

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАМЕДЛЯЮЩИХСЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В УСКОРЯЮЩИЕСЯ

Ковалёв А.А., Котляр В.В., Засканов С.Г.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Предложен метод получения решения параксиального уравнения Гельмгольца, описывающего двумерные световые пучки, ускоряющиеся на конечном отрезке траектории. Метод состоит в комплексном сопряжении и сдвиге вдоль продольной координаты (параллельной оптической оси) комплексной амплитуды известных замедляющихся световых пучков. Этим методом получены ускоряющиеся по траектории корневой параболы пучки Френеля и Лапласа, а также пучок «половины Бесселя». Замечено, что хорошо известные пучки Эрмита–Гаусса тоже являются ускоряющимися по гиперболической траектории световыми пучками. В отличие от известных бездифракционных ускоряющихся пучков Эйри рассмотренные здесь пучки при распространении сходятся в конце ускоряющегося отрезка траектории.

Ключевые слова: ускоряющийся лазерный пучок, траектория пучка, пучок Френеля, пучок Лапласа.

Введение

Недавно [1] рассмотрены непараксиальные сохраняющие свою форму ускоряющиеся пучки Вебера, которые распространяются вдоль параболической траектории. Эти пучки Вебера похожи на пучки «половины Бесселя» [2], но в отличие от последних описываются аналитическим выражением. Пучки Вебера–Эрмита также известны как решения параксиального уравнения распространения [3]. В [4] рассматривается общая теория 3D непараксиальных ускоряющихся пучков на основе известных решений уравнения Гельмгольца в параболических, вытянутых и сплюснутых сфероидальных координатах. Эти пучки распространяются по дуге окружности. В [5] предложены пучки Эйри, распространяющиеся с неоднородным ускорением по гиперболической траектории. Хотя эти пучки не сохраняют свою форму (расходятся при распространении), они могут иметь более изогнутую траекторию на конечном её участке, чем обычные пучки Эйри [6].

В этой работе рассмотрен другой подход к формированию ускоряющихся пучков. Он заключается в следующем. Известны параксиальные 2D световые поля, у которых аргумент функции комплексной амплитуды зависит от переменных, как x^2/z , где x – поперечная координата, а z – продольная координата. Это, например, световое поле, которое формируется при дифракции плоской волны на угловой фазовой ступеньке [7]. Или хорошо известное решение задачи дифракции на краю непрозрачного экрана [8]. В этой работе мы рассмотрим и другие решения параксиального уравнения распространения. Световые поля, комплексная амплитуда которых имеет аргумент вида x^2/z , распространяются по траектории корневой параболы $x = z^{1/2}$. Такие пучки являются замедляющимися, так как «ускорение» (вторая производная вдоль траектории) $x'' = -z^{-3/2}$ имеет противоположный знак со скоростью (первой производной вдоль траектории) $x' = z^{-1/2}$. Если же амплитуду такого светового поля на расстоянии z_0 заменить на комплексно сопряжённую и сдвинуть начало оптической оси в точку z_0 , то световое

поле с такой амплитудой будет распространяться с ускорением по траектории $x = (z_0 - z)^{1/2}$. В этой работе приводятся аналитические выражения для комплексных амплитуд таких ускоряющихся пучков. Кроме того, рассмотрены параксиальные пучки «половины Бесселя», которые отличаются от непараксиальных [2].

1. Ускоряющиеся пучки

Пусть для каждого фиксированного пройденного расстояния z координата максимума интенсивности некоторого лазерного пучка имеет вид $x_{\max}(z)$. Чтобы траектория пучка обладала ускорением на некотором участке, необходимо, чтобы первая и вторая производные координаты максимума x_{\max} по пройденному расстоянию z имели один знак [5]:

$$\left(\frac{dx_{\max}}{dz}\right)\left(\frac{d^2x_{\max}}{dz^2}\right) > 0. \quad (1)$$

Наиболее широко известными ускоряющимися пучками являются пучки Эйри, комплексная амплитуда которых имеет вид [6]:

$$E(x, z) = Ai\left(s - \xi^2/4\right) \exp\left(is\xi/2 - i\xi^3/12\right), \quad (2)$$

где (x, z) – декартовы координаты, $s = x/x_0$, $\xi = z/(kx_0^2)$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, x_0 – произвольный масштабирующий множитель, $Ai(x)$ – функция Эйри [9, раздел 10.4]. Координаты максимумов интенсивности таких пучков имеют вид:

$$x_{\max} = x_0 y_m + \frac{z^2}{4k^2 x_0^3}, \quad (3)$$

где y_m – точка m -го максимума функции $[Ai(x)]^2$. Тогда $dx_{\max}/dz = z/(2k^2 x_0^3)$ и $d^2x_{\max}/dz^2 = 1/(2k^2 x_0^3)$. То есть условие (1) выполняется для любых расстояний $z > 0$, причём ускорение d^2x_{\max}/dz^2 имеет постоянную величину. Ниже рассмотрим лазерные пучки, также обладающие ускорением, но которое не является постоянным и уменьшается при распространении пучка.

1.1. Пучки Эйри с гиперболической траекторией

В работе [5] рассмотрены пучки Эйри с гиперболической траекторией, которые в начальной плоскости $z=0$ имеют комплексную амплитуду

$$E(x, 0) = \exp[i\alpha(x/x_0)^3 + i\beta(x/x_0)], \tag{4}$$

где x_0 – масштабирующий множитель, а α и β – безразмерные параметры. Траектория такого пучка в зоне дифракции Френеля имеет вид:

$$x_{\max} = \frac{(\beta - y_m \sqrt[3]{3\alpha})z}{kx_0} - \frac{kx_0^3}{12\alpha z}. \tag{5}$$

Используя условие (1), в работе [5] было показано, что ускорение возникает на участке

$$z > z_1 = \frac{kx_0^2}{2\sqrt{3\alpha(y_m \sqrt[3]{3\alpha} - \beta)}}, \tag{6}$$

причём только в случае, когда $\text{sign}(\alpha)\beta < y_m < (3|\alpha|)^{1/3}$. Ускорение такого пучка спадает пропорционально z^{-3} : $d^2x_{\max}/dz^2 = -kx_0^3/(6\alpha z^3)$.

1.2. Пучки Эрмита–Гаусса

Широко известные пучки Эрмита–Гаусса [10], оказывается, также обладают ускорением. Действительно, пусть в начальной плоскости $z=0$ световое поле имеет комплексную амплитуду

$$E(x, z=0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) H_n\left(\frac{x}{a}\right), \tag{7}$$

где (x, z) – декартовы координаты, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n и a – порядок и масштаб полинома Эрмита. Тогда, применив преобразование Френеля, можно показать, что на расстоянии z от начальной плоскости сформируется поле со следующим распределением комплексной амплитуды [11]:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2pz}} \exp\left[-\frac{k}{2z}\left(\frac{k}{2zp} - i\right)x^2\right] \times \left(1 - \frac{1}{pa^2}\right)^{n/2} H_n\left[\frac{-ikx}{2z\sqrt{(pa)^2 - p}}\right], \tag{8}$$

где $p = 1/w^2 - ik/(2z)$.

Рассмотрим для простоты случай, когда $n=1$. Тогда интенсивность пучка (8) в плоскости, находящейся на расстоянии z от начальной, равна:

$$I(x, z) = |E(x, z)|^2 = \frac{k^3 x^2}{2a^2 |p|^3 z^3} \exp\left(-\frac{k^2 \text{Re } p}{2z^2 |p|^2} x^2\right). \tag{9}$$

Продифференцировав обе части (9) по переменной x , получим необходимое условие для экстремумов интенсивности:

$$2x = \frac{k^2 \text{Re } p}{z^2 |p|^2} x^3. \tag{10}$$

Случай $x=0$ соответствует минимуму (так как интенсивность $I(0, z)$ равна нулю), а координаты максимумов равны

$$x_{\max} = \pm \sqrt{\frac{z^2 + z_0^2}{kz_0}}, \tag{11}$$

где $z_0 = kw^2/2$ – расстояние Рэлея.

Нетрудно показать, что кривая с максимальной интенсивностью является гиперболой. Получим производные x_{\max} по z первого и второго порядков:

$$\frac{dx_{\max}}{dz} = \pm \frac{z}{\sqrt{kz_0} \sqrt{z^2 + z_0^2}}, \tag{12}$$

$$\frac{d^2x_{\max}}{dz^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{kz_0}} \frac{z_0^2}{(z^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Из (12) видно, что при всех $z > 0$ произведение $(dx_{\max}/dz)(d^2x_{\max}/dz^2)$ положительно, т.е. пучок Эрмита–Гаусса обладает ускорением, которое, подобно рассмотренным выше пучкам Эйри с гиперболической траекторией, кубически убывает с пройденным расстоянием z . Наличие ускорения у обеих ветвей пучка Эрмита–Гаусса первого порядка может быть заметно при малых расстояниях z . На рис. 1 показана интенсивность такого пучка в плоскости Oxz , рассчитанная методом распространения пучка (ВРМ). Два локальных максимума пучка Эрмита–Гаусса на рис. 1 распространяются симметрично относительно оптической оси по двум гиперболическим траекториям с ускорением.

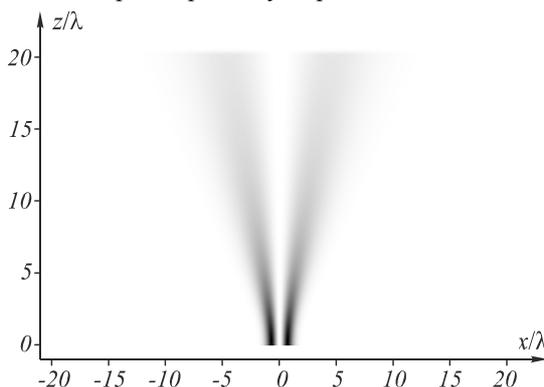


Рис. 1. Ускоряющийся пучок Эрмита–Гаусса ($\lambda = 532$ нм, $w = \lambda$, $a = 2\lambda$, $n = 1$) (негатив)

Заметим, что с ростом номера n у пучка Эрмита–Гаусса (при $a = w/\sqrt{2}$) растёт радиус (ширина) пучка и координата крайних нулей интенсивности (при разных расстояниях z) описывается оценкой сверху:

$$|x_{\max}^n| \leq \frac{w}{2} \sqrt{n(n-1)} \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}},$$

из которой следует, с учётом (12), что величина ускорения пучка Эрмита–Гаусса с ростом номера n растёт линейно при больших n .

Других парааксиальных 2D ускоряющихся пучков, которые описываются аналитически, пока не известно. Поэтому в разделе 3 показано, как можно получить ускоряющиеся лазерные пучки из замедляющихся.

2. Замедляющиеся пучки

В отличие от рассмотренных выше ускоряющихся пучков (2), (4), (7), для замедляющихся пучков необ-

ходимо, чтобы первая и вторая производные координаты максимума интенсивности x_{\max} по пройденному расстоянию z были разного знака:

$$\left(\frac{dx_{\max}}{dz}\right)\left(\frac{d^2x_{\max}}{dz^2}\right) < 0. \tag{13}$$

Рассмотрим примеры таких пучков.

2.1. Дифракция плоской волны на непрозрачном полубесконечном экране

Пусть плоская волна распространяется вдоль оптической оси z и при $z=0$ проходит через полубесконечную плоскую апертуру, пропускающую свет в области $x < 0$ (x – координата в плоскости апертуры). Непосредственно за ней комплексная амплитуда будет равна:

$$E(x, z=0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

После прохождения светом расстояния z его комплексная амплитуда будет определяться преобразованием Френеля от поля (14):

$$E(x, z) = \frac{1}{2} \{ [1 - C(\xi) - S(\xi)] + i [C(\xi) - S(\xi)] \}, \tag{15}$$

где $\xi = \sqrt{2/(\lambda z)}x$, а $C(\xi)$ и $S(\xi)$ – интегралы Френеля:

$$C(\xi) = \int_0^\xi \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \tag{16}$$

$$S(\xi) = \int_0^\xi \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Координаты максимумов интенсивности такого пучка x_{\max} равны:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \xi_m, \tag{17}$$

где ξ_m – координата m -го максимума функции $I(\xi) = [1 - C(\xi) - S(\xi)]^2 + [C(\xi) - S(\xi)]^2$. Вычислим первую и вторую производные координаты максимума x_{\max} по пройденному расстоянию z :

$$\frac{dx_{\max}}{dz} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2z}} \xi_m, \tag{18}$$

$$\frac{d^2x_{\max}}{dz^2} = -\frac{1}{4z} \sqrt{\frac{\lambda}{2z}} \xi_m.$$

Из (18) видно, что для всех $z > 0$ выполняется условие (13). Замедление каждого максимума видно на рис. 2, на котором показана интенсивность пучка (15).

2.2. Двумерные гипергеометрические пучки и пучки Бесселя

Подобно тому, как это сделано в [12], будем искать решение параксиального уравнения распространения

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \tag{19}$$

в виде $E(x, z) = x^p z^q F(s x^m z^n)$, где $F(x)$ – некоторая функция, s – масштабирующий множитель. Сведя полученное дифференциальное уравнение второго порядка к уравнению Куммера, получим следующее

выражение для комплексной амплитуды 2D аналога 3D обобщённой гипергеометрической моды [13]:

$$E(x, z) = z^{-a} {}_1F_1\left(a, \frac{1}{2}, \frac{ikx^2}{2z}\right), \tag{20}$$

где a – произвольная постоянная, ${}_1F_1(a, b, x)$ – функция Куммера [9]

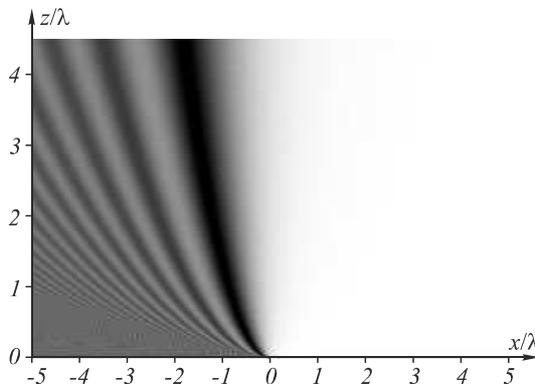


Рис. 2. Интенсивность в плоскости Oxz при дифракции плоской волны на полубесконечной апертуре ($\lambda = 532$ нм; $-5\lambda \leq x \leq 5\lambda$; $0,1\lambda \leq z \leq 5\lambda$) (негатив)

Известно, что производная любого решения уравнения (19) по любой декартовой координате также является решением уравнения (19). Поэтому можно рассмотреть световой пучок с амплитудой

$$E(x, z) = xz^{-a} {}_1F_1\left(a, \frac{3}{2}, \frac{ikx^2}{2z}\right). \tag{21}$$

В частном случае, при $a = 3/4$, из (21) следует решение уравнения (19) в виде пучка Бесселя дробного порядка:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{x}{z+z_0}} J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{kx^2}{4(z+z_0)}\right] \exp\left[\frac{ikx^2}{4(z+z_0)}\right], \tag{22}$$

где z_0 – произвольная положительная постоянная (чтобы не возникало особенности в плоскости $z = 0$). При получении (22) было использовано тождество 13.6.1 из [9]. Координаты максимумов интенсивности такого пучка имеют вид:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{4(z+z_0)}{k}} y_m, \tag{23}$$

где y_m – m -й корень уравнения

$$J_{1/4}(y) [J_{1/4}(y) + 4J'_{1/4}(y)] = 0.$$

Зависимость (23) подобна зависимости (17), т.е. x_{\max} пропорционально $z^{1/2}$. Поэтому пучок (22) является замедляющимся, что видно из рис. 3, на котором показана интенсивность такого пучка, рассчитанная ВРМ-методом ($\lambda = 532$ нм, $z_0 = 20\lambda$, область моделирования $-20\lambda \leq x \leq 20\lambda$, $0 \leq z \leq 80\lambda$).

3. Преобразование замедляющихся пучков в ускоряющиеся

Из (1) и (13) нетрудно заметить, что простая замена переменных $z \rightarrow z_0 - z$ приводит к смене ускорения на замедление и наоборот. В самом деле, рассмотрим световой пучок, комплексная амплитуда которого по-

лучается из (15) комплексным сопряжением и заменой ξ на $\xi = \sqrt{2/[\lambda(z_0 - z)]}x$:

$$E(x, z < z_0) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &[1 - C(\xi) - S(\xi)] - \\ &-i[C(\xi) - S(\xi)] \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

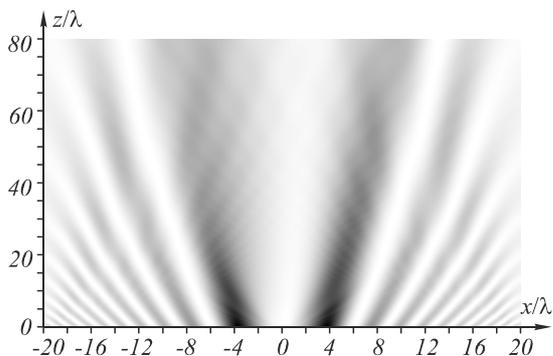


Рис. 3. Интенсивность в плоскости Oxz светового пучка (22)

Световой пучок (24) будем называть пучком Френеля. Используя пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{2}, \quad (25)$$

получим, что вблизи плоскости $z = z_0$ (вблизи фокальной плоскости), но при $z < z_0$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(x, z \rightarrow z_0 - 0) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Интенсивность светового пучка (24) в плоскости Oxz показана на рис. 4.

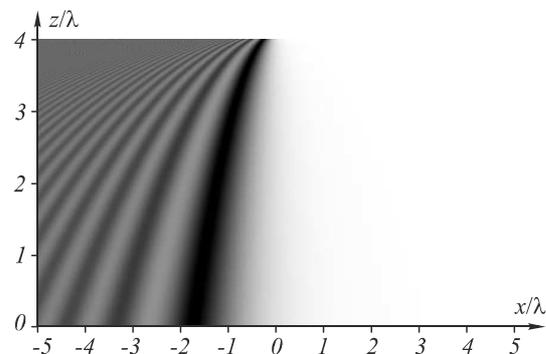


Рис. 4. Интенсивность светового пучка (24) в плоскости Oxz (длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние от $z = 0$ до фокальной плоскости равно $z_0 = 4,1\lambda$. Область моделирования $-5\lambda \leq x \leq 5\lambda; 0 \leq z \leq 4\lambda$)

Непосредственно за плоскостью $z = z_0$ аргументы ξ интегралов Френеля в (24) становятся мнимыми, так как $2/[\lambda(z_0 - z)] < 0$, причём мнимая часть может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому возможны два решения, из которых лишь одно удовлетворяет граничному условию $E(x, z \rightarrow z_0 + 0) = E(x, z \rightarrow z_0 - 0)$. Используя тождества для интегралов Френеля от мнимых переменных $C(iz) = iC(z)$ и $S(iz) = -iS(z)$ [9, выражения 7.3.18], можно показать, что за плоскостью $z = z_0$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(x, z > z_0) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &[1 - C(\eta) - S(\eta)] + \\ &+i[C(\eta) - S(\eta)] \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

где $\eta = \sqrt{2/[\lambda(z - z_0)]} \cdot x$.

Второе решение, равное

$$E(x, z > z_0) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &[1 + C(\eta) + S(\eta)] - \\ &-i[C(\eta) - S(\eta)] \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

не удовлетворяет граничному условию.

Из сравнения (24) и (27) видно, что световой пучок при $z < z_0$ ускоряется, фокусируясь при $z = z_0$ в равномерное полубесконечное пятно, а амплитуда при $z > z_0$ является зеркальным отражением амплитуды при $z < z_0$, т.е. распространяется с замедлением. На рис. 5а показана интенсивность светового пучка (24), (27) в плоскости Oxz , а на рис. 5б показано сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$. Рис. 5 получен путём расчёта ВРМ-методом при $\lambda = 532$ нм, $z_0 = 4\lambda$, область моделирования $-20\lambda \leq x \leq 20\lambda$, $0 \leq z \leq 8\lambda$. Осцилляции интенсивности в окрестности $x = 0$ объясняются ограниченной областью начального поля областью моделирования.

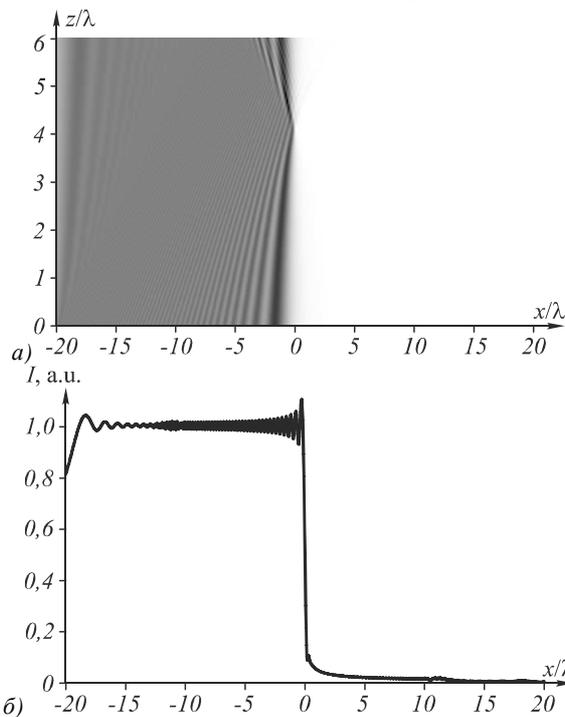


Рис. 5. Интенсивность светового пучка (24), (27), рассчитанная FDTD-методом: интенсивность в плоскости Oxz (а) и сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$ (б)

Аналогично, заменив в (22) $z + z_0$ на $z_0 - z$ и применив комплексное сопряжение, получим световой пучок, комплексная амплитуда которого в начальной плоскости ($z = 0$) равна

$$E(x, z = 0) = \sqrt{\frac{x}{z_0}} J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{kx^2}{4z_0} \right) \exp \left(-\frac{ikx^2}{4z_0} \right). \quad (29)$$

Задав начальное поле (29), с помощью ВРМ-метода была рассчитана интенсивность в плоскости Oxz свето-

вого пучка (при $\lambda = 532$ нм, $z_0 = 40\lambda$), который, как видно из рис. 6, фокусируется с ускорением. Возникающая при этом асимметрия фокусного пятна объясняется наличием скачка фазы на $\pi/2$ у поля (29) в точке $x=0$. Такая фокусировка с ускорением рассматривалась ранее в [14] для радиально-симметричного пучка Эйри.

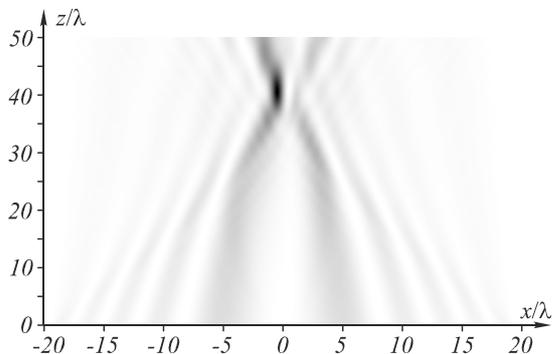


Рис. 6. Интенсивность (негатив) в плоскости Oxz ускоряющегося светового пучка с распределением комплексной амплитуды в начальной плоскости (29)

Приравняем нулю амплитуду поля в начальной плоскости при $x < 0$:

$$E(x, z = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{z_0}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{kx^2}{4z_0}\right) \exp\left(-\frac{ikx^2}{4z_0}\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (30)$$

На рис. 7 показана интенсивность пучка (30), полученная ВРМ-методом при тех же параметрах, что и на рис. 6.

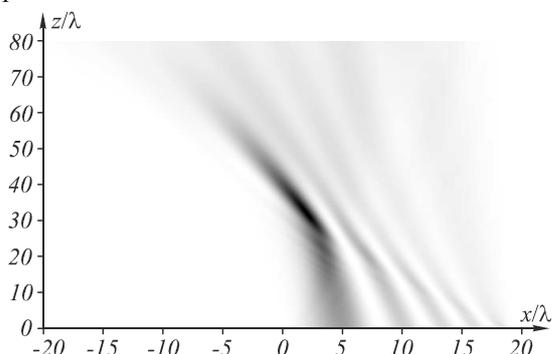


Рис. 7. Интенсивность (негатив) в плоскости Oxz ускоряющегося светового пучка с распределением комплексной амплитуды в начальной плоскости (30)

Для других порядков функции Бесселя в (30) вид картины аналогичный (рис. 8).

Из рис. 8 видно, что с ростом порядка функции Бесселя ускорение падает. Ускоряющиеся параксиальные пучки (30) аналогичны непараксиальным пучкам «половины Бесселя» [2], поэтому будем их называть параксиальными пучками «половины Бесселя».

Дифракция Гауссова пучка на полубесконечном непрозрачном экране

Рассмотрим ещё пример, когда замедляющийся пучок описывается аналитической функцией. Пусть Гауссов пучок с радиусом перетяжки w проходит через полубесконечную плоскую апертуру.

Непосредственно за апертурой комплексная амплитуда будет равна:

$$E(x, z = 0) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right), & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (31)$$

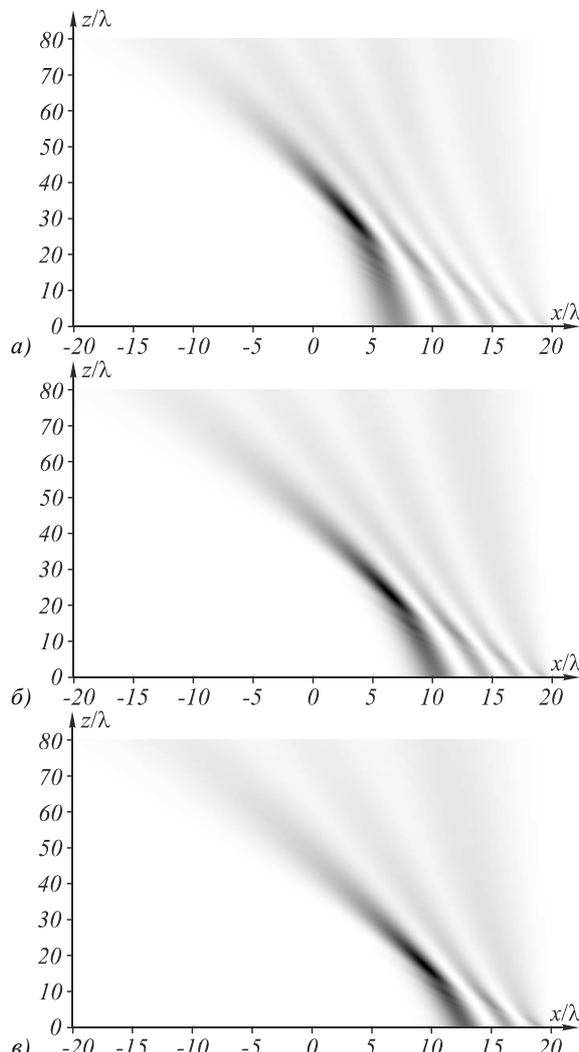


Рис. 8. Интенсивность (негатив) пучка (30) с разными порядками функции Бесселя: 1 (а), 3 (б) и 5 (в)

После прохождения светом расстояния z его комплексная амплитуда будет определяться преобразованием Френеля от поля (31) и примет вид [15]:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{8pz}} \exp\left[\frac{ikx^2}{2(z - iz_R)}\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{-ikx}{2\sqrt{pz}}\right), \quad (32)$$

где $p = 1/w^2 - ik/(2z)$, $z_0 = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt. \quad (33)$$

Уравнение (32) может быть приведено к виду:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{-ik}{8pz}} \exp\left(\frac{ikx^2}{2z}\right) \exp(-y^2) \operatorname{erfc}(iy), \quad (34)$$

где

$$y = \frac{-kx}{2\sqrt{p}z} = -\left(\frac{x}{w}\right)\left(\frac{z_0}{z}\right)\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{-1/4} \times \exp\left[i\frac{1}{2}\arctg\left(\frac{z_0}{z}\right)\right]. \quad (35)$$

При $z \rightarrow 0$ аргумент переменной y почти не зависит от z : $\arg(y) \approx \pi/4$. Поэтому уравнение траектории такого пучка на малых расстояниях z имеет вид:

$$x_{\max} = -w\eta_m \sqrt{\frac{2z}{z_0}}, \quad (36)$$

где η_m – m -й максимум функции $|\operatorname{erfc}[\eta(i-1)]|^2$. Это означает, что, подобно световому пучку (15), пучок (34) будет замедляющимся.

По аналогии с формированием равномерного распределения интенсивности на полуплоскости (с помощью пучка (24), (27)) сформируем распределение (31) в плоскости $z = z_0$ с помощью светового пучка со следующим распределением комплексных амплитуд:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{ik}{8p(z_0 - z)}} \exp\left[\frac{-ikx^2}{2(z_0 - z + iz_R)}\right] \times \operatorname{erfc}\left[\frac{ikx}{2\sqrt{p}(z_0 - z)}\right], \quad (37)$$

где $p = 1/w^2 + ik/[2(z_0 - z)]$. В (37) в качестве множителя входит интеграл вероятности, или интеграл Лапласа. Поэтому будем называть пучки (37) пучками Лапласа. Из вида траектории (36) следует, что пучок (37) также будет ускоряющимся вблизи плоскости $z = z_0$. Это можно заметить на рис. 9а, на котором показана интенсивность пучка (37) в плоскости Oxz . На рис. 9б показано сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- показано, что хорошо известные моды Эрмита–Гаусса и обобщённые пучки Эрмита–Гаусса (8) являются ускоряющимися пучками, то есть два крайних локальных максимума интенсивности, симметричных относительно оптической оси, распространяются по гиперболическим траекториям с неоднородным ускорением, которое уменьшается пропорционально кубу расстояния (12);
- предложен метод преобразования двумерных световых пучков, распространяющихся с замедлением, в ускоряющиеся световые пучки;
- рассмотрен ускоряющийся на конечном отрезке траектории пучок Френеля (24), который получен из комплексной амплитуды, описывающей дифракцию плоской волны на непрозрачном экране (15), путём комплексного сопряжения и сдвига по оптической оси;
- рассмотрен параксиальный ускоряющийся на конечном отрезке пучок «половины Бесселя» (30), который распространяется по траектории корневой параболы и получен из обобщённого гипергеометрического лазерного пучка (21) путём комплексного сопряжения, сдвига по оптической оси и «взятия половины»;

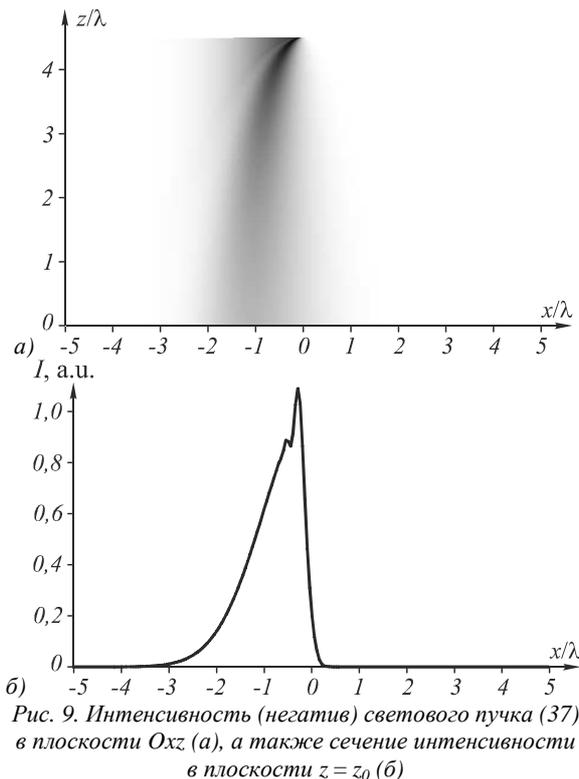


Рис. 9. Интенсивность (негатив) светового пучка (37) в плоскости Oxz (а), а также сечение интенсивности в плоскости $z = z_0$ (б)

- аналогично рассмотрен ускоряющийся на конечном отрезке пучок Лапласа (37), который получен на основе решения (32) задачи дифракции Гауссова пучка на непрозрачном экране путём комплексного сопряжения и сдвига по оптической оси комплексной амплитуды (32).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9) и молодого доктора наук (МД-1929.2013.2), а также грантов РФФИ 13-07-97008 и 14-07-31092.

Литература

1. **Bandres, M.A.** Nondiffracting accelerating waves: Weber waves and parabolic momentum / M.A. Bandres, B.M. Rodríguez-Lara // *New Journal of Physics*. – 2013. – V. 15. – P. 013054.
2. **Kaminer, I.** Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's equations / I. Kaminer, R. Bekenstein, J. Nemirovsky, M. Segev // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – V. 108. – P. 163901.
3. **Torre, A.** A note on the general solution of the paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2008. – V. 10. – P. 055006.
4. **Bandres, M.A.** Three-dimensional accelerating electromagnetic waves / M.A. Bandres, M.A. Alonso, I. Kaminer, M. Segev // *Opt. Express* – 2013. – V. 21(12). – P. 13917-13929.
5. **Kotlyar, V.V.** Airy beam with a hyperbolic trajectory / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Opt. Commun.* – 2014. – V. 313. – P. 290-293.
6. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // *Opt. Lett.* – 2007. – V. 32. – P. 979-981.
7. **Kotlyar, V.V.** Curved laser microjet in near field / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.A. Kovalev // *Appl. Opt.* – 2013. – V. 52(18). – P. 4131-4136.
8. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973.

9. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979.
 10. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // Proc. IEEE – 1966. – V. 54. – P. 1312-1329.
 11. **Котляр, В.В.** Орбитальный угловой момент суперпозиции двух обобщённых лазерных пучков Эрмита-Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 179-185.
 12. **Kotlyar, V.V.** Propagation of hypergeometric laser beams in a medium with the parabolic refractive index / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov // J. Opt. – 2013. – V. 313. – P. 290-293.
 13. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A. – 2008. – V. 25(1). – P. 262-270.
 14. **Papazoglou, D.G.** Observation of abruptly autofocusing waves / D.G. Papazoglou, N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides, S. Tzortakis // Opt. Lett. – 2011. – V. 32(10). – P. 1842-1844.
 15. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
- References**
1. **Bandres, M.A.** Nondiffracting accelerating waves: Weber waves and parabolic momentum / M.A. Bandres, B.M. Rodríguez-Lara // New Journal of Physics. – 2013. – V. 15. – P. 013054.
 2. **Kaminer, I.** Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's equations / I. Kaminer, R. Bekenstein, J. Nemirovsky, M. Segev // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 108. – P. 163901.
 3. **Torre, A.** A note on the general solution of the paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2008. – V. 10. – P. 055006.
 4. **Bandres, M.A.** Three-dimensional accelerating electromagnetic waves / M.A. Bandres, M.A. Alonso, I. Kaminer, M. Segev // Opt. Express – 2013. – V. 21(12). – P. 13917-13929.
 5. **Kotlyar, V.V.** Airy beam with a hyperbolic trajectory / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Opt. Commun. – 2014. – V. 313. – P. 290-293.
 6. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2007. – V. 32. – P. 979-981.
 7. **Kotlyar, V.V.** Curved laser microjet in near field / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.A. Kovalev // Appl. Opt. – 2013. – V. 52(18). – P. 4131-4136.
 8. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – 6 ed. – Pergamon, 1986.
 9. Handbook of Mathematical Functions / edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun. – Washington: National Bureau of Standards, DC, 1964. – 1044 p.
 10. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // Proc. IEEE – 1966. – V. 54. – P. 1312-1329.
 11. **Kotlyar, V.V.** Orbital angular momentum of superposition of two generalized Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Computer Optics. – 2013. – V. 37(2). – P. 179-185.
 12. **Kotlyar, V.V.** Propagation of hypergeometric laser beams in a medium with the parabolic refractive index / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov // J. Opt. – 2013. – V. 313. – P. 290-293.
 13. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // J. Opt. Soc. Am. A. – 2008. – V. 25(1). – P. 262-270.
 14. **Papazoglou, D.G.** Observation of abruptly autofocusing waves / D.G. Papazoglou, N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides, S. Tzortakis // Opt. Lett. – 2011. – V. 32(10). – P. 1842-1844.
 15. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series. Special functions / A.P. Prudnikov, J.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: "Science" Publisher, 1983. – (In Russian).

TRANSFORMING OF SLOWING LASER BEAMS TO ACCELERATING BEAMS

A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, S.G. Zaskanov

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

We propose a method of obtaining solution of the paraxial Helmholtz equation which describes two-dimensional light beams accelerating on a finite interval of the trajectory. Method based on complex conjugation and shift along the longitudinal coordinate (parallel to the optical axis) of the complex amplitude of the slowing light beams. Using this method we obtained Fresnel and Laplace beams, as well as "half-Bessel" beams, accelerating along the trajectory in a form of square root. It has been observed that the well-known Hermite-Gaussian light beams are also accelerating beams with a hyperbolic trajectory. In contrast to well-known diffraction-free accelerating Airy beams all beams, which we consider, are converging upon propagation.

Key words: accelerating laser beam, beam trajectory, Fresnel beam, Laplace beam.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Ковалёв Алексей Андреевич** и **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 9 этого номера.



Засканов Станислав Германович, 1990 года рождения. В 2013 году получил степень магистра в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладные математика и физика». Обучается в аспирантуре на кафедре технической кибернетики СГАУ. Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, рентгеновская оптика, нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика.

E-mail: icekilla@vandex.ru.

Stanislav Germanovich Zaskanov (b. 1990). Received a master's degree in Samara State Aerospace University (2013), in Applied Mathematics and Physics. He is a post-graduate student at Technical Cybernetics subdepartment of Samara State Aerospace University. Major fields of research: image processing, pattern recognition, x-ray optics, nanophotonics, diffractive computer optics.

Поступила в редакцию 2 декабря 2013 г.