ФОРМИРОВАНИЕ ИНВАРИАНТОВ ПРИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА ГОМОТОПИИ

Чуканов С.Н. [1], *Ульянов Д.В.* [2]

[1] *Омский филиал ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,*

[2] *ФГБОУ ВПО Омский государственный технический университет*

Аннотация

В работе рассматривается алгоритм формирования инвариантов компонент декомпозированного векторного поля, основанный на построении оператора гомотопии. Алгоритм формирования инвариантов используется при распознавании образов векторных полей.

Ключевые слова: распознавание образов, инвариант векторного поля, декомпозиция векторного поля, декомпозиция Ходжа–Гельмгольца, оператор гомотопии.

Введение

При распознавании образов векторных полей алгоритм определения инвариантов этих векторных полей имеет практическое значение [1, 2]. В работе [2] рассматриваются инварианты векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем, по отношению к действию специальной аффинной группы преобразований. В работе [3] рассмотрен метод построения функции трёхмерного изображения, инвариантной к действию групп вращения и переноса. В работах [4, 5] предложен метод построения инвариантов векторных полей, основанный на декомпозиции Ходжа–Гельмгольца [6] на потенциальное и соленоидальное векторные поля. Однако при размерности многообразия векторного поля $n \ge 3$ декомпозиция Ходжа–Гельмгольца некорректна.

Цель настоящей работы – построение алгоритмов декомпозиции векторного поля гладкой динамической системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ при $n \ge 3$. Для достижения цели в работе решена задача построения потенциальной и соленоидальной компонент векторного поля формированием оператора гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Для компонент декомпозиции векторного поля могут быть построены инварианты, используемые при распознавания образов векторных полей.

1. Декомпозиция векторного поля динамической системы

Для решения задачи визуализации векторного поля $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial / \partial \mathbf{x}$ динамической системы:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \\ &\mathbf{f}(0) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

декомпозируем $\mathbf{X}$ на потенциальную и векторную компоненты [4, 5]. Для этого сформируем дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, соответствующую векторному полю $\mathbf{X}$. Пусть в евклидовом пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ и метрическим тензором $g_{ij}(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ задано векторное поле $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Для соответствующей 1-формы $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}x_i$ имеем $\omega_i = f_i / \sqrt{g_{ii}}$, следовательно, $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$ [7].

В отличие от методов визуализации, предложенных в работах [4, 5], построим скалярный потенциал из векторного поля $\mathbf{X}$ с применением оператора гомотопии с центром в точке $\mathbf{x}_0 \equiv 0$ для формы $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$ (см. приложение 1):

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^1 i_{x_i \partial / \partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\lambda . \tag{2}$$

Оператор гомотопии $\mathbb{H}$ удовлетворяет тождеству: $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$. Первый член разложения является точной формой $\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{d}\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\lambda \right)$, следовательно, является замкнутой формой: $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}(\mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})) = 0$. Если считать $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ скалярным потенциалом, то потенциальное векторное поле $\varphi'_x(\partial / \partial \mathbf{x})$ является дуальным форме: $\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \varphi'_x \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Второй член разложения – $\boldsymbol{\omega}_a$ – является антиточной формой (по терминологии [8]) $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - \mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$, причём:

$$\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}(\mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = 0 .$$

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a$, так как $\mathrm{d}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому антиточная форма $\boldsymbol{\omega}_a$ инвариантна по отношению к преобразованию:

$$\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\Omega; \forall \Omega \in \Lambda^2 . \tag{3}$$

В случае, когда размерность евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ чётная, можно сформировать абсолютный инвариант по отношению к преобразованию (3):

$$I_a = \int_M (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})^{n/2} = \int_M (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a)^{n/2} \in \mathbb{R} , \tag{4}$$

который является количественной характеристикой антиточной формы на многообразии $M \in \mathbb{R}^n$. Величина I_a не зависит от выбора точной части $\boldsymbol{\omega}_e$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega}_e$.

В случае, когда размерность евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ нечётная, можно сформировать относительный инвариант по отношению к преобразованию (3):

$$I_a = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\right)^{n-1/2} = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}_a\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a\right)^{n-1/2} \in \mathbb{R}\,, \tag{5}$$

так как в соответствии с теоремой Стокса $\int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int_M d\left[\boldsymbol{\omega}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1}\right] = \int_M \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a\right)^{k-1} = \int_M \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a\right)^k$ получаем абсолютный инвариант в чётномерном пространстве.

Пример 1. Рассмотрим уравнение осциллятора: $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -x_1$, для которого построим форму $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_a = x_2\mathrm{d}x_1 - x_1\mathrm{d}x_2$; $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$; на многообразии $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|^2 \le 1\right\}$. Тогда значение абсолютного инварианта:

$$I_a = \left|\int_M \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\right)\right| = \left|\int_M \left(2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\right)\right| = 2\pi\,. \tag{6}$$

Если к форме прибавить точную компоненту:

$$\boldsymbol{\omega} = x_2\mathrm{d}x_1 - x_1\mathrm{d}x_2 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + \mathrm{d}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) =$$

$$= x_2\mathrm{d}x_1 - x_1\mathrm{d}x_2 + x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2,$$

что соответствует ДС: $\dot{x}_1 = x_2 + x_1; \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$, то значение интеграла не изменится.

Для многообразия M границей является: $\partial M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|^2 = 1\right\}$. Для нахождения относительного инварианта проведём замену координат: $x_1 = r\cos\theta; x_2 = r\sin\theta$, причём на границе многообразия $r = 1$: $\partial M = \left\{r, \theta \,|\, r = 1, \theta \in [0 \ldots 2\pi]\right\}$. Тогда $\boldsymbol{\omega} = r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$ и значение относительного инварианта:

$$I_a = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \in \mathbb{R}\,. \;\square \tag{7}$$

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_e$, так как $\mathbb{H}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому точная форма $\boldsymbol{\omega}_e$ инвариантна по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + \mathrm{d}\sigma; \forall\sigma \in \Lambda^0(x)$.

В соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского на компактном (замкнутом) односвязном многообразии $M \in \mathbb{R}^n$:

$$I_e = \int_M \left(\nabla \cdot \mathbf{X}_e\right)\mathrm{d}V_M = \int_{\partial M} \left\langle \mathbf{f}_e, \mathbf{n}\right\rangle \mathrm{d}V_{\partial M} \in \mathbb{R}\,, \tag{8}$$

где $\mathrm{d}V_M$ – элемент объёма многообразия M, $\mathrm{d}V_{\partial M}$ – элемент объёма границы многообразия ∂M, $\mathbf{n}$ – внешний вектор нормали к границе ∂M, $\mathbf{X}_e$ – векторное поле, соответствующее точной компоненте $\boldsymbol{\omega}_e$. Величина I_e не зависит от выбора антиточной части $\boldsymbol{\omega}_a$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega}_a$. В качестве многообразия M можно выбрать многообразие, границей которого ∂M является эквипотенциальная гиперповерхность

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathrm{const}\,.$$

Пример 2. Для динамической системы $\dot{x}_1 = x_2 + x_1; \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$ построим форму $\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + x_1\right)\mathrm{d}x_1 + \left(-x_1 + x_2\right)\mathrm{d}x_2 = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_e$, причём

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\right) = \mathrm{d}\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{x}\right) \cdot \mathrm{d}\lambda\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2,$$

откуда потенциал следует выбрать в форме: $\varphi\left(x_1, x_2\right) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ и $\mathbf{X}_e = x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$; $\nabla \cdot \mathbf{X}_e = 2$.

Построим многообразие M, ограниченное границей ∂M, которая определяется эквипотенциальной поверхностью $\varphi\left(x_1, x_2\right) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} = C$.

В соответствии с правой частью теоремы Гаусса–Остроградского:

$$I_e = \int_M \left(\nabla \cdot \mathbf{X}_e\right)\mathrm{d}V = 2\int_M \mathrm{d}V = 2\pi r^2 = 4\pi C\,.$$

В соответствии с левой частью теоремы Гаусса–Остроградского: $I_e = \int_{\partial M} \left\langle \mathbf{f}_e, \mathbf{n}\right\rangle \mathrm{d}V_{\partial M}$. Границей является окружность $x_1^2 + x_2^2 = 2C$. Проведём замену координат: $x_1 = r\cos\theta; x_2 = r\sin\theta$, причём $r = \sqrt{2C}$. Тогда: $\mathbf{f}_e = \left(r\cos\theta \quad r\sin\theta\right)$;

$\mathrm{d}V_{\partial M} = r\,\mathrm{d}\theta$; $\mathbf{n} = \left(\cos\theta \quad \sin\theta\right)$, откуда:

$$I_e = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(r\cos\theta \quad r\sin\theta\right), \left(\cos\theta \quad \sin\theta\right)\right\rangle r\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 4\pi C. \;\square$$

Рассмотрим пример построения абсолютного инварианта методом построения оператора гомотопии для векторного поля нелинейной динамической системы.

Пример 3. Рассмотрим нелинейную динамическую систему $\dot{x}_1 = x_2 + 0{,}1 \cdot x_1^3; \dot{x}_2 = -x_1 + 0{,}1 \cdot x_2^3$ с векторным полем:

$$\mathbf{X} = \left(x_2 + 0{,}1 \cdot x_1^3\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-x_1 + 0{,}1 \cdot x_2^3\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\,,$$

для которого построим соответствующую форму:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + 0{,}1 \cdot x_1^3\right)\mathrm{d}x_1 + \left(-x_1 + 0{,}1 \cdot x_2^3\right)\mathrm{d}x_2\,.$$

Точная компонента $\boldsymbol{\omega}_e$ может быть найдена применением оператора гомотопии:

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\right) = \mathrm{d}\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{x}\right) \cdot \mathrm{d}\lambda\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{0{,}1x_1^4 + 0{,}1x_2^4}{4}\right) = 0{,}1x_1^3\mathrm{d}x_1 + 0{,}1x_2^3\mathrm{d}x_2,$$

откуда найдём потенциал $\varphi\left(x_1,x_2\right)=0,025\left(x_1^4+x_2^4\right)$ и векторное поле, соответствующее точной компоненте: $\mathbf{X}_e=0,1\cdot x_1^3\frac{\partial}{\partial x_1}+0,1\cdot x_2^3\frac{\partial}{\partial x_2}$; $\nabla\cdot\mathbf{X}_e=0,3\left(x_1^2+x_2^2\right)$. Векторное поле, соответствующее антиточной компоненте: $\mathbf{X}_a=\mathbf{X}-\mathbf{X}_e=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$. Значение абсолютного инварианта на многообразии $M=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x|^2\le 1\right\}$: $I_a=\left|\int_M(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})\right|=2\pi$ (см.(6)). □

Основным результатом первого раздела является алгоритм нахождения инварианта антиточной компоненты дифференциальной формы: абсолютного – (4) и относительного – (5), а также инварианта точной компоненты дифференциальной формы – (8).

2. Декомпозиция векторного поля динамической системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$

В приложении 2 показано, что гладкая динамическая система $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$; $\mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ может быть представлена в форме $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$. В свою очередь, правая часть выражения $\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$ может быть декомпозирована в форме [9]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}=\left(\mathbf{J}(\mathbf{x})+\mathbf{R}(\mathbf{x})\right)\cdot\mathbf{x}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})=0,5\cdot(\mathbf{A}(\mathbf{x})-\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}})$ – кососимметрическая компонента матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$; $\mathbf{R}(\mathbf{x})=0,5\cdot(\mathbf{A}(\mathbf{x})+\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}})$ – симметрическая компонента матрицы.

Для векторных полей $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x}(\partial/\partial\mathbf{x})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x}(\partial/\partial\mathbf{x})$ построим соответствующие дифференциальные формы в дуальном базисе: $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{J}}=(\mathbf{J}(\mathbf{x})\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}=(\mathbf{R}(\mathbf{x})\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x})=\mathbf{A}$. Применим оператор гомотопии для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right)=\mathbb{H}\left((\mathbf{J}\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right)=\\&=\int_0^1 i_{\mathcal{X}}\left((\mathbf{J}\lambda\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\mathbf{x}^T\mathbf{J}\lambda\mathbf{x}\mathrm{d}\lambda=0.\end{aligned} \qquad (10)$$

Применив оператор гомотопии для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$, получим скалярную потенциальную функцию $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}&\varphi(\mathbf{x})=\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\right)=\mathbb{H}\left((\mathbf{R}\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)=\\&=\int_0^1 i_{\mathcal{X}}\left((\mathbf{R}\lambda\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\mathbf{x}^T\mathbf{R}\lambda\mathbf{x}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}.\end{aligned} \qquad (11)$$

Так как $\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right)=0$, то

$$\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\right)=\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\right)=\varphi(\mathbf{x}).$$

Следовательно, потенциальное векторное поле системы:

$$\mathbf{f}_g=\partial\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\right)/\partial\mathbf{x}=\partial\varphi(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}=\mathbf{R}\mathbf{x}. \qquad (12)$$

Тангенциальное векторное поле системы $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})$ можно представить в форме:

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{f}_g(\mathbf{x})=\mathbf{J}\mathbf{x}. \qquad (13)$$

Применим оператор внешнего дифференцирования (exterior differentiation) для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}$: $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}=\mathrm{d}\left((\mathbf{R}\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right)=0$, и для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}$: $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}=\mathrm{d}\left((\mathbf{J}\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n J_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge x_j=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$. Компонентам разложения: $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}+\mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega}_a$ можно сопоставить: $\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\right)_e=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}=(\mathbf{R}\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$; $\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}\right)_a=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}=(\mathbf{J}\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Пример 4. Рассмотрим пример декомпозиции линейной системы: $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$; $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&2&4\\4&7&6\\6&8&9\end{pmatrix}$. Симметрическая компонента матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}=0,5\cdot\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)=\begin{pmatrix}5&3&5\\3&7&7\\5&7&9\end{pmatrix}$; кососимметрическая компонента: $\mathbf{J}=0,5\cdot\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Применим оператор гомотопии к симметрической части дуальной дифференциальной формы и получим скалярный потенциал:

$$\varphi(\mathbf{x})=\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\right)=\int_0^1 i_{\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}}\left(\begin{pmatrix}5&3&5\\3&7&7\\5&7&9\end{pmatrix}\lambda\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}5&3&5\\3&7&7\\5&7&9\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbb{H}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\right).$$

Следовательно, потенциальное векторное поле системы: $\mathbf{f}_g=\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{R}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}5&3&5\\3&7&7\\5&7&9\end{pmatrix}\mathbf{x}$; а тангенциальное векторное поле системы: $\mathbf{f}_t=\mathbf{f}-\mathbf{f}_g=(\mathbf{A}-\mathbf{R})\mathbf{x}=\mathbf{J}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}$. □

Заключение

Рассмотрен метод декомпозиции векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии. Построены инварианты для компонент декомпозиции векторного поля. Алгоритм формирования инвариантов используется при распознавании образов векторных полей. Предполагается распространение метода декомпозиции для векторного поля на аффинных и евклидовых группах.

Приложение 1.
Метод оператора гомотопии [8]

Обозначим элементы тангенциального векторного пространства в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x}); f_i \in \mathbb{R};$$

элементы котангенциального пространства (дифференциальные формы): $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\mathbf{x}) \mathrm{d}x_i, \omega_i \in \mathbb{R}$.

Для дифференциальных форм можно ввести дифференциальный оператор d со свойствами:

(*i*) $\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^2) = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^2$;

(*ii*) $\mathrm{d}\phi = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$; (*iii*) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = 0$,

и оператор внутреннего произведения (interior product): $(i_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{p-1}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{p-1})$;

для случая $k = \deg(\boldsymbol{\omega}) = 1$: $i_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X})$.

Согласно лемме Пуанкаре – если локальная область $U \in M$ стягивается в точку и форма $\boldsymbol{\omega}$ – замкнутая, то существует такая форма α в U, что $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$. Получение формы $\boldsymbol{\alpha}$ по значениям формы $\boldsymbol{\omega}$ может быть основано на построении оператора гомотопии $\mathbb{H}: \Lambda^k \to \Lambda^{k-1}$, действующего на форму

$\boldsymbol{\omega}$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 i_{(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \lambda^{k-1} \mathrm{d}\lambda$; $k = \deg(\boldsymbol{\omega})$.

При $k = 1$; $\mathbf{x}^0 \equiv 0$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 i_{x_i \partial/\partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{x}) \mathrm{d}\lambda$.

Свойства оператора гомотопии: (*i*) $\mathrm{d}\mathbb{H} + \mathbb{H}\mathrm{d} = \mathbb{I}$; (*ii*) $(\mathbb{H}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}))(x_i) = 0; (\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(x_i^0) = 0$; (*iii*) $i_{x_i \partial/\partial x_i} \mathbb{H} = 0$.

Первый член разложения формы $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) + \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ – точная форма $\boldsymbol{\omega}_e = \mathrm{d}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})$ является замкнутой; форма $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ является антиточной. Для случая $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\phi$ получим: $(\mathbb{H}\mathrm{d}\phi)(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_0)$.

Приложение 2

Метод приведения к форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ **.** В работе [10] представлен точный метод приведения гладкой динамической системы: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; $\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$; к форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$; $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$\mathbf{A} = (a_{ij})$; $a_{ij}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-1} f_i(\mathbf{x}) x_j, \|\mathbf{x}\| \neq 0$. Выбор матрицы $\mathbf{A}$ не является однозначным; так замена $m_{ij} - \phi(\mathbf{x}) x_k$; $m_{ik} + \phi(\mathbf{x}) x_j$ не меняет формы представления.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-07-00032 и № 11-08-01349).

Литература

1. **Olver, P.J.,** Differential invariant signatures and flows in computer vision: A symmetry group approach. In Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision, B.M.Ter Haar Romeny (Ed.) / P.J. Olver, G. Sapiro, A. Tannenbaum. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Netherlands, 1994. – P. 255-306.
2. **Чуканов, С.Н.** Формирование инвариантов при визуализации векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем / С.Н. Чуканов // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 58-63.
3. **Чуканов, С.Н.** Преобразование Фурье функции трехмерного изображения, инвариантное к действию групп вращения и переноса / С.Н. Чуканов // Автометрия. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 80-87.
4. **Chukanov, S.N.** Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems / S.N. Chukanov // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2009. – Vol. 19, N 2. – P. 303-305.
5. Multimedia tools for communicating mathematics / ed. K. Polthier, J. Rodrigues. – Springer-Verlag. – 2002. – P. 241-264.
6. **Saffman, P.G.** Vortex dynamics / P.G. Saffman. – Cambridge University Press. – 1992. – 312 p.
7. **Арнольд, В.И**. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Эдиториал УРСС, 2006. – 416 с.
8. **Edelen, D.G.B.** Applied Exterior Calculus / D.G.B. Edelen. – John Wiley&Sons, Inc., 1985. – 472 p.
9. **Wang, Y.** Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems / Y. Wang, Ch. Lia, D. Cheng // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 1437-1443.
10. **Cheng, D.** Pseudo-hamiltonian realization and its application / D. Cheng, T. Shen, T.J. Tarn // Communications in information and systems. – 2002. – Vol. 2, N 2. – P. 91-120.

References

1. **Olver, P.J.,** Differential invariant signatures and flows in computer vision: A symmetry group approach. In Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision, B.M.Ter Haar Romeny (Ed.) / P.J. Olver, G. Sapiro, A. Tannenbaum. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Netherlands, 1994. – P. 255-306.
2. **Chukanov, S.N.** Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems / S.N. Chukanov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2011. – Vol. 47, N 2. – P. 51-155.
3. **Chukanov, S.N.** A rotation, translation, and scaling invariant Fourier transform of 3D image function / S.N. Chukanov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2008. – Vol. 44, N 3. – P. 249-255.
4. **Chukanov, S.N.** Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems / S.N. Chukanov // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2009. – Vol. 19, N 2. – P. 303-305.
5. Multimedia tools for communicating mathematics / ed. K. Polthier, J. Rodrigues. – Springer-Verlag. – 2002. – P. 241-264.
6. **Saffman, P.G.** Vortex dynamics / P.G. Saffman. – Cambridge University Press. – 1992. – 312 p.
7. **Arnold, V.I**. Mathematical Methods of Classical Mechanics / V.I. Arnold . – Springer-Verlag N.Y. Inc., 1989. – 516 p.
8. **Edelen, D.G.B.** Applied Exterior Calculus / D.G.B. Edelen. – John Wiley&Sons, Inc., 1985. – 472 p.
9. **Wang, Y.** Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems / Y. Wang, Ch. Lia, D. Cheng // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 1437-1443.
10. **Cheng, D.** Pseudo-hamiltonian realization and its application / D. Cheng, T. Shen, T.J. Tarn // Communications in information and systems. – 2002. – Vol. 2, N 2. – P. 91-120.

THE FORMATION OF INVARIANTS FOR VISUALIZATION OF VECTOR FIELDS ON THE BASIS OF CONSTRUCTING HOMOTOPY OPERATOR

S. N. Chukanov [1], D. V. Ulyanov [2]
[1] RAS Institution Siberian Branch, Sobolev Institute of Mathematics, Omsk Department,
[2] Omsk State Technical University

Abstract

The algorithm for the formation of invariants decomposed component vector field, based on the construction of the homotopy operator is proposed in this paper. The algorithm of formation of invariants used in pattern recognition of vector fields.

Key words: pattern recognition, the invariant of vector field, the decomposition of vector field, Hodge-Helmholtz decomposition, homotopy operator.

Сведения об авторах

Чуканов Сергей Николаевич родился в 1951 году в Омске. Кандидатскую диссертацию защитил в 1990 году в Центральном научно-исследовательском институте машиностроения (ЦНИИМаш, г. Королёв), докторскую – в 2000 году в Омском государственном техническом университете, получил звание профессора по кафедре автоматизированных систем обработки информации и управления в 2003 году. В настоящее время – ведущий научный сотрудник Омского филиала ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН и заведующий кафедрой компьютерных информационных автоматизированных систем ФГБОУ ВПО Сибирской автомобильно-дорожной академии. Является автором и соавтором боле 100 научных работ, в том числе и 7 монографий, посвящённых методам обработки информации.

E-mail: ch_sn@mail.ru .

Sergey Nikolayevich Chukanov born in 1951, in Omsk. Ph.D. thesis defended in 1990 in Central Research Institute of Machine Building (TsNIIMash, Korolev), PhD - in 2000 in Omsk State Technical University and the title of professor in the chair of "Automated systems Information Processing and Control" in the 2003. Now - leading researcher of Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Omsk department and head of chair "Computer automated information system" Siberian State Automobile and Highway Academy. He has authored or co-authored more than 100 scientific papers, including 7 monographs от epy methods of processing information.

Ульянов Димитрий Владимирович родился в 1987 году. В 2010 году защитил магистерскую диссертацию в Омском государственном техническом университете. В настоящее время его интересы лежат в области распознавания изображений, дополненной реальности и геоинформационных технологий. Является автором и соавтором более чем 10 статей.

E-mail: grayfox@list.ru .

Dmitry Vladimirovich Ulyanov, born in 1987. Received his master’s degree in 2010 in Omsk State Technical University. Currently he is interesting in image recognition, augmented reality and GIS-technologies. He is the author of more than 10 scientific papers.

Поступила в редакцию 31 августа 2012 г.

Дизайн: Я.Е. Тахтаров. Оформление и верстка: М.А. Вахе, С.В. Смагин и Я.Е. Тахтаров.

Подписано в печать 15.12.2012 г. Усл. печ. л. 18,71.
Отпечатано в типографии ООО «Предприятие «Новая техника».
Заказ № 11/4. Тираж 324 экз. Печать офсетная. Формат 62х84 1/8.