

## О КОРРЕКЦИИ ЭФФЕКТА ПЕРЕКРЫТИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОРЯДКОВ В СПЕКТРОМЕТРЕ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ ОФФНЕРА

Досколович Л.Л., Безус Е.А., Быков Д.А.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва  
(национальный исследовательский университет) (СГАУ),  
Институт систем обработки изображений РАН

### Аннотация

Проведён анализ работы спектрометра в конфигурации Оффнера с дифракционной решёткой в качестве диспергирующего элемента. В параксиальном приближении получены формулы для положения спектров на регистрирующем устройстве, формируемых в различных дифракционных порядках. Предложен метод коррекции негативного эффекта наложения спектров за счёт обработки зарегистрированного изображения.

**Ключевые слова:** спектрометр, изображающий спектрометр, гиперспектрометр, схема Оффнера, дифракционная решётка.

### Введение

Широкий круг задач оперативного мониторинга земной поверхности может быть эффективно решён с использованием малых космических аппаратов (КА), несущих компактную гиперспектральную аппаратуру (ГСА). Перспективными спектрометрами для использования на малых КА являются изображающие спектрометры в конфигурации Оффнера [1–7]. Основными преимуществами таких спектрометров являются их компактный размер и возможность снижения хроматических aberrаций и дисторсии до низкого уровня. В простейшем случае спектрометр Оффнера содержит два концентрических зеркала. В качестве диспергирующего элемента используется дифракционная решётка, выполненная на одном из зеркал [1–5, 7], или призма, расположенная между зеркалами [5–7]. Использование дифракционной решётки позволяет достичь большей компактности и меньших хроматических aberrаций. В то же время при широком спектральном диапазоне использование дифракционной решётки приводит к негативному эффекту перекрытия спектров, формируемых в различных дифракционных порядках. Действительно, из формулы дифракционной решётки несложно показать, что для излучения кратных длин волн  $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \dots, \lambda/m$  направления распространения порядков дифракции с номерами  $+1, \dots, +m$  (или  $-1, \dots, -m$ ) будут совпадать. В качестве примера рассмотрим компактный спектрометр Оффнера с дифракционной решёткой из работы [1], ориентированный на анализ минералогического состава и предназначенный для использования на спутниках, летающих на низких орбитах. Данный спектрометр рассчитан на диапазон длин волн от 400 нм до 3000 нм при спектральном разрешении в 10 нм. В данном случае направления отражённых дифракционных порядков с номерами  $+1, \dots, +7$  будут совпадать, например, для длин волн  $\lambda_m = m^{-1} \cdot 2800$  нм,  $m = 1, \dots, 7$ . Для устранения эффекта перекрытия порядков в спектрометр дополнительно вводятся спектральные фильтры, отсекающие нерабочие дифракционные порядки. Создание таких фильтров, а также их интеграция в спектрометр является сложной задачей.

В настоящей работе проведён анализ работы спектрометра Оффнера в параксиальном приближении и

показано, что эффект наложения спектров может быть скорректирован за счёт простой обработки зарегистрированного изображения.

### Спектрометр на основе схемы Оффнера

Стандартный спектрометр на основе схемы Оффнера состоит из двух концентрических зеркал 1 и 2 с радиусами  $2R$  и  $R$  соответственно [1, 2, 7]. Зеркало 2 содержит дифракционную решётку (рис. 1).

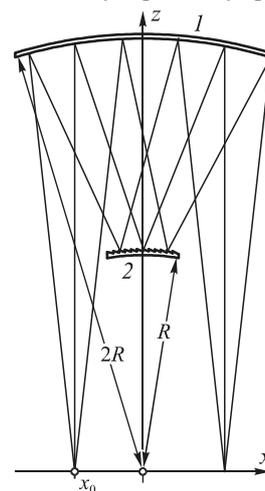


Рис. 1. Оптическая схема Оффнера

Данный спектрометр используется вместе с объективом, формирующим изображение наблюдаемого объекта в плоскости  $z=0$ . С помощью щели из формируемого изображения выделяется строка. Пусть щель расположена вдоль оси  $Oy$  при  $x=x_0$ . Система из двух указанных зеркал в параксиальном приближении переносит изображение щели из точки  $x=x_0$  в точку  $x=-x_0$  (рис. 1). Диспергирующим элементом является дифракционная решётка на зеркале 2, которая формирует спектр щели в окрестности точки  $x=-x_0$ .

Проведём анализ работы спектрометра. Для простоты рассмотрим двумерный вариант схемы (рис. 1). Анализ выполним в параксиальном приближении. Сначала предположим, что дифракционной решётки на зеркале 2 нет.

От источника (щели) на зеркало 1 падает цилиндрическая волна со следующей функцией эйконала:

$$\Psi(x, z) = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2} \approx z + \frac{(x - x_0)^2}{2z}. \quad (1)$$

Рассмотрим отражение от зеркала в рамках приближения тонкого оптического элемента. В этом приближении набег (изменение) эйконала с точностью до константы описывается выражением:

$$\Delta\Psi_1(x) = 2z_1(x) = 2\sqrt{(2R)^2 - x^2} \approx -\frac{x^2}{2R} + 4R, \quad (2)$$

где  $z = z_1(x)$  – уравнение 1-го зеркала. Соответственно, эйконал волны после отражения от зеркала примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \Psi(x, 2R) + \Delta\Psi_1(x) = \\ &= 2R + \frac{(x - x_0)^2}{4R} - \frac{x^2}{2R} + 4R = \\ &= -\frac{(x + x_0)^2}{4R} + C_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_1$  – константа, несущественная для последующего анализа. Заметим, что эйконал (3) в парааксиальном приближении соответствует эйконалу сходящейся цилиндрической волны с фокусом в точке  $(-x_0, 0)$ . Таким образом, отражённый от зеркала 1 пучок с точностью до константы имеет следующий эйконал:

$$\Psi_1(x, z) = -\frac{(x + x_0)^2}{2z}. \quad (4)$$

Данная волна далее падает на зеркало 2. В приближении тонкого оптического элемента набег эйконала при отражении от зеркала 2 с точностью до константы описывается выражением:

$$\Delta\Psi_2(x) = -2z_2(x) = -2\sqrt{R^2 - x^2} \approx \frac{x^2}{R} - 2R. \quad (5)$$

Таким образом, эйконал волны после отражения от зеркала 2 примет вид:

$$\Psi_2(x) = -\frac{(x + x_0)^2}{2R} + \frac{x^2}{R} - 2R = \frac{(x - x_0)^2}{2R} + C_2. \quad (6)$$

Сформированный эйконал в парааксиальном приближении соответствует эйконалу расходящейся цилиндрической волны с фокусом в точке  $(x_0, 0)$ . Таким образом, при последующем отражении от первого зеркала мы получим сходящийся цилиндрический пучок с центром в точке  $(-x_0, 0)$ .

Итак, было показано, что система двух концентрических зеркал с радиусами  $R$  и  $2R$  в парааксиальном приближении переносит точку  $(x_0, 0)$  в точку  $(-x_0, 0)$ , то есть имеет коэффициент увеличения  $M = -1$ . Несложно показать, что в парааксиальном приближении указанный результат остаётся верным для произвольной точки щели с отличной от нуля координатой  $y$ . При этом изображением точки щели  $(x_0, y_0, 0)$  будет точка  $(-x_0, -y_0, 0)$ . Вышеприведённый результат можно также получить, используя парааксиальную формулу отражения в сферическом зеркале.

Рассмотрим далее случай, когда на зеркале 2 расположена дифракционная решётка с периодом  $d$ .

Обозначим  $\Psi_{gr}(x)$  набег эйконала, соответствующий решётке. В этом случае формула (6), описывающая эйконал после отражения от зеркала 2, примет вид:

$$\Psi_2(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2R} + \Psi_{gr}(x) + C_2. \quad (7)$$

Пусть сначала щель является монохроматическим источником излучения с длиной волны  $\lambda$ . Тогда фазовая функция отражённой волны (7) с точностью до константы будет описываться выражением:

$$\Phi_2(x) = k_0 \frac{(x - x_0)^2}{2R} + k_0 \Psi_{gr}(x), \quad (8)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число. С учётом периодичности функции  $\Psi_{gr}(x)$  (период  $d$ ), комплексную амплитуду отражённого поля  $w_2(x) = \exp\{i\Phi_2(x)\}$  представим в виде [8]:

$$w_2(x) = \exp\left\{ik_0 \frac{(x - x_0)^2}{2R}\right\} \cdot \sum_n c_n \exp\left\{ik_0 n \frac{\lambda}{d} x\right\}, \quad (9)$$

где  $c_n$  – коэффициенты Фурье, которые задаются следующим выражением:

$$\begin{aligned} c_n(\lambda) &= \frac{1}{d} \int_0^d \exp\left\{ik_0 \Psi_{gr}(x) - i \frac{2\pi}{d} nx\right\} dx = \\ &= \int_0^1 \exp\left\{ik_0 \Psi_{gr}(xd) - i 2\pi nx\right\} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Отражённое поле (9) соответствует суперпозиции световых пучков (дифракционных порядков) с фазовыми функциями:

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= k_0 \frac{(x - x_0)^2}{2R} + k_0 n \frac{\lambda}{d} x = \\ &= \frac{k_0}{2R} \left[ x - \left( x_0 - nR \frac{\lambda}{d} \right) \right]^2 + C_n. \end{aligned} \quad (11)$$

В парааксиальном приближении фазовые функции (11) описывают расходящиеся цилиндрические пучки с фокусами в точках  $x_n = x_0 - nR\lambda/d$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом, при последующем отражении от первого зеркала в плоскости  $z = 0$  будет формироваться набор точек (дифракционных максимумов) с координатами

$$x_n(\lambda) = -x_0 + nR \frac{\lambda}{d}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Значения энергии  $I_n(\lambda)$  в точках  $x_n(\lambda)$  будут описываться квадратами модулей коэффициентов Фурье (10) [8]:

$$I_n(\lambda) = |c_n(\lambda)|^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

В случае, когда щель является полихроматическим источником излучения с длинами волн  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , в каждом дифракционном порядке будет формироваться спектр с шириной

$$\Delta x_n = nR \frac{\Delta\lambda}{d}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14)$$

где  $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ . Обычно спектр регистрируется в +1-м порядке дифракции. Будем считать, что регист-

рирующая ПЗС-матрица расположена в плоскости  $z=0$  при  $x \in [x_{\min,1}, x_{\max,1}]$ , где  $x_{\min,1} = R\lambda_{\min}/d$  и  $x_{\max,1} = R\lambda_{\max}/d$  – границы области спектра +1-го порядка дифракции.

**Коррекция эффекта перекрытия порядков**

Обозначим  $K = \lfloor \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \rfloor$ , где  $\lfloor \cdot \rfloor$  обозначает операцию взятия целой части. Из (12) получим, что  $x_1(\lambda) = x_K(\lambda/K)$ . Поэтому при  $K > 1$  спектры порядков с номерами от +2 до  $K$  будут накладываться на область спектра +1-го порядка.

$$E(x) = \tilde{E}(\lambda) = \begin{cases} S(\lambda)I_1(\lambda), & \lambda \in [\lambda_{\min}, 2\lambda_{\min}), x \in [x_{\min,1}, x_{\min,2}); \\ S(\lambda)I_1(\lambda) + S\left(\frac{\lambda}{2}\right)I_2\left(\frac{\lambda}{2}\right), & \lambda \in [2\lambda_{\min}, 3\lambda_{\min}), x \in [x_{\min,2}, x_{\min,3}); \\ \dots \\ \sum_{m=1}^K S\left(\frac{\lambda}{m}\right)I_m\left(\frac{\lambda}{m}\right), & \lambda \in [K\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], x \in [x_{\min,K}, x_{\max,1}]. \end{cases} \quad (15)$$

Из формулы (15) несложно видеть, что спектр падающего на решётку излучения может быть последовательно восстановлен по формуле:

$$S(\lambda) = \frac{1}{I_1(\lambda)} \times \begin{cases} \tilde{E}(\lambda), & \lambda \in [\lambda_{\min}, 2\lambda_{\min}); \\ \tilde{E}(\lambda) - S\left(\frac{\lambda}{2}\right)I_2\left(\frac{\lambda}{2}\right), & \lambda \in [2\lambda_{\min}, 3\lambda_{\min}); \\ \dots \\ \tilde{E}(\lambda) - \sum_{m=2}^K S\left(\frac{\lambda}{m}\right)I_m\left(\frac{\lambda}{m}\right), & \lambda \in [K\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]. \end{cases} \quad (16)$$

Гиперспектральная аппаратура, используемая на спутниках дистанционного зондирования Земли, как правило, осуществляет наблюдение в диапазоне длин волн от  $\lambda_{\min} = 0,4$  мкм до  $\lambda_{\max} = 1,05$  мкм [2, 5, 6]. В данном случае  $K = 2$ , и поэтому при использовании схемы Оффнера возникает эффект перекрытия +1-го и +2-го порядков дифракции. Проиллюстрируем эффект перекрытия дифракционных порядков при следующих типичных геометрических параметрах:  $x_0 = 25$  мм,  $R = 80$  мм,  $d = 30$  мкм [1, 2, 5]. При указанных параметрах ширина спектра +1-го порядка составляет  $\Delta x_1 = 1613$  мкм.

В качестве дифракционной решётки обычно используется решётка с треугольным профилем [2]. Эйконал треугольной решётки определяется выражением

$$\Psi_{gr}(x) = \lambda_{opt} x / d, \quad (17)$$

где  $\lambda_{opt}$  – длина волны, на которой интенсивность +1-го порядка максимальна и равна единице. В последующих расчётах мы использовали значение  $\lambda_{opt} = 0,640$  мкм, выбранное из условия максимизации среднего значения интенсивности +1-го порядка дифракции в рассматриваемом диапазоне длин волн.

Покажем, что эффект наложения спектров может быть скорректирован за счёт простой обработки зарегистрированного изображения. Пусть  $S(\lambda)$ ,  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  – спектр излучения, падающего от щели. Именно этот спектр требуется восстановить по измерению интенсивности сигнала  $E(x)$ , регистрируемого ПЗС-матрицей в области спектра +1-го порядка. При этом предполагается, что длины волн, не попавшие в указанный диапазон, отсекаются спектральным фильтром, расположенным либо на входе спектрометра, либо непосредственно перед ПЗС-матрицей. Согласно (9), (12), регистрируемая интенсивность имеет следующий вид:

$$I_n(\lambda) = \text{sinc}^2 \left[ \pi \left( \frac{\lambda}{\lambda_{opt}} - n \right) \right], \quad (18)$$

Интенсивности порядков треугольной решётки несложно получить из (10), (13) в виде [2]:

$$I_n(\lambda) = \text{sinc}^2 \left[ \pi \left( \frac{\lambda}{\lambda_{opt}} - n \right) \right], \quad (18)$$

где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . На рис. 2 показаны спектры +1-го и +2-го порядков дифракции треугольной решётки.

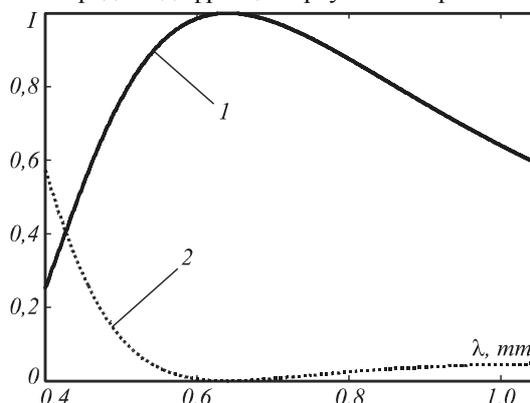


Рис. 2. Спектры дифракционных порядков с номерами +1 и +2 треугольной решётки, рассчитанной из условия максимума средней интенсивности в диапазоне [0,4-1,04] мкм

Эффект наложения порядков показан на рис. 3, где спектры +1-го и +2-го порядков приведены в зависимости от линейной координаты на ПЗС-матрице. Согласно (16), спектр падающего на решётку излучения может быть восстановлен по следующей формуле:

$$S(\lambda) = \frac{1}{I_1(\lambda)} \times \begin{cases} \tilde{E}(\lambda), & \lambda \in [\lambda_{\min}, 2\lambda_{\min}), \\ \tilde{E}(\lambda) - S\left(\frac{\lambda}{2}\right)I_2\left(\frac{\lambda}{2}\right), & \lambda \in [2\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \end{cases} \quad (19)$$

где  $I_n(\lambda)$  имеет вид (18).

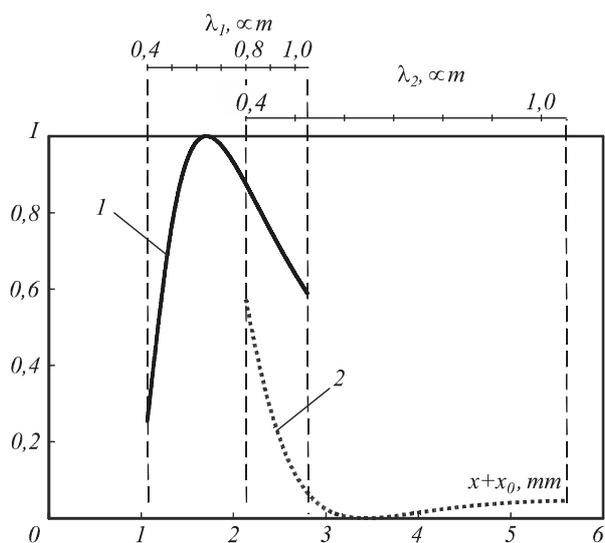


Рис. 3. Спектры дифракционных порядков с номерами +1 и +2 треугольной решётки в зависимости от линейной координаты на регистрирующей ПЗС-матрице

Отметим, что в общем непараксиальном случае зависимость  $x_n(\lambda)$  в порядках дифракции имеет более сложный вид по сравнению с (12). Точный расчёт положения спектров на регистрирующем устройстве может быть выполнен на основе результатов моделирования схемы спектрометра в одной из программ для расчёта оптических систем, например, в программе Zemax [9]. Для строгого описания взаимодействия излучения с дифракционной решёткой, расположенной на зеркале, может быть использован асимптотический метод из работы [7].

### Заключение

Проведён анализ работы спектрометра Оффнера с дифракционной решёткой. Анализ проведён в параксиальном приближении и позволяет оценить положение спектров, формируемых в различных дифракционных порядках. Показана возможность коррекции негативного эффекта наложения спектров за счёт последовательной обработки зарегистрированного изображения (композиции спектров). При этом обработка сводится к поэлементному линейному преобразованию фрагментов зарегистрированного изображения. Для повышения точности коррекции расчёт границ положения спектров может быть выполнен на основе результатов моделирования схемы спектрометра в программе для расчёта оптических систем Zemax.

### Благодарности

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (РНФ) 14-31-00014.

### Литература

1. **Mouroulis, P.** Optical design of a compact imaging spectrometer for planetary mineralogy / P. Mouroulis, R.G. Sellar, D.W. Wilson, J.J. Shea, R.O. Green // *Optical Engineering*. – 2007. – Vol. 46(6) – P. 063001.
2. **Mouroulis, P.** Convex grating types for concentric imaging spectrometers / P. Mouroulis, D.W. Wilson, P.D. Maker, R.E. Muller // *Applied Optics*. – 1998. – Vol. 37(31), – P. 7200-7208.

3. **Prieto-Blanco, X.** Analytical design of an Offner imaging spectrometer / X. Prieto-Blanco, C. Montero-Orille, B. Couce, R. de la Fuente // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14(20). – P. 9156-9168.
4. **Prieto-Blanco, X.** The Offner imaging spectrometer in quadrature / X. Prieto-Blanco, C. Montero-Orille, H. González-Nuñez, M.D. Mouriz, E.L. Lago, and R. de la Fuente // *Optics Express*. – 2010. – Vol. 18(12). – P. 12756-12769.
5. **Lee, J.H.** Optical Design of a Compact Imaging Spectrometer for STSAT3 / J.H. Lee, T.S. Jang, H.-S. Yang, S.-W. Rhee // *Journal of the Optical Society of Korea*. – 2008. – Vol. 12(4). – P. 262-268.
6. **Lee, J.H.** Optomechanical Design of a Compact Imaging Spectrometer for a Microsatellite STSAT3 / J.H. Lee, C.W. Lee, Y.M. Kim, J.W. Kim // *Journal of the Optical Society of Korea*. – 2009. – Vol. 13(2). – P. 193-200.
7. **Казанский, Н.Л.** Моделирование работы гиперспектрометра, основанного на схеме Оффнера, в рамках геометрической оптики / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 271-280.
8. **Soifer, V.** Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation / V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. – London: Taylor & Francis Ltd., 1997. – 244 p.
9. Zemax – Программное обеспечение для разработки оптики и систем освещения [Электронный ресурс]. – 2014. – URL: <https://www.zemax.com/> (дата обращения 27.11.2014).

### References

1. **Mouroulis, P.** Optical design of a compact imaging spectrometer for planetary mineralogy / P. Mouroulis, R.G. Sellar, D.W. Wilson, J.J. Shea, R.O. Green // *Optical Engineering*. – 2007. – Vol. 46(6) – P. 063001.
2. **Mouroulis, P.** Convex grating types for concentric imaging spectrometers / P. Mouroulis, D.W. Wilson, P.D. Maker, R.E. Muller // *Applied Optics*. – 1998. – Vol. 37(31), – P. 7200-7208.
3. **Prieto-Blanco, X.** Analytical design of an Offner imaging spectrometer / X. Prieto-Blanco, C. Montero-Orille, B. Couce, R. de la Fuente // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14(20). – P. 9156-9168.
4. **Prieto-Blanco, X.** The Offner imaging spectrometer in quadrature / X. Prieto-Blanco, C. Montero-Orille, H. González-Nuñez, M.D. Mouriz, E.L. Lago, R. de la Fuente // *Optics Express*. – 2010. – Vol. 18(12). – P. 12756-12769.
5. **Lee, J.H.** Optical Design of a Compact Imaging Spectrometer for STSAT3 / J.H. Lee, T.S. Jang, H.-S. Yang, S.-W. Rhee // *Journal of the Optical Society of Korea*. – 2008. – Vol. 12(4). – P. 262-268.
6. **Lee, J.H.** Optomechanical Design of a Compact Imaging Spectrometer for a Microsatellite STSAT3 / J.H. Lee, C.W. Lee, Y.M. Kim, J.W. Kim // *Journal of the Optical Society of Korea*. – 2009. – Vol. 13(2). – P. 193-200.
7. **Kazanskiy, N.L.** Modeling action of a hyperspectrometer based on the Offner scheme within geometric optics / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, A. V. Karsakov, S.N. Khonina // *Computer Optics*. – 2014. – Vol. 38(2). – P. 271-280.
8. **Soifer, V.** Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation / V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. – London: Taylor & Francis Ltd., 1997. – 244 p.
9. Zemax – Optical and Illumination Design Software [Electronic resource]. – 2014. – URL: <https://www.zemax.com/> (request date 27.11.2014).

**ON THE COMPENSATION OF THE DIFFRACTION ORDERS OVERLAP EFFECT  
IN THE OFFNER SPECTROMETER**

*L. L. Doskolovich, E. A. Bezus, D. A. Bykov  
Samara State Aerospace University,  
Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences*

**Abstract**

We analyze the performance of a diffraction-grating-based Offner spectrometer. We use the paraxial approximation to derive analytical expressions for the spatial and spectral point spread function for each diffraction order. We show that a disruptive effect of the diffraction orders overlap occurs. However, it can be compensated for by means of simple image post-processing.

*Key words:* spectrometers, imaging spectrometer, multispectral and hyperspectral imaging, Offner spectrometer, diffraction gratings.

**Сведения об авторах**

*Сведения об авторах Досколович Леонид Леонидович и Быков Дмитрий Александрович – см. стр. 597 этого номера.*

*Сведения об авторе Безус Евгений Анатольевич – см. стр. 628 этого номера.*

---

*Поступила в редакцию 30 октября 2014 г.*