

ПАРАКСИАЛЬНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ПЛАНАРНОЙ ЛИНЕЙНО-ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

Ковалёв А.А.^{1,2}, Котляр В.В.^{1,2}, Калинин Д.С.²

¹ Институт систем обработки изображений РАН,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Получено интегральное преобразование, описывающее параксиальное распространение светового пучка в градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты. Распространение света в такой среде эквивалентно прохождению через призму, последующему распространению в однородной среде и повторному прохождению через призму. При распространении гауссова пучка в такой градиентной среде его центр смещается с оптической оси по параболе в сторону более плотной среды, а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления на оптической оси.

Ключевые слова: градиентная среда, интегральное преобразование, ABCD-преобразование, параксиальное уравнение Гельмгольца.

Введение

Для описания распространения световых полей в однородных средах и различных оптических системах часто используются интегральные преобразования. Наиболее универсальными являются формулы Стреттона–Чу [1], позволяющие определять комплексную амплитуду света в любой точке, если известна комплексная амплитуда на произвольной поверхности (без токов и зарядов). Из формул Стреттона–Чу может быть получено множество других менее универсальных интегральных преобразований. Так, в однородной среде свет описывается преобразованием Рэлея–Зоммерфельда [2, 3]. Если расстояние от начальной плоскости до плоскости наблюдения много больше длины волны, то это преобразование может быть заменено преобразованием Кирхгофа [1], которое при параксиальном распространении света становится преобразованием Френеля [1]. Если свет распространяется не в однородной 2D среде, а через оптическую систему, описываемую ABCD-матрицей, то при параксиальном распространении комплексные амплитуды во входной и выходной плоскостях связаны между собой ABCD-преобразованием [4]:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi B}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, 0) \exp\left[\frac{ik}{2B}(A\xi^2 - 2x\xi + Dx^2)\right] d\xi, \quad (1)$$

где ξ и x – поперечные декартовы координаты во входной и выходной плоскостях соответственно, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны света. В частности, если оптическая система – тонкая линза, то ABCD-преобразование принимает вид преобразования Фурье. ABCD-преобразование вызвало повышенный интерес в силу своей универсальности, так как могло применяться для любых систем, описываемых ABCD-матрицей. Множество работ посвящено эффективному вычислению интегралов с комплексной экспонентой, имеющей квадратичную фазу [5, 6].

Позже выяснилось, что такие интегральные преобразования возникают и в градиентных средах. ABCD-преобразование описывает распространение света в градиентном волноводе с параболической зависимостью показателя преломления от поперечной координаты $n(x) = n_0 [1 - x^2/(2a^2)]$ [7–10]. В этом случае ABCD-матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(z/a) & a \sin(z/a) \\ -\sin(z/a)/a & \cos(z/a) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где n_0 – показатель преломления на оси волновода ($x=0$), a – показатель, характеризующий скорость спада показателя преломления от оси волновода к его краю, z – расстояние между входной и выходной плоскостью.

В [11] получено решение параксиального уравнения распространения для планарной неоднородной вдоль оптической оси градиентной среды с линейным профилем в виде преобразования Фурье от неизвестного пространственного спектра.

В данной работе на основе методологии работы [11] показано, что в 2D градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты $n^2(x) = n_0^2(1 - \alpha x)$ в параксиальном приближении распространение света также описывается интегральным преобразованием, ядро которого включает комплексную экспоненту, имеющую квадратичную фазу. Распространение света на расстояние z в такой среде эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z , последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0 , повторному прохождению через упомянутую призму и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z . Показано, что при распространении гауссова пучка его центр смещается по параболе пропорционально z^2 , а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с по-

казателем преломления n_0 . Ускоряющийся по параболе гауссов пучок похож на пучок Эйри, ускоряющийся также по параболе в 2D однородном пространстве [12, 13]. С помощью полученного интегрального преобразования найдено явное выражение для комплексной амплитуды пучка Эйри в планарной градиентной среде с линейным профилем. Это решение совпадает с полученным ранее в [14]. Но в [14] не описан способ получения решения. Показано, что пучок Эйри при согласовании его масштаба с градиентом линейной среды, наоборот, распространяется по прямолинейной траектории.

1. Интегральное преобразование для градиентной среды с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной декартовой координаты

Пусть дана 2D градиентная среда с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости (квадрата показателя преломления) от поперечной декартовой координаты:

$$n^2(x) = n_0^2(1 - \alpha x), \quad (3)$$

где x – декартова координата в плоскости, перпендикулярной оптической оси z , n_0 – показатель преломления на оптической оси, α – параметр изменения диэлектрической проницаемости при удалении от оптической оси в направлениях вдоль координат x . При ТЕ-поляризации уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды света E_y , распространяющегося в такой среде, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 n_0^2 (1 - \alpha x) E = 0, \quad (4)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число в вакууме, λ_0 – длина волны света в вакууме. Будем считать, что свет распространяется преимущественно в направлении оптической оси, и представим амплитуду в виде:

$$E(x, z) = U(x, z) \exp(ikz), \quad (5)$$

где $k = k_0 n_0$ – волновое число на оптической оси. Тогда, пренебрегая второй производной по z , получим из уравнения Гельмгольца следующее уравнение:

$$2ik \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 \alpha x U = 0, \quad (6)$$

решение которого будем искать в виде:

$$U(x, z) = A \times \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) \exp\left[i\left(Bx^2 + Cu^2 + Dux + Ex + Fu\right)\right] du, \quad (7)$$

где A, B, C, D, E, F – функции от z , а S – произвольная функция.

Подставим это выражение в параксиальное уравнение Гельмгольца (6), приведём подобные слагаемые и с учётом произвольности функции $S(u)$, получим:

$$\begin{aligned} & -A \left[2k \frac{dB}{dz} + 4B^2 \right] x^2 - A \left[2k \frac{dC}{dz} + D^2 \right] u^2 - \\ & -A \left[2k \frac{dD}{dz} + 4BD \right] ux - \\ & -A \left[2k \frac{dE}{dz} + 4BE + k^2 \alpha \right] x - \\ & -A \left[2k \frac{dF}{dz} + 2DE \right] u + \\ & + \left[2ik \frac{dA}{dz} + 2iAB - AE^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как это выражение верно для любых z , приравняем нулю коэффициенты при подобных слагаемых. Получится система из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} k \frac{dB}{dz} + 2B^2 = 0, \\ 2k \frac{dC}{dz} + D^2 = 0, \\ k \frac{dD}{dz} + 2BD = 0, \\ 2k \frac{dE}{dz} + 4BE + k^2 \alpha = 0, \\ k \frac{dF}{dz} + DE = 0, \\ 2ik \frac{dA}{dz} + 2iAB - AE^2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решением первого уравнения являются функции вида:

$$B(z) = \frac{k}{2(z + B_0)}, \quad (10)$$

где B_0 – произвольная постоянная.

Подставив (10) в третье уравнение (9) и решив его, получим:

$$D(z) = \frac{D_0}{z + B_0}, \quad (11)$$

где D_0 – произвольная постоянная.

Подставив (11) во второе уравнение системы (9), получим вид функций $C(z)$:

$$C(z) = \frac{D_0^2}{2k(z + B_0)} + C_0, \quad (12)$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Подставив (10) в четвёртое уравнение системы (9) и решив его, получим вид функций $E(z)$:

$$E(z) = \frac{E_0}{z + B_0} - \frac{k\alpha}{4}(z + B_0), \quad (13)$$

где E_0 – произвольная постоянная.

Подставив найденные выражения для функций $D(z)$ и $E(z)$ в пятое уравнение системы (9) и решив его, получим вид функций $F(z)$:

$$F(z) = \frac{\alpha D_0(z + B_0)}{4} + \frac{D_0 E_0}{k(z + B_0)} + F_0, \tag{14}$$

где F_0 – произвольная постоянная.

Шестое уравнение системы (9) решается в разделяющихся переменных. Подставим найденные ранее выражения для остальных функций, получим решение:

$$A(z) = \frac{A_0}{\sqrt{z + B_0}} \exp\left[\frac{iE_0^2}{2k(z + B_0)}\right] \times \exp\left[-\frac{ik\alpha^2}{96}(z + B_0)^3 + \frac{i\alpha E_0 z}{4}\right]. \tag{15}$$

Амплитуда в начальной плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$U(x, 0) = A^0 \exp\left[i(B^0 x^2 + E^0 x)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) \exp\left[i(C^0 u^2 + D^0 ux + F^0 u)\right] du, \tag{16}$$

где $A^0 = A(0)$, $B^0 = B(0)$, $C^0 = C(0)$, $D^0 = D(0)$, $E^0 = E(0)$, $F^0 = F(0)$.

Умножим начальное поле на множитель $\exp[-iB^0 x^2 - i(E^0 + D^0 \xi)x]$ и, проинтегрировав по всей числовой оси, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \exp\left[-iB^0 x^2 - i(E^0 + D^0 \xi)x\right] dx = A^0 \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) \exp\left[i(C^0 u^2 + F^0 u)\right] \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[iD^0(u - \xi)x\right] dx \right\} du. \tag{17}$$

Внутренний интеграл представляет собой дельта-функцию Дирака, и поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \exp\left[-iB^0 x^2 - i(E^0 + D^0 \xi)x\right] dx = \frac{2\pi A^0}{D^0} S(\xi) \exp\left[i(C^0 \xi^2 + F^0 \xi)\right], \tag{18}$$

т.е. функция $S(u)$ выражается через начальное поле следующим образом:

$$S(u) = \frac{D^0}{2\pi A^0} \exp\left[-i(C^0 u^2 + F^0 u)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, 0) \exp\left[-iB^0 \xi^2 - i(E^0 + D^0 u)\xi\right] d\xi. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (7) и интегрируя по переменной u возникающий интеграл Пуассона, получим:

$$U(x, z) = \frac{D^0 A}{2\pi A^0} \exp\left[i(Bx^2 + Ex)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, 0) \exp\left[-i(B^0 \xi^2 + E^0 \xi)\right] \times \sqrt{\frac{i\pi}{C - C^0}} \exp\left[\frac{(Dx - D^0 \xi + F - F^0)^2}{4i(C - C^0)}\right] d\xi. \tag{20}$$

Подставляя в (20) функции (10)–(15), получим интегральное преобразование, связывающее комплексные амплитуды света в двух плоскостях, поперечных оптической оси:

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi z}} \exp\left(-\frac{ik\alpha^2 z^3}{96}\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, 0) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi - x)^2 - \frac{ik\alpha z}{4}(x + \xi)\right] d\xi. \tag{21}$$

Легко видеть, что при $\alpha = 0$ интегральное преобразование (21) переходит в известное преобразование Френеля.

В трёхмерном случае в среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечных декартовых координат $n^2(x, y) = n_0^2(1 - \alpha x - \beta y)$ аналогичное интегральное преобразование получается перемножением преобразований (21) по обеим координатам.

Из (21) видно, что распространение света на расстояние z в среде (3) эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z , последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0 , повторному прохождению через упомянутую призму, и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z .

Преобразование (21) не является свёрткой, хотя и может быть вычислено с помощью преобразования Фурье. Преобразование (21) не описывает распространение света в ABCD-системе (1), но его ядро также является экспонентой с показателем в виде квадратичной формы. Следовательно известные решения для однородной среды (пучки Гаусса–Эрмита, пучки Эйри и др.) могут быть обобщены и для среды (3), а известные быстрые методы вычисления интегралов с комплексной экспонентой, имеющей квадратичную фазу [5, 6], также годятся для моделирования световых пучков в среде (3).

Заметим, что ABCD-преобразование (1) с матрицей (2) является точным решением параксиального уравнения Гельмгольца для волновода с параболическим распределением диэлектрической проницаемости. В волноводе с параболическим распределением показателя преломления распределение диэлектрической проницаемости имеет вид полинома четвёртой степени, и можно показать, что описанным способом нельзя найти решение для такой среды в виде интегрального преобразования с ядром, состоящим из экспоненты от полинома четвёртой или более высокой степени.

Если вместо линейно-градиентной среды, в которой диэлектрическая проницаемость линейно убывает в одном направлении, задан линейно-градиентный волновод, в котором она убывает в двух направлениях от оптической оси, то с каждой стороны оптической оси решение уравнения Гельмгольца может быть описано в виде (21), но с противоположными значениями параметра α . В этом случае для получения интегрального преобразования, подобного (21), требуется рассматривать граничные условия и проводить сшивку полей, расположенных по разные стороны от оптической оси. В данной работе ограничимся случаем, когда диэлектрическая проницаемость убывает в одном направлении.

2. Распространение гауссова пучка в двумерной градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной декартовой координаты

Для примера рассмотрим распространение двумерного гауссова пучка с радиусом перетяжки w :

$$U(\xi, 0) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{w^2}\right). \quad (22)$$

Тогда на расстоянии z от перетяжки пучок будет иметь следующую комплексную амплитуду:

$$U(x, z) = \left\{ \frac{w_0}{w(z)} \exp[i\zeta(z)] \right\}^{\frac{1}{2}} \times \exp\left\{ -\frac{[x - x_0(z)]^2}{w^2(z)} + \frac{ik[x - x_1(z)]^2}{2R(z)} + i\Phi(z) \right\}, \quad (23)$$

где $z_R = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $w(z)$ – зависимость ширины гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$w(z) = w \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (24)$$

$x_0(z)$ – зависимость координаты центра (максимума интенсивности) гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$x_0(z) = -\frac{\alpha z^2}{4}, \quad (25)$$

$x_1(z)$ – зависимость координаты центра кривизны гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$x_1(z) = -\left[x_0(z) - \frac{\alpha z_R^2}{2} \right], \quad (26)$$

$\zeta(z)$ – фаза Гоу:

$$\zeta(z) = -\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (27)$$

$R(z)$ – зависимость радиуса кривизны волнового фронта гауссова пучка от пройденного расстояния:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right], \quad (28)$$

$\Phi(z)$ – дополнительный фазовый набег:

$$\Phi(z) = \frac{k\alpha^2 z^2}{24} [2z - 3R(z)]. \quad (29)$$

Из полученных выражений (23)–(29) видно, что в градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной координаты (3) при параксиальном распространении гауссова пучка его центр смещается по параболе, пропорционально z^2 , а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления n_0 .

Численное моделирование распространения гауссовых пучков в среде (3) проводилось конечно-разностным FDTD-методом решения уравнений Максвелла. Рассматривалась градиентная среда с диэлектрической проницаемостью, которая в области моделирования линейно менялась от $\epsilon_a = 1$ (воздух) до $\epsilon_g = 2,25$ (стекло) (рис. 1). Другие параметры моделирования были выбраны следующими: длина волны света в вакууме $\lambda = 633$ нм, область моделирования $-20\lambda \leq x \leq 20\lambda$, $0 \leq z \leq 50\lambda$, время моделирования $-0 \leq t \leq 100\lambda/c$ (c – скорость света в вакууме), шаг дискретизации по обеим координатам $-\lambda/16$, а по времени $-\lambda/32$. Диэлектрическая проницаемость в центре равна $\epsilon(x=0) = (\epsilon_a + \epsilon_g)/2 = 1,625$ (т.е. $n_0 = 1,27$). Параметр α был подобран, исходя из условий $\epsilon(x = -20\lambda) = \epsilon_g$, $\epsilon(x = +20\lambda) = \epsilon_a$, и поэтому $\alpha = 1/52\lambda \approx 0,03$ мкм⁻¹. Радиус перетяжки гауссова пучка составлял $w = 2\lambda$, поляризация – TE, т.е. $\mathbf{E} \equiv (0, E_y, 0)$.

На рис. 2а показана усреднённая по времени интенсивность в плоскости Oxz . Светлыми точками отмечены центры гауссова пучка при различных расстояниях z , вычисленные по формуле (25). Для сравнения на рис. 2б показана усреднённая по времени интенсивность гауссова пучка при распространении в однородной среде с показателем преломления $n_0 = 1,27$. Из сравнения рис. 2а и 2б видно, что на одних и тех же расстояниях z радиусы гауссовых пучков совпадают, т.е. формула (24) описывает радиус пучка не только в однородной среде, но и в градиентной среде (3).

Устремим радиус перетяжки гауссова пучка к бесконечности и добавим линейный градиент фазы во входной плоскости, т.е. при $z = 0$ комплексная амплитуда примет вид:

$$U(x, z = 0) = \exp(ik\beta x), \quad (30)$$

где β – коэффициент, характеризующий угол наклона плоской волны. Подставляя (30) в интегральное преобразование (21), получим, что в произвольной поперечной плоскости на расстоянии z амплитуда примет вид:

$$U(x, z) = \exp\left\{ ik \left[-\frac{\alpha^2 z^3}{24} + \frac{\alpha\beta z^2}{4} - \frac{(\alpha x + \beta^2)z}{2} + \beta x \right] \right\}. \quad (31)$$

Подобно плоской волне в однородном пространстве, поле (31) в среде (3) имеет постоянную интенсивность. Интересной особенностью (31) является кубическая зависимость фазы от пройденного расстояния z .

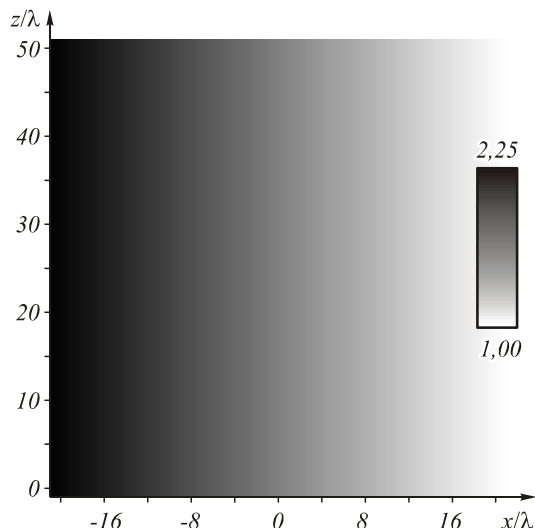


Рис. 1. Распределение диэлектрической проницаемости градиентной среды, линейно возрастающей от 1 (воздух, белый цвет, $x = 20\lambda$) до 2,25 (стекло, чёрный цвет, $x = -20\lambda$)

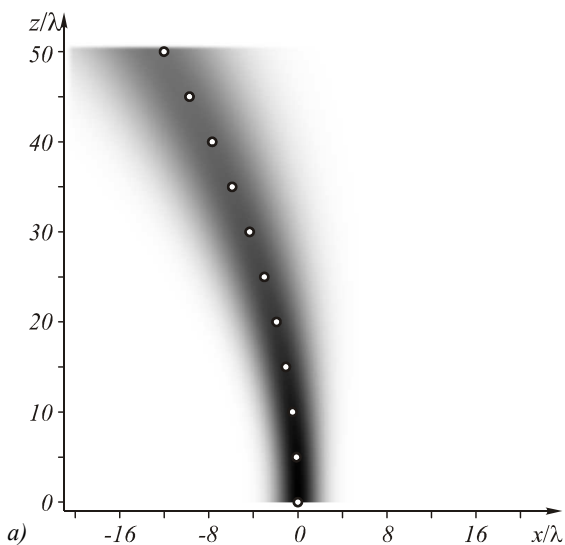


Рис. 2. Усреднённая по времени интенсивность в плоскости Oxz гауссова пучка в среде (3) (а) и в однородной среде с показателем преломления $n_0 = 1,27$ (б)

3. Распространение пучка Эйри в двумерной градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечной декартовой координаты

Пусть в начальной плоскости задана комплексная амплитуда пучка Эйри с ограниченной энергией [15]:

$$U(x, z = 0) = \text{Ai}\left(\frac{x}{x_0}\right) \exp\left(a \frac{x}{x_0}\right), \tag{32}$$

где x_0 – масштабирующий множитель, a – показатель экспоненты, ограничивающей энергию светового пучка. Подставляя (32) в интегральное преобразование (21), получим, что в произвольной поперечной плоскости на расстоянии z амплитуда примет вид:

$$U(x, z) = \exp\left[i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k^2 x_0^3 \alpha^2}{6} - \frac{1}{3k^2 x_0^3}\right) \frac{z^3}{4kx_0^3}\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{a}{2x_0} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{k^2 x_0^3}\right) z^2\right] \times \\ \times \exp\left[i\left(\frac{x}{x_0} - k^2 \alpha x_0^2 x + a^2\right) \frac{z}{2kx_0^2} + a \left(\frac{x}{x_0}\right)\right] \times \\ \times \text{Ai}\left[\frac{x}{x_0} + \left(\alpha - \frac{1}{k^2 x_0^3}\right) \frac{z^2}{4x_0} + \frac{iaz}{kx_0^2}\right]. \tag{33}$$

При переходе к пучку Эйри с неограниченной энергией ($a = 0$) все экспоненты в (33) становятся чисто-фазовыми, а аргумент функции Эйри – вещественным. В общем случае аргумент функции Эйри зависит от обеих декартовых координат x и z и легко видеть, что такой пучок распространяется по параболической траектории, как в однородном пространстве. Однако при согласовании параметров x_0 и α , когда $\alpha = 1/(k^2 x_0^3)$, аргумент функции Эйри теряет зависимость от z , и амплитуда (33) примет вид:

$$U(x, z) = \text{Ai}\left(\frac{x}{x_0}\right). \tag{34}$$

Амплитуда (34) соответствует модовому решению уравнения (4), описанному в [16, 17]. Из (34) видно, что пучки Эйри, масштаб которых согласован со свойствами среды, распространяются в линейно-градиентной среде (3) прямолинейно (рис. 3). Рис. 3 получен при моделировании FDTD-методом, параметры моделирования те же, что и на рис. 2, однако область моделирования по оси x была расширена $-40\lambda \leq x \leq 40\lambda$, поэтому параметр α был равен $1/(104\lambda)$, а параметр x_0 был равен $1/(k^2 \alpha)^{1/3} = (26/\pi^2)^{1/3} \lambda \approx 0,87$ мкм. Небольшой изгиб траектории пучка на рис. 3 является следствием ограниченности пучка во входной плоскости.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. Получено интегральное преобразование (21), описывающее параксиальное распространение светового пучка в планарной градиентной среде с линейной зависимостью диэлектрической проницаемо-

сти от поперечной координаты. Показано, что распространение света на расстояние z в такой среде эквивалентно прохождению через призму, сила которой пропорциональна z , последующему распространению в однородной среде с показателем преломления n_0 , повторному прохождению через упомянутую призму, и дополнительному постоянному фазовому набегу, зависящему кубически от пройденного расстояния z .

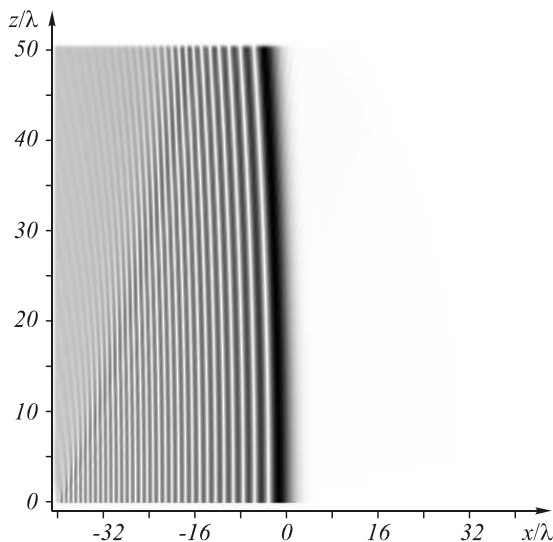


Рис. 3. Усреднённая по времени интенсивность в плоскости Oxz прямолинейного пучка Эйри в среде (3)

2. Показано, что при распространении гауссова пучка в градиентной среде (3) его центр смещается по параболе пропорционально z^2 , а его радиус совпадает с радиусом гауссова пучка, распространяющегося в однородной среде с показателем преломления на оптической оси среды (3).

3. С помощью полученного интегрального преобразования (21) и начального поля (32) получено явное выражение для комплексной амплитуды пучка Эйри в планарной среде с линейным профилем (33), которое совпадает с выражением, полученным в [14] другим способом.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 8027), грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-4128.2012.9), молодого кандидата наук (МК-3912.2012.2) и молодого доктора наук (МД-1929.2013.2), а также грантов РФФИ (12-07-00269, 12-07-31117, 13-07-97008).

Литература

1. Дифракционная нанофотоника / под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2011. – 680 с.
2. **Luneburg, R.K.** *Mathematical Theory of Optics* / R.K. Luneburg – Berkeley: University of California Press, 1966.
3. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon / Y. Zhang, L. Wang and

- C. Zheng // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22. – P. 2542-2546.
4. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – University Science, 1986.
5. **Ozaktas, H.** Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics / H. Ozaktas, A. Koç, I. Sari and M. Kutay // *Opt. Lett.* – 2006. – Vol. 31. – P. 35-37.
6. **Koç, A.** Fast and accurate computation of two-dimensional non-separable quadratic-phase integrals / A. Koç, H. Ozaktas and L. Hesselink // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2010. – Vol. 27. – P. 1288-1302.
7. **Котляр, В.В.** Операторное описание параксиальных световых полей / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, Я. Ванг // *Компьютерная оптика.* – 2001. – Т. 21. – С. 45-52.
8. **Khonina, S.N.** Propagation of laser vortex beams in a parabolic optical fiber / S.N. Khonina, A.S. Striletz, A.A. Kovalev and V.V. Kotlyar // *Proc. SPIE.* – 2009. – Vol. 7523. – P. 7523B.
9. **Bandres, M.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M. Bandres and J. Gutiérrez-Vega // *Opt. Express.* – 2007. – Vol. 15. – P. 16719-16728.
10. **Стрилец, А.С.** Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2008. – Т. 32, № 1. – С. 33-38.
11. **Efremidis, N.K.** Ary trajectory engineering in dynamic linear index potentials / N.K. Efremidis // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 3006-3008.
12. **Kalnins, E.G.** Lie theory and separation of variables. 5. The equations $iU_t + U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - c/x^2 U = 0$ / E.G. Kalnins and W. Miller Jr. // *J. Math. Phys.* – 1974. – Vol. 15. – P. 1728-1737.
13. **Berry, M.V.** Nonspreading wave packets / M.V. Berry and N.L. Balazs // *Am. J. Phys.* – 1979. – Vol. 47. – P. 264-267.
14. **Ye, Zh.** Acceleration control of Airy beams with optically induced refractive-index gradient / Zh. Ye, S. Liu, C. Lou, P. Zhang, Y. Hu, D. Song, J. Zhao, Z. Chen // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 3230-3232.
15. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou and D.N. Christodoulides // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32. – P. 979-981.
16. **Touam, T.** Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide / T. Touam and F. Yergeau // *Appl. Opt.* – 1993. – Vol. 32. – P. 309-312.
17. **Неганов, В.А.** Линейная макроскопическая электродинамика / В.А. Неганов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой – М.: Радио и связь, 2000. – 512 с.

References

1. *Diffractive nanophotonics* / Ed. by V.A. Soifer. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2011. – 680 p. – (In Russian).
2. **Luneburg, R.K.** *Mathematical Theory of Optics* / R.K. Luneburg – Berkeley: University of California Press, 1966.
3. **Zhang, Y.** Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon / Y. Zhang, L. Wang and C. Zheng // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22. – P. 2542-2546.
4. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – University Science, 1986.
5. **Ozaktas, H.** Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics / H. Ozaktas, A. Koç, I. Sari and M. Kutay // *Opt. Lett.* – 2006. – Vol. 31. – P. 35-37.
6. **Koç, A.** Fast and accurate computation of two-dimensional non-separable quadratic-phase integrals / A. Koç, H. Ozaktas

- tas and L. Hesselink // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27. – P. 1288-1302.
7. **Kotlyar, V.V.** Operator description of paraxial light fields / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, Y. Wang // Computer optics – 2001. – Vol. 21. – P. 45-52. – (In Russian).
 8. **Khonina, S.N.** Propagation of laser vortex beams in a parabolic optical fiber / S.N. Khonina, A.S. Striletz, A.A. Kovalev and V.V. Kotlyar // Proc. SPIE. – 2009. – Vol. 7523. – P. 7523B.
 9. **Bandres, M.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M. Bandres and J. Gutiérrez-Vega // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 16719-16728.
 10. **Striletz, A.S.** Matching and research of methods, based on differential and integral operators of laser beams propagation in weakly inhomogeneous media / A.S. Striletz, S.N. Khonina // Computer optics. – 2008. – Vol. 32, N 1. – P. 33-38. – (In Russian).
 11. **Efremidis, N.K.** Ary trajectory engineering in dynamic linear index potentials / N.K. Efremidis // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36. – P. 3006-3008.
 12. **Kalnins, E.G.** Lie theory and separation of variables. 5. The equations $iU_t + U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - cx^2U = 0$ / E.G. Kalnins and W. Miller Jr. // J. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15. – P. 1728-1737.
 13. **Berry, M.V.** Nonspreading wave packets / M.V. Berry and N.L. Balazs // Am. J. Phys. – 1979. – Vol. 47. – P. 264-267.
 14. **Ye, Zh.** Acceleration control of Airy beams with optically induced refractive-index gradient / Zh. Ye, S. Liu, C. Lou, P. Zhang, Y. Hu, D. Song, J. Zhao, Z. Chen // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36. – P. 3230-3232.
 15. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou and D.N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 979-981.
 16. **Touam, T.** Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide / T. Touam and F. Yergeau // Appl. Opt. – 1993. – Vol. 32. – P. 309-312.
 17. **Neganov, V.A.** Linear macroscopic electrodynamics / V.A. Neganov, S.B. Raevsky, G.P. Yarovoy – Moscow: "Radio i svyaz" Publisher, 2000. – 512 p. – (In Russian).

INTEGRAL TRANSFORM FOR GRADIENT-INDEX MEDIA WITH LINEAR DEPENDENCE OF DIELECTRIC PERMITTIVITY ON TRANSVERSE CARTESIAN COORDINATES

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, D.S. Kalinkina²

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

We have obtained an integral transform describing paraxial propagation of a light beam in gradient-index media with linear dependence of dielectric permittivity on transverse Cartesian coordinates. We have shown that propagation of light in such media is equivalent to passing through the prism, propagating in homogeneous media and again passing through the same prism. We have also shown that for the Gaussian beam, propagating in such media, its center is being shifted along a parabola, its radius is coinciding with radius of the Gaussian beam in homogeneous media.

Key words: Gradient-index media, integral transform, ABCD-transform, paraxial Helmholtz equation.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 185 этого номера.

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 154 этого номера.



Калинкина Дарья Сергеевна, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Соискатель каф. ТК СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика.

Darya Sergeevna Kalinkina (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering Faculty. She is working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics.

Поступила в редакцию 16 марта 2013 г.