РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Найдено в квадратурах решение уравнения распространения оптических импульсов в волоконных световодах.

Ключевые слова: волоконный световод, уравнение распространения, решение в квадратурах, оптический импульс, солитонное решение.

Введение

Поле оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, имеет вид [1]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x F(x,y)A(z,t)\exp\left\{i\left(\beta_o z-\omega_o t\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $F(x,y)$ – обычно гауссовская функция вида $\exp\left\{-(x^2+y^2)/w^2\right\}$ с характерным размером моды w, $A(z,t)$ – комплексная огибающая импульса, ω_o – несущая частота, β_o – центральное волновое число.

Огибающая $A(z,t)$ является медленно изменяющейся функцией своих аргументов, что означает малость её относительных изменений на интервалах времени порядка $1/\omega_o$ и расстояниях порядка $1/\beta_o$.

Для этой функции выведено уравнение [1], [2]

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=i(\Delta\beta)A, \qquad (2)$$

называемое уравнением распространения. Правая часть этого уравнения описывает оптические потери и нелинейные эффекты посредством функции $\Delta\beta(|A|^2)$, которая выражается через нелинейную часть показателя преломления Δn с помощью формулы

$$\Delta\beta=\frac{k_o\iint\Delta n\left|F(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\left|F(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad (3)$$

где $k_o=\omega_o/c$. Коэффициенты в (2) имеют простой физический смысл: $\beta_1=1/v_g$ – величина, обратная групповой скорости, а β_2 – дисперсия групповой скорости. В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией от $|A|^2$. Уравнение (2) справедливо для импульсов длительностью $>0{,}1nc$, что соответствует квазимонохроматическому приближению.

Стандартный метод решения

Уравнение (2) обычно решают следующим образом. При малых пиковых значениях интенсивности вводимого излучения нелинейную часть показателя преломления представляют степенным рядом

$$\Delta n=n_2\left|\boldsymbol{E}\right|^2+n_4\left|\boldsymbol{E}\right|^4+\cdots,$$

что согласно (3) приводит к степенному разложению функции $\Delta\beta$:

$$\Delta\beta=\gamma|A|^2+\mu|A|^4+\cdots, \qquad (4)$$

где параметры γ и μ зависят от характеристик световода. При малых интенсивностях оптического поля вторым слагаемым пренебрегают; с помощью нестандартной замены переменных [1]: $\tau=(t-z/v_g)/T_o$, где T_o – начальная длительность импульса; $A(z,t)=\sqrt{P_o}U(z,\tau)$, где P_o – пиковая мощность начального импульса; $\xi=z/L_D$, где $L_D=T_o^2/|\beta_2|$ – дисперсионная длина, уравнение (2) обезразмеривается и принимает вид

$$i\frac{\partial U}{\partial\xi}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}-N^2|U|^2U,$$

где $N^2=\gamma P_o T_o^2/|\beta_2|$. Наконец, после замены $U=u/N$ получается «перевёрнутое» безразмерное нелинейное уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью

$$i\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+|u|^2u=0,$$

которое решается методом обратной задачи рассеяния. Фундаментальный солитон имеет вид

$$u(\xi,\tau)=\frac{\exp\{i\xi/2\}}{ch\tau}.$$

После всех обратных подстановок находим однопараметрическое семейство решений

$$A=\sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma T_o^2}}\cdot\frac{\exp\{iz/2L_D\}}{ch\dfrac{t-z/v_g}{T_o}}.$$

Альтернативный метод решения

Целью данной работы является решение уравнения (2) в квадратурах. Решение будет проводиться в лабораторной системе отсчёта без конкретизации функции нелинейного отклика $\Delta\beta$, т.е. в максимально общем виде. Подстановка

$$A(z,t)=\sqrt{I}\exp\{i\,qz\}, \qquad (5)$$

где q – малая поправка к центральному волновому числу β_o, в (2) приводит после отделения вещественной и мнимой частей к следующим двум уравнениям для оптической интенсивности огибающей $I(z,t)=|A(z,t)|^2$:

$$\frac{\partial I}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial I}{\partial t}=0, \tag{6}$$

$$\beta_2\left[2I\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)^2\right]=-8qI^2+8I^2\Delta\beta(I). \tag{7}$$

Таким образом, на одну функцию получено два уравнения. Уравнение (6) является линейным и однородным, что позволяет написать его общее решение, являющееся произвольной дифференцируемой функцией $I=I(s)$, где

$$s(z,t)=z-z_o-v_g t. \tag{8}$$

Здесь учтено, что $\beta_1=1/v_g$. Иными словами, уравнение (6) определяет аргумент искомой функции, оставляя её вид произвольным. Так как

$$\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}\frac{\partial s}{\partial t}=-v_g\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s};$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=v_g^2\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}s^2},$$

то (7) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$2I\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}\right)^2=\frac{8I^2}{\beta_2 v_g^2}\left[\Delta\beta(I)-q\right]. \tag{9}$$

Уравнение второго порядка (9) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}=4IP,$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}=-2P^2-\frac{q}{\beta_2 v_g^2}+\frac{\Delta\beta(I)}{\beta_2 v_g^2}.$$

Последняя система является гамильтоновой с гамильтонианом вида

$$H(I,P)=\left(2P^2+\frac{q}{\beta_2 v_g^2}\right)I-\frac{G(I)}{\beta_2 v_g^2}, \tag{10}$$

где

$$G(I)=\int\Delta\beta(I)\,\mathrm{d}I, \tag{11}$$

т.е. $G(I)$ является первообразной функции нелинейного отклика.

Следовательно, для уравнения (9) существует частица-аналог, подчиняющаяся классическим уравнениям динамики. Иными словами, (9) является уравнением Эйлера–Лагранжа для механической частицы-аналога.

Хорошо известно [3], [4], что решения $I(s)$, асимптотически стремящиеся к нулю на бесконечности, существуют (если они, конечно, существуют) при нулевой энергии механической частицы-аналога, т.е. при $H=0$. Подставляя в (10) выражение $P=(\mathrm{d}I/\mathrm{d}s)/4I$, являющееся следствием первого уравнения системы, и полагая $H(I,P)=0$, получим

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}=\frac{2\sqrt{2}}{v_g}\sqrt{\left(IG(I)-qI^2\right)/\beta_2}.$$

Интегрируя это выражение, найдём решение уравнения (9) в квадратурах:

$$\int\frac{\mathrm{d}I}{I\sqrt{\left(G(I)/I-q\right)/\beta_2}}=\frac{2\sqrt{2}}{v_g}s. \tag{12}$$

Аддитивная постоянная интегрирования в (12) учтена в значении z_o из (8). Формула (12) в неявном виде определяет двухпараметрическое семейство решений.

Приложения альтернативного метода

Применим полученный результат к кварцевому волноводу в случае керровской нелинейности: $\Delta\beta=\gamma I;\ G=\gamma I^2/2$. Тогда из (12) имеем

$$\int\frac{\mathrm{d}I}{I\sqrt{q-\gamma I/2}}=\frac{2\sqrt{q}s}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}.$$

Вычисляя интеграл [5] и обращая полученное выражение, находим

$$I=\frac{2q/\gamma}{ch^2\left[\dfrac{\sqrt{2q}s}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}\right]}.$$

Из (4) следует, что числитель в последней формуле имеет размерность B^2/m^2 и является наибольшим значением функции $I(s)$. Поэтому $2q/\gamma=E_o^2$, где E_o – пиковое значение напряжённости. Следовательно,

$$I=E_o^2/ch^2\left[\frac{E_o\sqrt{\gamma}s}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}\right].$$

По формуле (5) находим окончательный результат

$$A=\frac{E_o\exp\left\{iz\gamma E_o^2/2\right\}}{ch\left[\dfrac{E_o\sqrt{\gamma}(z-z_o-v_g t)}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}\right]}.$$

В допированных волокнах с многослойной оболочкой второй член в формуле (4) сравним с первым, а при достаточно больших интенсивностях вводимого излучения становится доминирующим. В этом случае имеем некерровскую нелинейность: $\Delta\beta=\mu I^2;\quad G=\mu I^3/3$. Вычисляя интеграл (12) для этого случая и обращая полученное выражение, находим

$$I=\frac{E_o^2}{ch\left[\dfrac{2\sqrt{2\mu}\,E_o^2 s}{\sqrt{3|\beta_2|}\,v_g}\right]},\ \text{где}\ E_o^2=3q/\mu.$$

И, наконец, для смешанной нелинейности: $\Delta\beta = \gamma I + \mu I^2$; $G = \gamma I^2/2 + \mu I^3/3$, вычисляя интеграл в (12) с помощью подстановки $1/I = \xi$, получаем

$$I = \frac{E_o^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu E_o^2}{3\gamma}}\, ch\left[\frac{\sqrt{2\gamma}\, E_o s}{\sqrt{|\beta_2|}\, v_g}\right]},$$

где $E_o^2 = 4q/\gamma$.

Отметим пертурбативность этого результата относительно μ и непертурбативность относительно γ.

Заключение

Таким образом, решение задачи о распространении оптических импульсов в одномодовых волоконных световодах, описываемой дифференциальным уравнением в частных производных (2), сводится к вычислению первообразной в левой части уравнения (12) и обращению полученного выражения, что является, несомненно, более простой задачей.

Для графического анализа обращение полученного выражения не требуется.

Литература

1. **Агравал, Г.П.** Нелинейная волоконная оптика / Г.П. Агравал. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics / G.P. Agrawal. – Academic Press, 2007. – 478 p.
3. **Раджараман, Р.** Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
4. **Степанов, В.В.** Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
5. **Двайт, Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

References

1. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics / G.P. Agrawal. – Moscow: "Mir" Publisher, 1996. – 324 p. – (In Russian).
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics / G.P. Agrawal. – Academic Press, 2007. – 478 p.
3. **Rajaraman, R.** Solitons and instantons in quantum field theory / R. Rajaraman. – Moscow: "Mir" Publisher, 1985. – 416 p. – (In Russian).
4. **Stepanov, V.V.** Course of differential equations. – Moscow: "GITTL" Publisher, 1953. – 468 p. – (in Russian).
5. **Dwight, H.B**. Tables of integrals and other mathematical data / H.B. Dwight. – Moscow: " Nauka" Publisher, 1977. – 224 p. – (In Russian).

SOLUTION OF PULSE – PROPAGATION EQUATION FOR OPTICAL FIBER IN QUADRATURES

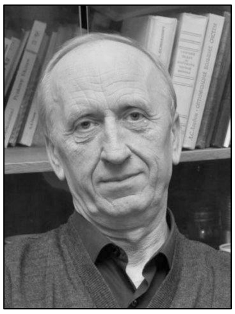
I.V. Alimenkov, Yu.G .Pchelkina
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Reseach University)

Abstract

It is found in quadratures the solution of pulse – propagation eauation for optical fiber by straight method.

Key words: optical fiber, pulse – propagation eauation, solution in quadratures, optical solitons.

Сведения об авторах



Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры «Прикладная математика» СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: i-alimenkov@mail.ru .

Ivan Vasilyievich Alimenkov, 1949 year of birth. In 1977 has graduated with honours Kuibyshev State University on a speciality "Physics". Candidate in Physics and Mathematics, works as *associated professor* of sub-department "Applied Mathematics" SSAU. Research interests – nonlinear physics.

Пчёлкина Юлия Жиганшевна, 1980 года рождения. В 2002 году окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейные уравнения.

E-mail: musina@yandex.ru .

Yuliya Giganshevna Pchelkina, 1980 year of birth. In 2002 has graduated Ulyanovsk State University on a speciality "Applied Mathematica". Candidate in Physics and Mathematics, works as *associated professor* of sub-department "Applied Mathematics" SSAU. Research interests – nonlinear equations.

Поступила в редакцию 15 мая 2013 г.