О РАЗМЕРНОСТИ ГРАНИЦ НЕКОТОРЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ НА ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ РЕШЁТКАХ

Богданов П.С., Чернов В.М.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

В работе вычисляются фрактальные размерности границ фундаментальных областей всех тернарных квазиканонических систем счисления в кольце целых чисел Эйзенштейна. Для этого используется модификация метода, применяемого В. Джильбертом и Дж. Тусвальднером для вычисления размерности границ фундаментальных областей канонических систем счисления.

Ключевые слова: каноническая система счисления, квазиканоническая система счисления, фундаментальная область системы счисления, фрактальная размерность.

Введение

Начиная с основополагающих работ Б. Мандельброта [1–4], который ввёл в научный обиход понятие фрактальной геометрии, аппроксимационные модели, использующие фрактальные объекты, стали широко применяться в различных областях естествознания [5–7].

В работе [8] показана самоподобность объектов, исследуемых в нанофотонике, и перспективная возможность использования фрактальных моделей для их исследования. Следует отметить, что плоский характер отображения наблюдаемых в нанофотонике изображений, его самоподобные фрактальные свойства диктуют необходимость исследования изображения как некоторой области плоскости, так и отдельно его границы. Необходимость исследования границы фрактального объекта в приложениях может объясняться, например, тем, что при решении задач, использующих, в частности, метод Монте–Карло и его разновидности, уже нельзя считать, что граница объекта имеет меру Лебега, равную нулю. С этой точки зрения исследование различных частных случаев граничных свойств специфичных фрактальных объектов представляется весьма актуальной задачей. В частности, В. Джильберт в работах [9, 10] исследовал фрактальную размерность границы фундаментальной области канонических систем счисления. В этих работах В. Джильбертом была указана явная связь между свойствами границ различных фракталов и представлением комплексных чисел в соответствующих канонических системах счисления. Дж. Тусвальднер в своей работе обобщил результат В. Джильберта на случай мнимых квадратичных полей [11], а затем и на случай двумерных канонических систем счисления [12].

В цитируемых работах рассматривается случай прямоугольных, точнее параллелепипедальных решёток, элементами которых являются целые элементы рассматриваемых квадратичных полей, однако значительная часть реальных кристаллов имеет не параллелепипедальную структуру, а гексагональную [13, 14]. Следы (изображения) таких гексагональных структур явно прослеживаются при наблюдении наноструктур, в частности, посредством различных регистрирующих устройств. Например, гексагональная структура графена, зафиксированная с помощью электронного микроскопа, приведена в работе [15].

В настоящей работе мы, следуя основной идее Джильберта, рассматриваем свойства фрактальных объектов, имеющих гексагональную структуру и ассоциированных с фундаментальными областями тернарных систем счисления в кольце целых чисел Эйзенштейна.

1. Основные определения

Пусть $Q(\sqrt{d})$ есть мнимое квадратичное поле [16]:

$$Q(\sqrt{d}) = \left\{ z = a + b\sqrt{d};\ a, b \in Q \right\},$$

где $d < 0$ – целое число, свободное от квадратов.

Определение 1. Если у элемента $z = a + b\sqrt{d} \in Q(\sqrt{d})$ его норма $Norm(z)$ и след $Tr(z)$ есть целые числа:

$$Norm(z) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 \in Z,$$

$$Tr(z) = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a \in Z,$$

то этот элемент называется целым алгебраическим числом поля $Q(\sqrt{d})$ [17].

Сформулируем известный критерий целостности алгебраических чисел для мнимых квадратичных полей.

Утверждение. Известно [16], что при $d < 0$, $\Delta = |d|$ целыми алгебраическими числами мнимого поля $Q(i\sqrt{\Delta})$ являются числа

$$z = \frac{a + bi\sqrt{\Delta}}{2};\ a, b \in Z;\ a \equiv b (\operatorname{mod} 2).$$

Кольцо целых элементов (целых алгебраических чисел) поля $Q(\sqrt{d})$ будем обозначать $S(\sqrt{d})$, а $Z(\sqrt{d})$ – множество

$$Z\left(\sqrt{d}\right) = \left\{ z = a + b\sqrt{d} : a, b \in Z \right\} \subseteq S\left(\sqrt{d}\right) \subset Q\left(\sqrt{d}\right).$$

Таким образом, целые элементы поля $Q\left(i\sqrt{3}\right)$ образуют кольцо:

$$S\left(i\sqrt{3}\right) = \left\{ \frac{a + bi\sqrt{3}}{2},\ a \equiv b\left(\operatorname{mod} 2\right) \right\},$$

называемое кольцом целых чисел Эйзенштейна.

Определение 2. Целое число Эйзенштейна $\alpha = 0,5\left(B \pm i\sqrt{3}\right)$ называется основанием системы счисления в кольце $S\left(i\sqrt{3}\right)$, если любой целый элемент этого поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$z = \sum_{j=0}^{q(z)} a_j \alpha^j ,\ a_j \in I .$$

Если $I = \left\{0,1,...,\left|Norm(\alpha)\right|-1\right\}$, то пара $\{\alpha; I\}$ называется канонической системой счисления в кольце $S\left(i\sqrt{3}\right)$ [17]. Если множество I состоит из целых чисел Эйзенштейна, по норме меньших нормы основания α, то пара $\{\alpha; I\} = K$ называется квазиканонической системой счисления в кольце $S\left(i\sqrt{3}\right)$. I называется алфавитом системы счисления.

В работе [18] рассматриваются все возможные тернарные квазиканонические системы счисления в кольце $S\left(i\sqrt{3}\right)$ и приводится следующая классификационная теорема.

Теорема. В кольце целых алгебраических чисел $S(i\sqrt{3})$ существуют ровно 24 тернарные квазиканонические системы счисления, а именно: системы счисления с основаниями $\alpha_k = (i\sqrt{3})\omega^{k-1}$ и множествами цифр

$$\{0,1,\omega\}, \{0,\omega,\omega^2\}, \{0,\omega^2,\omega^3\},$$
$$\{0,\omega^3,\omega^4\}, \{0,\omega^4,\omega^5\}, \{0,\omega^5,\omega^6\};$$

где $\omega = 0,5(1+i\sqrt{3})$ и $k = 1,2,3,4$.

Определение 3. Фундаментальной областью $\Phi(\alpha, I)$ системы счисления $\{\alpha; I\}$ в кольце целых элементов $S\left(i\sqrt{3}\right)$ поля $Q\left(i\sqrt{3}\right)$ называется множество всех чисел с нулевой целой частью, то есть

$$\Phi(\alpha, I) = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j \alpha^j ,\ a_j \in I \right\}. \qquad (1)$$

Сходимость ряда (1) понимается в смысле нормы кольца целых чисел Эйзенштейна.

Определение 4. Системы счисления $\{\alpha; I\}$ и $\{\alpha'; I'\}$ в кольце $S\left(i\sqrt{3}\right)$ будем называть эквивалентными, если существует взаимно однозначное отображение $f : S\left(i\sqrt{3}\right) \to S\left(i\sqrt{3}\right)$, причём $f(I) = I'$, такое, что для любого числа $\gamma \in S\left(i\sqrt{3}\right)$, представимого в системе счисления $\{\alpha; I\}$ в виде $\gamma = \sum_{p=0}^{N} a_p \alpha^p$, где $a_p \in I$, число $f(\gamma)$ в алфавите $\{\alpha'; I'\}$ записывается в виде $f(\gamma) = \sum_{p=0}^{N} f(a_p)(\alpha')^p$. Стоит отметить, что α' не обязательно равно $f(\alpha)$.

Модифицируя метод работы В. Джильберта, найдём размерности границ фундаментальных областей тернарных квазиканонических систем счисления в $Q\left(i\sqrt{3}\right)$. Для этого рассмотрим 3 случая, а именно:

1) система счисления имеет основание $i\sqrt{3}$ и множество цифр $\{0,1,\omega\}$. Обозначим её K_1;

2) система счисления имеет основание $(-3+i\sqrt{3})/2$ и множество цифр $\{0,1,\omega\}$. Обозначим её K_2;

3) все остальные тернарные квазиканонические системы счисления в кольце целых чисел Эйзенштейна.

2. Фрактальная размерность границы фундаментальной области системы счисления K_1

Рассмотрим одну из 24 тернарных систем счисления в кольце целых алгебраических чисел $S(i\sqrt{3})$, а именно систему счисления K_1. Для этой системы счисления фундаментальная область Φ_1 имеет вид, приведённый на рис. 1.

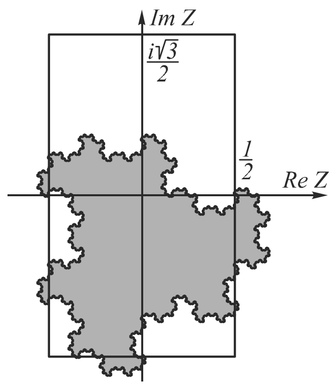


Рис. 1. Фундаментальная область системы счисления K_1

Найдём размерность границы фундаментальной области, представленной на рис. 1.

Изобразим все целые алгебраические числа $z = (a + b \cdot i\sqrt{3})/2$, где $a \equiv b \pmod 2$, на комплексной плоскости в гексагональной решётке (рис. 2). Из записи целых чисел Эйзенштейна ясно, что они узлы решётки, образованной из правильных треугольников, или, соответственно, из правильных шестиугольников.

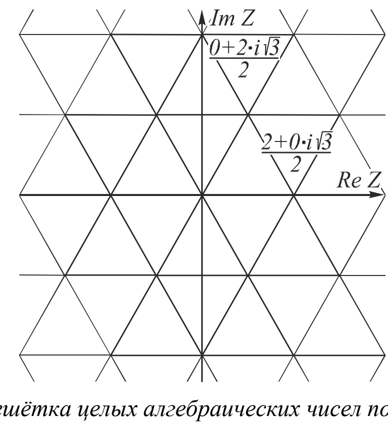


Рис. 2. Решётка целых алгебраических чисел поля $Q(i\sqrt{3})$

Очевидно, что для каждого узла A построенной решётки существует ровно 6 узлов $A_m, m = 1, \ldots, 6$, удалённых от него на минимальное расстояние. Пусть d_m – серединные перпендикуляры к отрезкам AA_m. Обозначим через B_m точку пересечения d_m с d_{m+1}, кроме $m = 6$, а B_6 – точку пересечения d_1 и d_6. Пусть внутренность полученного правильного шестиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ – окрестность точки A. Ясно, что шестиугольные окрестности двух произвольных узлов решётки не пересекаются и, кроме того, объединение замыканий таких окрестностей всех узлов решётки образует покрытие плоскости.

Для вычисления размерности границы фундаментальной области Φ_1 используем следующий рекуррентный процесс. Первоначальным приближением Φ_1 будем считать шестиугольную окрестность точки 0 со стороной $3^{-0,5}$. Каждое число с нулевой целой частью, то есть число, принадлежащее фундаментальной области системы счисления K_1, можно представить в виде $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^j = \frac{1}{\alpha^l} \sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^{l+j}$, где $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^{l+j}$ – целое алгебраическое число с длиной записи, не превосходящей l. Последнее равенство порождает преобразование $f(p) = \frac{1}{\alpha^l} p$, определённое для всех точек p плоскости. Ясно, что при таком преобразовании шестиугольная окрестность точки $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^{l+j}$ переходит в правильную шестиугольную окрестность точки $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^j$ со стороной $3^{\frac{-l-1}{2}}$. l-приближением фундаментальной области будем считать объединение замыканий всех правильных шестиугольных окрестностей точек $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^j$. Такие приближения (первое и второе) приведены на рис. 3*а* и 3*б* соответственно.

Так как количество чисел вида $\sum_{j=-l}^{-1} a_j \alpha^j$ равно 3^l, то l-приближение будет состоять из 3^l правильных шестиугольников.

Таким образом, можно записать следующий алгоритм построения l-приближения фундаментальной области.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Строим шестиугольную окрестность точки 0 со стороной $3^{-0,5}$. Полагаем $v = 1$.

Шаг 2. Строим все правильные шестиугольные окрестности точек $\sum_{j=-v}^{-1} a_j \alpha^j$ со сторонами $3^{\frac{-v-1}{2}}$. Если $v = l$, то алгоритм закончен, иначе повторяем шаг 2 для $v = v + 1$.

Результаты работы алгоритма (то есть последовательное приближение фундаментальной области для $l = 1, 2, 3, 4, 5$) приведены на рис. 3*а*-3*д*.

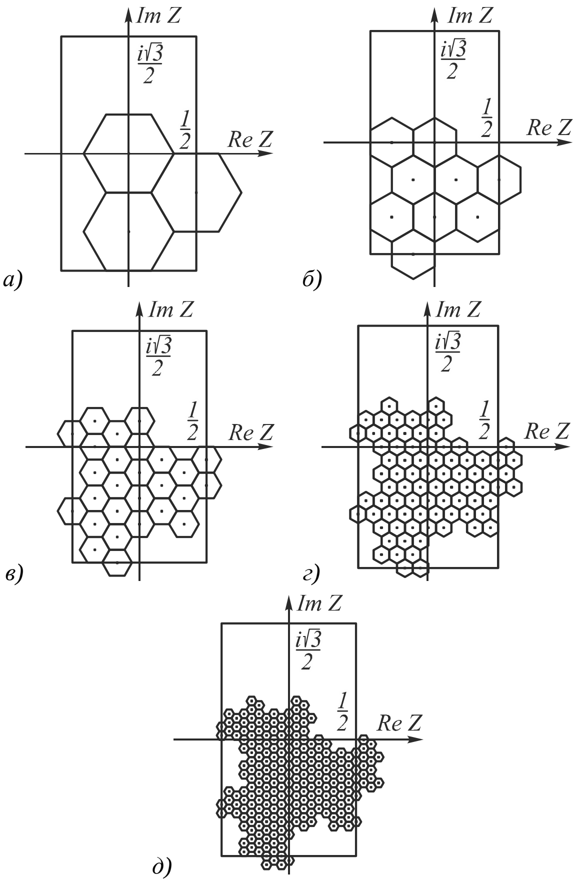


Рис. 3. Окрестности чисел с нулевой целой частью длины а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 5

Таким образом, видно, что при переходе от l-приближения к (l+1)-приближению фундаментальной области каждому шестиугольнику l-приближения соответствует три шестиугольника (l+1)-приближения, причём если 2 шестиугольника l-приближения имели общую сторону, то соответствующие им области в (l+1)-приближении будут иметь две общих стороны. Поэтому количество общих сторон всех шестиугольников (l+1)-приближения можно вычислить по формуле $T_{l+1} = 2T_l + 3^{l+1}$, где $T_1 = 3$. Таким образом, количество сторон шестиугольников, образующих границу l-приближения, выражается по формуле $L_l = 6 \cdot 3^l - 2 \cdot T_l$.

Докажем, что $L_{l+1} = 2L_l$. Действительно,

$$2L_l = 12 \cdot 3^l - 4 \cdot T_l = 18 \cdot 3^l - 2 \cdot \left(2 \cdot T_l + 3 \cdot 3^l\right) = \\ = 6 \cdot 3^{l+1} - 2 \cdot T_{l+1} = L_{l+1}.$$

Отсюда следует, что $L_l = 3 \cdot 2^{l+1}$.

Длина границы l-приближения фундаментальной области равна произведению L_l на длину стороны шестиугольника, то есть

$$S_l = 3 \cdot 2^{l+1} \cdot 3^{(-l-1)/2} = 3 \cdot \left(2 / \sqrt{3}\right)^{l+1}.$$

Получаем, что $\lim_{l\to\infty}(S_l)=\infty$, то есть размерность границы фундаментальной области системы счисления K_1 больше 1. Для определения фрактальной размерности [4] требуется, чтобы

$$\lim_{l\to\infty} L_l \cdot \left(3^{(-l-1)/2}\right)^d = C,\ 0<C=const<+\infty.$$

Тогда размерность d границы фундаментальной области вычисляется следующим образом:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{L_l}{\sqrt{3}^{d\cdot(l+1)}} = 3\cdot\lim_{l\to\infty}\frac{2^{(l+1)}}{\sqrt{3}^{d\cdot(l+1)}} = 3\cdot\lim_{l\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}^d}\right)^{(l+1)} =$$

$$= const \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}^d}=1 \Rightarrow d=\log_3 4\approx 1{,}26185951.$$

Таким образом, получаем, что $1<d=\log_3 4<2$.

3. Фрактальная размерность границы фундаментальной области системы счисления K_2

Для данной системы счисления все рассуждения проводятся аналогично первому случаю, и в результате получается та же размерность границы фундаментальной области $1<d=\log_3 4<2$.

4. Фрактальные размерности для остальных тернарных квазиканонических систем счисления в кольце целых чисел Эйзенштейна

Легко показать, что фундаментальная область одной из эквивалентных систем счисления получается из фундаментальной области другой системы счисления путём применения к этой области преобразований поворота или отражения относительно оси *OX*. В работе [18] было доказано, что существуют ровно два вида неэквивалентных тернарных квазиканонических систем счисления. Это означает, что необходимо исследовать лишь две фундаментальные области, а именно фундаментальные области систем счисления K_1 и K_2, которые и были рассмотрены в пунктах 1 и 2 данной работы.

Заключение

Предложенный подход достаточно легко обобщается как на случай других квазиканонических систем счисления в $Q\left(i\sqrt{3}\right)$, так и на случай других квадратичных расширений, для элементов которых существуют алгоритмы деления с остатком по норме.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-97007-р_поволжье_а, 12-01-00822а, 12-01-31316 мол а).

Литература

1. **Mandelbrot, B.B.** How long is the coast of Britain // Science. – 1967. – V. 155. – P. 636-638.
2. **Mandelbrot, B.B.** A fast fractional Gaussian noise generator // Water Resources Research. – 1971. – V. 7. – P. 543-553.
3. **Mandelbrot, B.B.** Fractals: Form, Chance, and Dimension / B.B. Mandelbrot. – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1977. – 365 p.
4. **Mandelbrot, B.B.** The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – New York: W.H. Freeman and Company, 1982. – 468 p.
5. **Feder, J.E.** Fractals / J.E. Feder. – New York: Plenum Press, 1988. – 283 p.
6. **Crownover, R.M.** Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover. – Boston; London: Jones and Bartlett, 1995. – 306 p.
7. **Schroeder, M.R.** Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise / M.R. Schroeder. – New York: W.H. Freeman, 1990. – 429 p.
8. **Сойфер, В.А.** Анализ и распознавание наномасштабных изображений: Традиционные подходы и новые постановки задач / В.А. Сойфер, А.В. Куприянов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 136-144.
9. **Gilbert, W.J.** The Fractal Dimension of Sets derived from Complex Bases // Canadian Mathematical Bulletin. – 1986. – V. 29. – P. 495-500.
10. **Gilbert, W.J.** Complex bases and fractal similarity // Annales des Sciences Mathématiques du Québec. – 1987. – V. 11(1). – P. 65-77.
11. **Thuswaldner, J.M.** Fractal dimension of sets induced by bases of imaginary quadratic fields // Mathematica Slovaca. – 1998. – V. 48. – P. 365-371.
12. **Thuswaldner, J.M.** Fractal Properties of Number Systems / J.M. Thuswaldner, W. Müller, R.F. Tichy // Periodica Mathematica Hungarica. – 2001. – V. 42. – P. 51-68.
13. **Най, Дж.** Физические свойства кристаллов / Дж. Най. – М.: Мир, 1967. – 386 с.
14. **Конвей, Дж.** Упаковки шаров, решётки и группы/ В 2-х т. / Дж. Конвей, Н. Слоэн. — М: Мир, 1990. – 376 с.
15. **Hernandez, Y.** Aberration-corrected HRTEM image of a graphene monolayer obtained by exfoliation of graphite in liquid phase / Y. Hernandez, V. Nicolosi, M. Lotya, F.M. Blighe // Nature Nanotechnology. – 2008. – V. 3(9). – P. 563-568.
16. **Боревич, З.И.** Теория чисел / З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
17. **Чернов, В.М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований / В.М. Чернов. – М.: Физматлит, 2007. – 264 с.
18. **Богданов, П.С.** Классификация тернарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях и их приложение / П.С. Богданов, В.М. Чернов // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 139-147.

References

1. **Mandelbrot, B.B.** How long is the coast of Britain // Science. – 1967. – V. 155. – P. 636-638.
2. **Mandelbrot, B.B.** A fast fractional Gaussian noise generator // Water Resources Research. – 1971. – V. 7. – P. 543-553.
3. **Mandelbrot, B.B.** Fractals: Form, Chance, and Dimension / B.B. Mandelbrot. – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1977. – 365 p.
4. **Mandelbrot, B.B.** The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – New York: W.H. Freeman and Company, 1982. – 468 p.
5. **Feder, J.E.** Fractals / J.E. Feder. – New York: Plenum Press, 1988. – 283 p.
6. **Crownover, R.M.** Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover. – Boston; London: Jones and Bartlett, 1995. – 306 p.
7. **Schroeder, M.R.** Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise / M.R. Schroeder. – New York: W.H. Freeman, 1990. – 429 p.
8. **Soifer**, **V.A.** Analysis and recognition of the nanoscale images: conventional approach and novel problem state-

ment / V.A. Soifer, A.V. Kupriyanov // Computer Optics. – 2011. – V. 35(2). – P. 136-144. – (In Russian).

9. **Gilbert, W.J.** The Fractal Dimension of Sets derived from Complex Bases // Canadian Mathematical Bulletin. – 1986. – V. 29. – P. 495-500.
10. **Gilbert, W.J.** Complex bases and fractal similarity // Annales des Sciences Mathématiques du Québec. – 1987. – V. 11(1). – P. 65-77.
11. **Thuswaldner, J.M.** Fractal dimension of sets induced by bases of imaginary quadratic fields // Mathematica Slovaca. – 1998. – V. 48. – P. 365-371.
12. **Thuswaldner, J.M.** Fractal Properties of Number Systems / J.M. Thuswaldner, W. Müller, R.F. Tichy // Periodica Mathematica Hungarica. – 2001. – V. 42. – P. 51-68.
13. **Nye, J.F.** Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices / J.F. Nye. – Oxford: Clarendon Press, 1972. – 322 p.
14. **Conway, J.** Sphere Packings, Lattices and Groups / J. Conway, N. Sloane. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 703 p.
15. **Hernandez, Y.** Aberration-corrected HRTEM image of a graphene monolayer obtained by exfoliation of graphite in liquid phase / Y. Hernandez, V. Nicolosi, M. Lotya, F.M. Blighe // Nature Nanotechnology. – 2008. – V. 3(9). – P. 563-568.
16. **Borevich, Z.I.** Number theory / Z.I. Borevich, I.R. Shafarevich. – Academic Press, 1986. – 434 p.
17. **Chernov, V.M.** Arithmetical methods of synthesis of fast algorithms of Discrete orthogonal Transforms / V.M. Chernov. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2007. – 264 p. – (In Russian).
18. **Bogdanov, P.S.** Classification of ternary quasicanonical number systems in imaginary quadratic fields and their application / P.S. Bogdanov, V.M. Chernov // Computer Optics. – 2014. – V. 38(1). – P. 139-147.

DIMENSION OF SOME FRACTAL SETS ON HEXAGONAL LATTICES

P. S. Bogdanov, V. M. Chernov
Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,
Samara State Aerospace University

Abstract

In this paper fractal dimension of fundamental domain boundary for all possible ternary quasicanonical numerical system in the ring of Eisenstein integers is calculated. Modified method that was used by W. Gilbert and J. Thuswaldner for computing of fundamental domain boundary fractal dimension for canonical numerical system is considered.

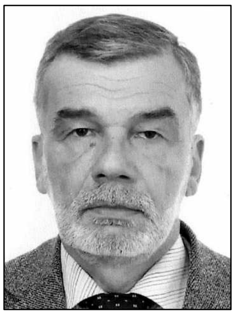
Key words: canonical numerical system, quasicanonical numerical system, fundamental domain, fractal dimension.

Сведения об авторах

Богданов Павел Сергеевич, 1989 года рождения, аспирант Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Стажёр-исследователь Института систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: обработка изображений, программирование, прикладная математика.

E-mail: poulsmb@rambler.ru .

Pavel Sergeevich Bogdanov (b. 1989) postgraduate student of S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). Trainee researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests are image processing, programming, applied mathematics.



Чернов Владимир Михайлович, 1949 года рождения, математик, доктор физико-математических наук. Главный научный сотрудник Института систем обработки изображений РАН. Профессор кафедры геоинформатики и информационной безопасности Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: алгебраические методы в цифровой обработке сигналов, криптография, машинная арифметика.

E-mail: vche@smr.ru .

Vladimir Michailovich Chernov (b. 1949) mathematician, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Chief researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Professor of Geo-Information Science and Information Security department (S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)). Research interests are algebraic methods in digital signal processing, cryptography, computer arithmetic.

Поступила в редакцию 19 марта 2014 г.