих упомянутых численных методов нанофотоники. В одномерном случае на тестовых примерах продемонстрированы сходимость такого решения, возможность наложения PML-слоёв и задания падающей волны по технологии TF/SF.

Ключевые слова: уравнение Даламбера, уравнения Максвелла, разностная схема, PML-слой, методика TF/SF.

Введение

Разностный метод решения уравнений Максвелла (FDTD) на настоящий момент является наиболее популярным инструментом математического моделирования в нанофотонике и нанооптике, о чём свидетельствует многочисленность реализаций метода, адаптированных к решению широкого класса задач на различных вычислительных архитектурах. Вместе с тем высокие требования к системным ресурсам (в частности, к объёму оперативной памяти) сдерживают применение метода в случаях, когда аппаратная база (например, бюджетные видеопроцессоры) характеризуется высоким быстродействием, но весьма ограниченным объёмом ОЗУ.

Указанный недостаток принято преодолевать учётом природы электромагнитного излучения (введением подвижных сеточных областей [1]), особенностей строения элементов нанофотоники (декомпозицией сеточной области [2]), разработкой новых приёмов программирования (метод пирамид [3]) или обращением к разностному решению волнового уравнения [4]. Комбинированию последнего подхода с FDTD-методом и посвящена предлагаемая работа.

По сравнению с разностным решением уравнений Максвелла, аналогичное решение уравнения Даламбера позволяет в двумерном случае на треть сократить объём выделяемой оперативной памяти (сохраняются два временных сечения электрического поля вместо трёх проекций электромагнитного) и на 10% снизить число арифметических операций (10 при вычислении поля в одном узле сеточной области вместо 11 при вычислении трёх сеточных функций в ячейке Yee). Впрочем, при рассмотрении трёхмерной задачи метод FDTD становится более предпочтительным, что ограничивает область применения развиваемого подхода двумерным случаем.

Разностное решение задачи дифракции, как правило, сопровождается заданием поглощающей под-области (моделирующей свободное пространство) у границ оптического элемента, формированием падающей волны с определёнными амплитудно-частотными характеристиками, учётом дисперсии материала элемента, особенностей его строения и

т. п. Многие эффективные приёмы решения перечисленных задач были найдены лишь к концу прошлого века, когда в силу растущей популярности FDTD-метода разностное решение волнового уравнения уже не находилось в фокусе внимания исследователей.

Перенесение современных методик, разработанных для решения уравнений Максвелла, на разностное решение волнового уравнения не всегда приводит к упрощению задачи. Так, в работе [5] авторы обращаются к заданию более сложного «прозрачного» источника вместо хорошо зарекомендовавшей себя технологии разделения полей TF/SF в силу не-работоспособности последней при решении уравнения Даламбера.

Поэтому представляется целесообразным совместное разностное решение уравнений Даламбера и Максвелла, где первое привлекается для снижения требований к системным ресурсам, а участие второго позволяет использовать без модификации современные эффективные методики. В настоящей статье это методики задания поглощающих слоёв (PML) и формирования падающей волны (TF/SF), рассмотренные на примере одномерного случая с целью верификации работоспособности заявленного подхода.

1. Согласование разностных решений уравнений Даламбера и Максвелла на границе сеточных подобластей

Для одномерных уравнений Максвелла

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (1)$$

запишем разностную схему Yee [6]

$$\mu_0 \frac{H_{y_{k+0.5}}^{n+0.5} - H_{y_{k+0.5}}^{n-0.5}}{h_t} = -\frac{E_{x_{k+1}}^n - E_{x_k}^n}{h_z}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_0 \frac{E_{x_k}^{n+1} - E_{x_k}^n}{h_t} = -\frac{H_{y_{k+0.5}}^{n+0.5} - H_{y_{k-0.5}}^{n+0.5}}{h_z},$$

где сеточная проекция электрического поля на ось X – $E_{x_k}^n$ определена в узлах

$$\{(t_n, z_k): t_n = nh_t, n=0, 1, \dots, N=T/h_t, z_k = L^W + kh_z, k=0, \dots, K=L^M/h_z\},$$

а сеточная проекция магнитного поля на ось $Y - H_{y_{k+0,5}}^{n+0,5}$ в узлах

$$\{(t_{n+0,5}, z_{k+0,5}): t_{n+0,5} = (n+0,5)h_t, n = 0, 1, \dots, N-1, z_{k+0,5} = L^W + (k+0,5)h_z, k = 0, \dots, K-1\}$$

сеточной области D_h^M , наложенной (рис. 1) на область вычислительного эксперимента D^M ($0 < t \leq T, L^W \leq z \leq L^W + L^M$), для простоты заданной в свободном пространстве.

Аналогично для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

запишем разностную схему [7]

$$\frac{E_{x_m}^{n+1} - 2E_{x_m}^n + E_{x_m}^{n-1}}{h_t^2} = c^2 \frac{E_{x_{m+1}}^n - 2E_{x_m}^n + E_{x_{m-1}}^n}{h_z^2}, \quad (4)$$

где функция $E_{x_m}^n$ определена в узлах

$$\{(t_n, z_m): t_n = nh_t, n = 0, 1, \dots, N = T/h_t, z_m = mh_z, m = 0, \dots, M = L^W/h_z\}$$

сеточной области D_h^M , наложенной (рис. 1) на D^W ($0 < t \leq T, 0 \leq z \leq L^W$).

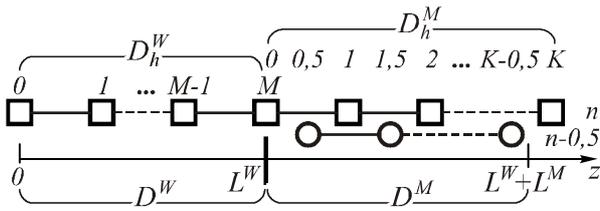


Рис. 1. Объединение сеточных областей.

Квадратами изображены узлы для проекции электрического поля, окружностями – для магнитного

Задавшись целью совместного отыскания разностного решения уравнений (1) и (3), согласуем вычисления на D^W и D^M , полагая значения $E_{x_m}^n$, определённые на D_h^W при $m = M$ (крайний правый узел), и $E_{x_0}^n$, определённые на D_h^M при $k = 0$ (крайний левый узел), равными (рис. 1). На границах объединённой области $D = D^W \cup D^M$ установим электрическую стенку. За начальное условие примем отсутствие поля в момент времени $t = 0$.

Алгоритм перехода на следующий временной слой при реализации совместного решения состоит в определении сеточных функций в узлах D_h^W и D_h^M в соответствии с табл. 1, где (5) имеет вид:

$$\frac{E_{x_M}^{n+1} - 2E_{x_M}^n + E_{x_M}^{n-1}}{h_t^2} = c^2 \frac{E_{x_1}^n - 2E_{x_M}^n + E_{x_{M-1}}^n}{h_z^2}. \quad (5)$$

В (5) $E_{x_1}^n$ определено на области D^M , $E_{x_{M-1}}^n$ – на D^W , остальные значения относятся к обеим областям.

Для подтверждения правомерности предложенного подхода к совместному решению на одной вычислительной области уравнений Максвелла и вол-

нового авторы провели четыре серии вычислительных экспериментов. При этом использовались операционная система Windows XP Professional SP3, вычислительный комплекс Octave 2.9.15 и процессор AMD Opteron 246.

Таблица 1. Расчёт совместного решения (1) и (3) на временном слое $n+1$

Узлы сеточных областей	Подобласти вычислительных областей	Решаемые уравнения
$m = 0$	$z = 0,$ левая граница D и D^W	$E_{x_0}^{n+1} = 0$
$0 < m < M-1$	$0 < z < L^W,$ D^W без границ	(4)
$m = M$ и $k = 0$	$z = L^W,$ общая граница D^W и D^M	(5)
$0 < k < K$	$L^W < z < L^W + L^M,$ D^M без границ	(2)
$k = K$	$z = L^W + L^M,$ правая граница D и D^M	$E_{x_K}^{n+1} = 0$

Эксперименты проводились при различных значениях дискретизации сеточной области Q, Qt и QT , где первый параметр характеризовал число узлов сеточной области по пространству (приходящееся на одну длину волны); второй – количество узлов по времени (приходящееся на временной интервал, за который плоский волновой фронт в вакууме пройдёт расстояние в одну длину волны); третий – «длительность» запускаемого цуга в длинах волн. При этом они менялись от (10, 20, 5) – минимальных значений, удовлетворительно описывающих распространение плоской однородной волны в свободном пространстве, до (100, 200, 15) – соответствующих весьма низким величинам погрешности. Протяжённость области D составляла 20λ , что позволяло не учитывать влияние отражённой от границ волны в области регистрации.

Первая серия вычислительных экспериментов связана с разностным решением уравнений Максвелла ($L^W = 0, D = D^M$) и имела своей целью получить значения погрешностей, относящихся исключительно к замене производных разностными отношениями. Далее указанные погрешности использовались для сравнения с результатами остальных экспериментов как величины, значительное отклонение от которых нежелательно и свидетельствует о несостоятельности выбранной в настоящей работе стратегии.

Излучение вводилось в область посредством «жёсткого» источника [7], расположенного в центре. Равномерная погрешность $\varepsilon = \max_k |1 - |A_k|| \times 100\%$ характеризовала максимальное отклонение от аналитического решения (модуль комплексной амплитуды распространяющейся в свободном простран-

ве плоской однородной монохроматической волны равен 1) на отрезке $[10,5\lambda, 11,5\lambda]$.

Таблица 2. Погрешности ϵ первой и второй серий экспериментов

Q, Qt	QT		
	5	10	15
10, 20	0,7268	0,2434	0,1275
20, 40	0,2217	0,1080	0,0371
50, 100	0,0716	0,0234	0,0113
100, 200	0,0234	0,0083	0,0046

Оценивая результаты из табл. 2, можно говорить о сходимости разностного решения к аналитическому – со сгущением сеточной области погрешность уменьшается. Увеличение QT также приводит к снижению погрешности в связи с удалением от области регистрации начального участка волны, не являющегося монохроматическим.

Во второй серии решалось волновое уравнение при $L^M=0$ и $D=D^W$. Дискретизация сеточной области для электрической компоненты поля, расположение и тип источника, размеры вычислительной области и области регистрации погрешности совпадали с предыдущим случаем.

Погрешности всех вычислительных экспериментов второй серии в точности совпали с результатами, представленными в табл. 2, что неудивительно. Известна процедура получения волнового уравнения из уравнений Максвелла [8].

Третья серия относится к совместному решению уравнений (1) и (3). Совокупная протяжённость объединённых вычислительных областей D^W и D^M составила 20λ (по 10λ на каждую). Источник располагался в области решения волнового уравнения на расстоянии половины длины волны от границы раздела (рис. 2а), область регистрации $[10\lambda, 11\lambda]$ помещалась в D^M . Таким образом, расстояние от источника до этой области не менялось по сравнению с предыдущими экспериментами.

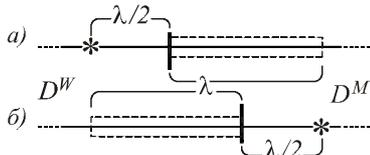


Рис. 2. Вычислительные области третьей (а) и четвёртой (б) серий экспериментов. Звёздочкой обозначен «жесткий» источник, в обведённом пунктиром области регистрируется погрешность

Любопытно, что если разностные решения уравнений Максвелла и Даламбера, полученные по отдельности на одной вычислительной области, совпали, то их согласованное совместное решение на половинках той же области (табл. 3) уже отличается от предыдущих результатов (табл. 2).

Причиной тому является различие в дифференциальных шаблонах схем (2) и (4), несущественное при раздельном решении (оба шаблона центральные

и характеризуются одинаковыми порядками аппроксимации) и важное при совместном (в них участвуют разные сеточные функции).

Таблица 3. Погрешности ϵ третьей серии экспериментов

Q, Qt	QT		
	5	10	15
10, 20	0,5533	0,1907	0,0926
20, 40	0,3531	0,0562	0,0313
50, 100	0,0687	0,0217	0,0112
100, 200	0,0235	0,0081	0,0047

Для определения значения напряжённости электрического поля $E_{x_M}^{n+1}$ на стыке D_h^W и D_h^M по (5) используется центральная по пространству разность, в которую входят: общее значение $E_{x_M}^n$, $E_{x_{M-1}}^n$ из D_h^W и $E_{x_1}^n$ из D_h^M . При этом $E_{x_{M-1}}^n$ определяется из (4) по тому же шаблону, а $E_{x_1}^n$ – уже через сеточные значения магнитного поля (2), взятые на другом расстоянии от узла $k=1$ (хотя шаблон при этом тоже центральный).

Заметим, что совместное разностное решение сходится; отличается от раздельного незначительно и со сгущением сетки такое различие нивелируется (до одной десятитысячной процента), что подтверждает работоспособность выбранного подхода.

При расположении источника в области D^M на расстоянии половины длины волны от границы раздела (четвёртая серия экспериментов, рис. 2б), а области регистрации $[9\lambda, 10\lambda]$ в D^W результаты отличаются от представленных в таблицах 2 и 3 весьма незначительно – тоже на одну десятитысячную процента для густой сеточной области.

2. Наложение поглощающего слоя при совместном решении

Важной задачей при моделировании дифракции электромагнитного излучения разностным методом является помещение поглощающих слоёв (PML-perfectly matched layer [9]) у границ вычислительной области для исключения отражения от последних. По замыслу авторов настоящей работы, рассмотренные задачи дифракции на оптическом элементе уместно связывать с решением волнового уравнения в области непосредственного нахождения этого элемента, а организацию поглощения у границ вычислительной области (вне элемента) – с решением уравнений Максвелла, моделирующим PML – слой. При этом сокращаются требования к системным ресурсам ЭВМ по сравнению с FDTD-методом (в двумерном случае) и используется современная методика наложения PML-слоя вместо устаревшего подхода Мура [10], традиционно сопровождающего решение волнового уравнения.

Представляя уравнения Максвелла в поглощающем слое вместо (1) записывают:

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

где второе слагаемое в левой части определяет поверхностную плотность электрического и магнитного (воображаемого) токов. Следующее соотношение электрической и магнитной проводимостей $\sigma/\epsilon_0 = \sigma^*/\mu_0$ и плавное возрастание значения σ от начала слоя к концу (при правильно подобранных параметрах) обеспечивает поглощение излучения без отражения [9].

Простейшая разностная аппроксимация уравнений Максвелла в поглощающем слое имеет вид:

$$\mu_0 \frac{H_{y_{k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{k+0,5}}^{m-0,5}}{h_t} + \sigma_{k+0,5}^* H_{y_{k+0,5}}^{m-0,5} = -\frac{E_{x_{k+1}}^m - E_{x_k}^m}{h_z},$$

$$\epsilon_0 \frac{E_{x_k}^{m+1} - E_{x_k}^m}{h_t} + \sigma_k E_{x_k}^m = -\frac{H_{y_{k+0,5}}^{m+0,5} - H_{y_{k-0,5}}^{m+0,5}}{h_z},$$

в котором сеточные функции проводимостей (электрическая и магнитная) определены в тех же узлах D_h^M , что и соответствующие напряжённости.

При постановке вычислительных экспериментов расположим поглощающий слой длины λ у правого края D .

Тогда σ задаётся на отрезке $[L^W + L^M - \lambda, L^W + L^M]$ по формуле:

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{z + \lambda - L^W - L^M}{\lambda} \right)^q,$$

где σ_{\max} и q зависят от дискретизации сеточной области согласно табл. 4 из [11].

Верифицируя предположение о возможности совместного решения волнового уравнения и системы уравнений Максвелла с поглощающим слоем, сначала (для получения эталонного решения) рассмотрим случай $D = D^M$ (пятая серия экспериментов, рис. 3а); $L^W = 0, L^M = 12\lambda$. Для исследования отражённой волны зададим «прозрачный» источник [2] (в точке $z = 9,5\lambda$) и будем регистрировать в подобласти $[10\lambda, 11\lambda]$ величину $\delta = \max_k |A_k^{omp}|$ (A_k^{omp} – комплексная амплитуда отражённой волны), являющуюся абсолютной погрешностью вычислительного эксперимента (отражённой от PML-слоя волны в идеальном случае быть не должно).

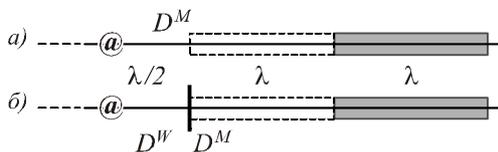


Рис. 3. Вычислительные области пятой (а) и шестой (б) серий экспериментов. Символом «@» обозначен «прозрачный» источник, в обведённой пунктиром области регистрируется погрешность, в закрашенной расположен поглощающий слой

Отметим удовлетворительное функционирование поглощающего слоя; даже на самой грубой сеточной области ($Q = 10, Qt = 20$) при работе с не вполне монохроматической волной ($QT = 5$) модуль комплексной амплитуды отражённого поля составил треть

процента от модуля амплитуды (теоретического) падающей волны (табл. 4).

Таблица 4. Погрешности $\delta * 100$ пятой серии вычислительных экспериментов

Q, Qt	QT		
	5	10	15
10, 20	0,3546	0,1032	0,1463
20, 40	0,1713	0,1238	0,1261
50, 100	0,1127	0,1068	0,1068
100, 200	0,0129	0,0115	0,0115

На более густых областях увеличение длины цуга не приводит к повышению точности в силу преобладания величины погрешности δ , связанной с наличием PML-слоя, над ϵ , определяющейся заменой производных разностными отношениями.

При отыскании совместного разностного решения (1) и (3) (шестая серия экспериментов) примем $L^W = 10\lambda, L^M = 2\lambda$, расположенный в том же месте вычислительной области «прозрачный» источник теперь находится в D^W (рис. 3б).

Таблица 5. Погрешности $\delta * 100$ шестой серии вычислительных экспериментов

Q, Qt	QT		
	5	10	15
10, 20	0,1287	0,1312	0,1483
20, 40	0,1645	0,1232	0,1322
50, 100	0,1136	0,1068	0,1068
100, 200	0,0127	0,0115	0,0115

Сравнивая результаты вычислительных экспериментов (табл. 5) с данными пятой серии (табл. 4), отметим их совпадение в диапазоне $Q = 50, Qt = 100, QT = 10 - Q = 100, Qt = 200, QT = 15$ и незначительность отличий при остальных параметрах, что свидетельствует о возможности совместного разностного решения уравнений Даламбера и Максвелла в случае, когда последние используются для моделирования поглощающего слоя.

3. Задание падающей волны по технологии TF/SF при совместном решении

Формирование падающей волны через задание «прозрачного» источника (как это было сделано в предыдущем параграфе) не всегда удобно. Излучение от такого источника распространяется не только в желаемом исследователю направлении, но и в противоположном (этим, например, характеризуется пакет МЕР [12], реализующий FDTD-метод). Кроме того, поглощению у границ области в этом случае подлежит результирующее поле, состоящее из падающего и рассеянного. Всё это зачастую приводит к увеличению погрешности вычислительного эксперимента.

Задание падающей волны по классической технологии TF/SF (total field/scattered field [13]) в рамках FDTD-метода позволяет избежать распространения в противоположном направлении и появления падаю-

шего поля в области расположения PML-слоёв (там окажется только рассеянная волна).

Основой технологии является разделение полей при решении (1) на результирующее (в подобласти $k_L \leq k \leq k_R$ области D^M) и рассеянное ($k < k_L$ и $k > k_R$), при котором в соответствующих узлах вместо (2) записываются разностные уравнения

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{H_{y_{k_L-0,5}}^{n+0,5} - H_{y_{k_L-0,5}}^{n-0,5}}{h_t} &= \frac{(E_{y_{k_L}}^n - \tilde{E}_{y_{k_L}}^n) - E_{y_{k_L-1}}^n}{h_x}; \\ \varepsilon_0 \frac{E_{x_{k_L}}^{n+1} - E_{x_{k_L}}^n}{h_t} &= \frac{H_{y_{k_L+0,5}}^{n+0,5} - (H_{y_{k_L-0,5}}^{n+0,5} + \tilde{H}_{y_{k_L-0,5}}^{n+0,5})}{h_x}; \\ \mu_0 \frac{H_{y_{k_R+0,5}}^{n+0,5} - H_{y_{k_R+0,5}}^{n-0,5}}{h_t} &= \frac{E_{x_{k_R+1}}^n - (E_{x_{k_R}}^n - \tilde{E}_{x_{k_R}}^n)}{h_x}; \\ \varepsilon_0 \frac{E_{x_{k_R}}^{n+1} - E_{x_{k_R}}^n}{h_t} &= \frac{(H_{y_{k_R+0,5}}^{n+0,5} + \tilde{H}_{y_{k_R+0,5}}^{n+0,5}) - H_{y_{k_R-0,5}}^{n+0,5}}{h_x}, \end{aligned} \quad (6)$$

где сеточные функции под тильдой соответствуют аналитически [13] или численно [14] заданному падающему полю.

В работе [10] высказывается предположение о возможности использования приведённой методики при решении волнового уравнения. Однако авторам настоящей статьи не известно ни одной успешной реализации (включая собственную попытку [5]) этого замысла. Выходом из сложившейся ситуации может стать совместное решение уравнений Даламбера и Максвелла, при котором область D^W содержит исключительно общее поле, а к D^M относится граница раздела общего и рассеянного полей.

Предваряя экспериментальную проверку этого утверждения, проведём серию вычислительных экспериментов (седьмую) для определения погрешностей FDTD-метода при задании падающей волны по методике TF/SF. Примем для этого $L^W=0$, $L^M=20\lambda$, $D=D^M$, задав результирующее поле на отрезке $[9\lambda, 11\lambda]$ (рис. 4а).

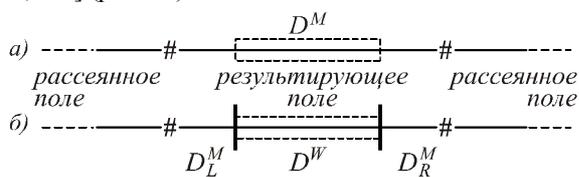


Рис. 4. Вычислительные области седьмой (а) и восьмой (б) серий экспериментов. Символом «#» обозначена граница раздела результирующего и рассеянного полей, в обведённой пунктиром области регистрируется погрешность

Регистрация погрешности ε производится на отрезке $[9,5\lambda, 10,5\lambda]$ в центре D . Поглощающие слои у границ области не используются. При численном задании падающей волны в (6) результаты совпадают с представленными в табл. 2, для аналитического способа задания – приведены в табл. 6.

Таблица 6. Погрешности ε седьмой серии экспериментов при аналитическом задании падающей волны

Q, Qt	QT		
	5	10	15
10, 20	4,0678	3,1662	2,2889
20, 40	1,2341	0,733	0,7927
50, 100	0,4902	0,2658	0,1752
100, 200	0,126	0,0899	0,0793

Существенное отличие (на порядок) результатов из обеих таблиц традиционно объясняется [14, 15] взаимной компенсацией погрешностей двух разностных решений (основного и вспомогательного) задачи (1), используемых в рамках численной методики TF/SF. При аналитическом задании волны в (6) такой компенсации не происходит.

Совместное решение (1) и (3) (восьмая серия экспериментов) сопроводим разбиением D^M на две подобласти $D^M = D_L^M \cup D_R^M$, где D_L^M определена на отрезке $[0, L^M]$, D_R^M – на $[L^M + L^W, 2L^M + L^W]$, а D^W длиной L^W поместим между ними (рис. 4б). Примем при этом $L^M=9,5\lambda$, $L^W=\lambda$ и будем формировать значение ε на том же отрезке, что и ранее. Теперь он совпадает с D^W , а левая и правая границы результирующего поля по-прежнему принадлежат D^M : левая находится в D_L^M , правая – в D_R^M . Таким образом, в рамках одного подхода реализуется технология TF/SF через (2), (6) и возможность исследования дифракции на оптическом элементе (его можно поместить в D^W) посредством решения (4).

Отметим отличие результатов, связанных с аналитическим и численным заданием падающей волны (табл. 7), присущее также предыдущей серии экспериментов и вызванное, очевидно, той же причиной.

Таблица 7. Погрешности ε восьмой серии экспериментов

Q, Qt	Задание падающей волны в (6)		
	Аналитическое		
	QT		
	5	10	15
10, 20	3,2787	2,1234	2,0421
20, 40	1,7547	1,0815	0,5867
50, 100	0,4257	0,2717	0,1958
100, 200	0,1527	0,0949	0,0709
Q, Qt	Численное		
	QT		
	5	10	15
10, 20	0,6168	0,3302	0,1740
20, 40	0,3476	0,0662	0,0537
50, 100	0,0668	0,0189	0,0112
100, 200	0,024	0,0081	0,0046

При аналитическом задании падающей волны разница между погрешностями результатов седьмой и восьмой серий экспериментов на густой сеточной области составляет несколько тысячных процента

(табл. 6, 7), при численном – несколько десятитысячных (табл. 2, 7). Очевидно, большая разница в первом случае обусловлена неудачной (аналитической) методикой задания падающей волны, которая сама по себе характеризуется значительной погрешностью. Наличие упомянутой разницы (впрочем, весьма не существенной, что свидетельствует о правомерности совместного решения) объясняется причиной, выявленной при анализе третьей серии экспериментов.

Заключение

В настоящей работе продемонстрирована возможность совместного разностного решения уравнений Даламбера и Максвелла, при котором на область вычислительного эксперимента налагаются различные сеточные подобласти. Указанное разностное решение обеспечивается согласованием значений сеточных функций на границе таких подобластей. На примерах распространения плоской однородной волны в свободном пространстве, поглощения такой волны PML-слоем и разделения результирующего и рассеянного полей по методике TF/SF показана правомерность заявленного подхода в одномерном случае.

Дальнейшим развитием работы представляется запись разностных схем совместного решения в двумерном случае и исследование их сходимости.

Благодарности

Исследования выполнены при поддержке грантов Президента РФ МД-6809.2012.9, НШ-4128.2012.9 и грантов РФФИ №11-07-13164-офи-м-2011-РЖД, № 10-07-00553.

Литература

1. **Fidel, B.** Hybrid ray-FDTD moving window approach to pulse propagation / B. Fidel, E. Heyman, R. Kastner and R.W. Ziolkowski // Journal of Computational Physics. – 1997. – Vol. 138, Issue 2. – P. 480-500.
2. **Головашкин, Д.Л.** Декомпозиция сеточной области при разностном решении уравнений Максвелла / Д.Л. Головашкин, Н.Л. Казанский // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 2. – С. 48-58.
3. **Головашкин, Д.Л.** Решение сеточных уравнений на графических вычислительных устройствах. Метод пирамид / Д.Л. Головашкин, А.В. Кочуров // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 3. – С. 55-69.
4. **Козлова, Е.С.** Моделирование распространения короткого двумерного импульса света / Е.С. Козлова, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 158-164.
5. **Астраханцева, М.А.** Методика формирования падающей волны при разностном решении двумерного волнового уравнения / М.А. Астраханцева, Д.Л. Головашкин, Л.В. Яблокова // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», Ч. 2. – Самара, 2010. – С. 298-301.
6. **Yee, K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K.S. Yee. // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1966. – AP-14. – P. 302-307.
7. **Taflove, A.** Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method: 2nd. ed. / A. Taflove, S. Hagness // Boston: Artech House Publishers, 2000. – 852 p.
8. **Никольский, В.В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1999. – 544 с.
9. **Berenger, J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / Jean-Pierre Berenger // Journal of computational physics. – 1994. – Vol. 114. – P. 185-200.
10. **Mur, G.** Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations / G. Mur // IEEE Trans. Electromagnetic Compability. – 1981. – Vol. 23. – P. 377-382.
11. **Головашкин, Д.Л.** Методика формирования падающей волны при разностном решении уравнений Максвелла (двумерный случай) / Д.Л. Головашкин, Н.Л. Казанский // Автометрия. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 78-88.
12. <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep>
13. **Umashankar, K.** A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects / K. Umashankar, A. Taflove // IEEE Trans. Electromagn. Compat. EMC-24, 1982. – P. 397-405.
14. **Prather, D.W.** Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements / D.W. Prather, S. Shi // J. Opt. Soc. Am. A. – 1999. – Vol. 16, N 5. – P. 1131-1142.
15. **Головашкин, Д.Л.** Методика формирования падающей волны при разностном решении уравнений Максвелла. Одномерный случай / Д.Л. Головашкин, Н.Л. Казанский // Автометрия. – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 78-85.

References

1. **Fidel, B.** Hybrid ray-FDTD moving window approach to pulse propagation / B. Fidel, E. Heyman, R. Kastner and R.W. Ziolkowski // Journal of Computational Physics. – 1997. – Vol. 138, Issue 2. – P. 480-500.
2. **Golovashkin, D.L.** Mesh domain decomposition ftdt / D.L. Golovashkin, N.L. Kazanskiy // Mathematic modeling. – 2007. – Vol. 19, N 2 – P. 48-58. – (In Russian).
3. **Golovashkin, D.L.** Solution of difference equations in graphical D.L. Golovashkin, A.V. Kochurov // Computing technologies. – 2012. – Vol 17, N 3. – P. 55-69. – (In Russian).computing devices. Method of pyramids /
4. **Kozlova, E.S.** Model operation of distribution of a short twodimensional impulse of light / E.S. Kozlova, V.V. Kotlyar // Computer optics. – Vol. 36, N 2. – P. 158-164. – (In Russian).
5. **Astrakhantseva, M.A.** Method of formation of the incident wave in a two-dimensional finite-difference solution of the wave equation / M.A. Astrakhantseva, D.L. Golovashkin, L.V. Yablokova // Proceedings of the Seventh All-Russian Scientific Conference with International Participation "Mathematical modeling and boundary problems", Issue 2. – Samara, 2010. – P. 298-301.
6. **Yee, K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K.S. Yee. // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1966. – AP-14. – P. 302-307.
7. **Taflove, A.** Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method: 2nd. ed. / A. Taflove, S. Hagness // Boston: Artech House Publishers, 2000. – 852 p.

8. **Nikolsky, V.V.** Electrodynamics and radio waves propagation / V.V. Nikolsky, T.I. Nikolskaya. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1999. – 544p. – (In Russian).
9. **Berenger, J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / Jean-Pierre Berenger // Journal of computational physics. – 1994. – Vol. 114. – P. 185-200.
10. **Mur, G.** Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations / G. Mur // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1981. – Vol. 23. – P. 377-382.
11. **Golovashkin, D.L.** Technique of formation of the incident wave at the difference solution of Maxwell's equations (two-dimensional case) / D.L. Golovashkin, N.L. Kazanskiy // Journal “Avtometriya”. – 2007. – Vol. 43, N 6. – P. 78-88. – (In Russian).
12. <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep>.
13. **Umashankar, K.** A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects / K. Umashankar, A. Taflove // IEEE Trans. Electromagn. Compat. EMC-24, 1982. – P. 397-405.
14. **Prather, D.W.** Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements / D.W. Prather, S. Shi // J. Opt. Soc. Am. A. – 1999. – Vol. 16, N 5. – P. 1131-1142.
15. **Golovashkin, D.L.** Technique of formation of the incident wave at the difference solution of Maxwell's equations. Dimensional case / D.L. Golovashkin, N.L. Kazanskiy // Journal “Avtometriya”. – 2006. – Vol. 42, N 6. – P. 78-85. – (In Russian).

JOINT FINITE-DIFFERENCE SOLUTION OF THE DALAMBER AND MAXWELL'S EQUATIONS. ONE-DIMENSIONAL CASE

D.L. Golovashkin¹, L.V. Yablokova²

¹ *Image Processing Systems Institute of the RAS,*

² *S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)*

Abstract

The technique of searching of the collateral finite-difference solution of a wave equation and set of equations of Maxwell is offered, allowing to combine advantage and to avoid shortcomings of both made mention numerical methods of nanophotonics. In an one-dimensional case on test examples convergence of such decision, possibility of imposing of PML layers and a task of an incident wave on the TF/SF technology are shown.

Key words: Delamber equation, Maxwell equation, difference scheme, PML layer, TF/SF technique.

Сведения об авторах



Головашкин Димитрий Львович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: разностное решение уравнений Максвелла (FDTD-метод); дифракционная оптика; векторные и параллельные матричные вычисления.

E-mail: dimitriy@smr.ru.

Dimitry Lvovich Golovashkin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leader Researcher of Image Processing Systems Institute Russian Academy of Sciences. Scientific interests: FDTD-method, subwave optics, vector and parallel algorithms for matrix computation.



Яблокова Людмила Вениаминовна, 1978 года рождения. В 2000 году окончила Самарский государственный педагогический университет. Работает в СГАУ (Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва) старшим преподавателем кафедры прикладной математики. Область научных интересов: разностные схемы.

E-mail: lyablokova@yandex.ru.

Lyudmila Veniaminovna Yablokova, (b. 1978) graduated from Samara State Pedagogical University in 2000. She works as the senior teacher at the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University Applied Mathematics sub-department. Research interests: finite-difference approximations.

Поступила в редакцию 26 сентября 2012 г.