

ТЕОРЕМЫ О СОХРАНЕНИИ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СУПЕРПОЗИЦИЙ СМЕЩЁННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

А.А. Ковалёв^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, Д.С. Калинкина^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

Доказаны две теоремы о сохранении орбитального углового момента (ОУМ) суперпозиции одинаковых оптических вихрей с произвольной радиально-симметричной формой и целым топологическим зарядом n , смещённых с оптической оси. Нормированный ОУМ такой суперпозиции при произвольном смещении центров пучков с оптической оси и при любых вещественных весовых коэффициентах равен ОУМ каждого отдельного пучка, входящего в суперпозицию. Если центры пучков находятся на одной прямой, проходящей через начало координат, то даже при комплексных весовых коэффициентах нормированный ОУМ суперпозиции равен ОУМ каждого отдельного входящего в неё пучка. Эти теоремы позволяют формировать лазерные вихревые пучки с разным (не обязательно радиально-симметричным) распределением интенсивности, но обладающие одинаковым ОУМ. Приведены результаты численного моделирования для суперпозиций пучков Бесселя, Ханкеля–Бесселя, Бесселя–Гаусса и Лагерра–Гаусса с одинаковыми ОУМ.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, оптический вихрь, топологический заряд.

Цитирование: Ковалёв, А.А. Теоремы о сохранении орбитального углового момента суперпозиций смещённых оптических вихрей / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 305-310.

Введение

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) нашли применение в манипуляции микрообъектами, квантовых телекоммуникациях, микроскопии, интерферометрии, метрологии. Недавний обзор работ по ОУМ приведён в [1]. В [2] впервые было показано, что моды Лагерра–Гаусса обладают ОУМ. Среди пучков, обладающих ОУМ, известны также пучки Бесселя, способные распространяться без дифракции. В некоторых работах были получены аналитические выражения для плотности ОУМ для пучков Бесселя [3–5]. Недавно были рассмотрены непараксиальные асимметричные моды Бесселя [6], для которых также было получено аналитическое выражение для ОУМ всего пучка. Суперпозиция несмещённых вихревых лазерных пучков, в частности Бесселевых пучков, рассматривалась ранее в [5, 7–10], в [11] рассматривался ОУМ суперпозиции вихревых лазерных пучков с периодическим смещением. В работе [12] рассматривается формирование параксиальных световых пучков различной формы с заданным значением орбитального углового момента.

В данной работе рассматривается суперпозиция произвольных одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей (в том числе непараксиальных), каждый из которых смещён на произвольный вектор в плоскости, поперечной оптической оси. Доказываются две теоремы. Первая теорема утверждает, что если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т.е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то нормированный ОУМ (точнее проекция ОУМ на оптическую ось) всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка. Вторая теорема утверждает, что для со-

хранения нормированного ОУМ коэффициенты суперпозиции могут и не быть вещественными, но тогда центры всех вихрей должны находиться на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ). Численный расчёт ОУМ для суперпозиций трёх и пяти оптических вихрей разной формы подтверждает утверждения обеих теорем.

1. Орбитальный угловой момент суперпозиций одинаковых оптических вихрей с радиальной симметрией

Хорошо известно, что любое решение непараксиального уравнения Гельмгольца может быть представлено как суперпозиция плоских волн:

$$E(r, \phi, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\rho, \theta) \times \exp\left[ikr\rho \cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , E – комплексная амплитуда поля в цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z) , A – угловой спектр в полярных координатах (ρ, θ) . В параксиальном приближении вместо корня $(1 - \rho^2)^{1/2}$ в показателе экспоненты будет $(1 - \rho^2/2)$.

Если исходный пучок смещён на вектор с декартовыми координатами (x_0, y_0) , то его угловой спектр плоских волн имеет вид:

$$A'(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) \exp[-ik\rho(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)], \quad (2)$$

где $A(\rho, \theta)$ – угловой спектр плоских волн исходного (несмещённого) пучка. ОУМ и мощность пучка могут быть рассчитаны как через комплексную амплитуду,

так и через угловой спектр плоских волн. Можно показать, что проекция ОУМ на оптическую ось J_z и мощность лазерного пучка I вычисляются с помощью соотношений:

$$J_z = -i \iint_{\mathbb{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \phi} r dr d\phi = -i \lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta, \quad (3)$$

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E r dr d\phi = \lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* A \rho d\rho d\theta. \quad (4)$$

Нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) получается как отношение J_z/I .

Пусть угловой спектр плоских волн вихревого лазерного пучка имеет вид:

$$A(\rho, \theta) = D(\rho) \exp(in\theta), \quad (5)$$

где $D(\rho)$ – произвольная, в общем случае комплекснозначная функция, n – целочисленный топологический заряд. Тогда комплексная амплитуда такого вихревого пучка будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E(r, \phi, z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} D(\rho) \exp(in\theta) \times \\ &\times \exp\left[ikr\rho \cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right] \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi i^n \exp(in\phi) \times \\ &\times \int_0^\infty D(\rho) \exp\left(ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right) J_n(kr\rho) \rho d\rho = \\ &= B(r, z) \exp(in\phi). \end{aligned} \quad (6)$$

A в начальной плоскости комплексная амплитуда будет иметь вид, аналогичный (5):

$$\begin{aligned} E(r, \phi, z=0) &= B(r, z=0) \exp(in\phi) = \\ &= B(r) \exp(in\phi). \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим суперпозицию M одинаковых оптических вихрей (7) с весовыми коэффициентами C_m , причём каждый пучок смещён в декартовой плоскости на вектор с координатами (x_m, y_m) , $m = 0, \dots, M-1$. Угловой спектр плоских волн всей суперпозиции равен

$$\begin{aligned} A(\rho, \theta) &= D(\rho) \exp(in\theta) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{M-1} C_m \exp\left[-ik\rho(x_m \cos\theta + y_m \sin\theta)\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив (8) в (4), вычислим мощность такого пучка:

$$\begin{aligned} I &= \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} C_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho d\rho \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \exp\left[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)\right] d\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{pq} = x_p - x_q$, $b_{pq} = y_p - y_q$.

Аналогично вычислим ОУМ (3):

$$J_z = nI + \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} S_{pq} &= k C_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \\ &\times \int_0^{2\pi} (x_q \sin\theta - y_q \cos\theta) \times \\ &\times \exp\left[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)\right] d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Поделив ОУМ на мощность пучка, получим выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\lambda^2}{I} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}. \quad (12)$$

Сначала в двойной сумме в (12) вычислим диагональные слагаемые (т.е. при $p = q$)

$$\begin{aligned} S_{pp} &= k |C_p|^2 \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \\ &\times \int_0^{2\pi} (x_p \sin\theta - y_p \cos\theta) d\theta = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Внедиагональные слагаемые входят в двойную сумму в (12) попарно, вычислим сумму двух симметричных слагаемых:

$$\begin{aligned} S_{pq} + S_{qp} &= \\ &= k C_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} (x_q \sin\theta - y_q \cos\theta) \times \\ &\times \exp\left[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)\right] d\theta + \\ &+ k C_p C_q^* \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} (x_p \sin\theta - y_p \cos\theta) \times \\ &\times \exp\left[ik\rho(-a_{pq} \cos\theta - b_{pq} \sin\theta)\right] d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Во втором интеграле сделаем замену $\theta \rightarrow \theta + \pi$, но пределы интегрирования оставим прежними, так производится интегрирование периодической функции по всему периоду. Тогда показатели экспонент в обоих интегралах станут одинаковыми и выражение (14) примет вид:

$$\begin{aligned} S_{pq} + S_{qp} &= k \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left[(C_p C_q^* y_p - C_p^* C_q y_q) \cos\theta - \right. \\ &\left. - (C_p C_q^* x_p - C_p^* C_q x_q) \sin\theta \right] \times \\ &\times \exp\left[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)\right] d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Если все весовые коэффициенты суперпозиции (8) вещественны (т.е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то подынтегральное выражение можно представить в виде полного дифференциала по переменной θ от экспоненты, т.е.

$$\begin{aligned} S_{pq} + S_{qp} &= -i C_p C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho d\rho \times \\ &\times \exp\left[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)\right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

поэтому второе слагаемое в (12) равно нулю. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией смещённых с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n , причём все весовые коэффициенты суперпозиции вещественны, а смещение каждого пучка может быть произвольным. Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I = n$.

Как частный случай из теоремы следует, что смещение одиночного пучка в поперечной плоскости не приводит к изменению его нормированного ОУМ [11].

Если же коэффициенты в суперпозиции (8) комплексны, то для вычисления нормированного ОУМ можно воспользоваться следующим интегралом:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ia \cos \theta + ib \sin \theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta = \frac{i2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} J_1(\sqrt{a^2 + b^2}). \quad (17)$$

Тогда из (15) вместо (16) получим:

$$S_{pq} + S_{qp} = \frac{2\pi ik}{R_{pq}} \times \left[(C_p C_q^* y_p - C_p^* C_q y_q)(x_p - x_q) - (C_p C_q^* x_p - C_p^* C_q x_q)(y_p - y_q) \right] \times \int_0^\infty |D(\rho)|^2 J_1(kR_{pq}\rho) \rho^2 d\rho, \quad (18)$$

где $R_{pq} = [(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2]^{1/2}$ – расстояние между центрами p -го и q -го вихрей. Для того, чтобы сумма (18) была равна нулю, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$C_p C_q^* [y_p(x_p - x_q) - x_p(y_p - y_q)] = C_p^* C_q [y_q(x_p - x_q) - x_q(y_p - y_q)], \quad (19)$$

которое после сокращений в квадратных скобках приводится к виду:

$$C_p C_q^* (x_p y_q - x_q y_p) = C_p^* C_q (x_p y_q - x_q y_p). \quad (20)$$

Если коэффициенты C_p и C_q невещественные, то условие (20) выполняется только при равенстве нулю выражений в скобках. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией M смещённых с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n , причём центры всех оптических вихрей (x_p, y_p) ($p = 0, \dots, M-1$) в суперпозиции находятся на одной прямой, проходящей через начало координат (т.е. $x_p y_q = x_q y_p$ для любых p и q). Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I = n$.

2. Численное моделирование

Проверка утверждений обеих теорем осуществлялась путём численного моделирования. Были рассмотрены четыре различных вида оптических вихрей с топологическим зарядом n : бездифракционные моды Бесселя [13], непараксиальные пучки Ханкеля–Бесселя [14], параксиальные пучки Бесселя–Гаусса [15] и параксиальные моды Лагерра–Гаусса [2]. Комплексная амплитуда пучка Бесселя в начальной плоскости имеет вид [13]:

$$E_1(r, \varphi, z = 0) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (21)$$

где α – масштабирующий множитель. Комплексная амплитуда пучка Ханкеля–Бесселя в начальной плоскости равна [14]:

$$E_2(r, \varphi, z = 0) = H_{n/2}^{(1)}\left(\frac{kr}{2}\right) J_{n/2}\left(\frac{kr}{2}\right) \exp(in\varphi), \quad (22)$$

где k – волновое число света. Комплексная амплитуда пучка Бесселя–Гаусса в начальной плоскости имеет вид [15]:

$$E_3(r, \varphi, z = 0) = J_n(\alpha r) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \quad (23)$$

где α – масштабирующий множитель, w – радиус перетяжки Гауссова пучка. Комплексная амплитуда пучка Лагерра–Гаусса в начальной плоскости равна [2]:

$$E_4(r, \varphi, z = 0) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w}\right)^n \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \quad (24)$$

где m – порядок моды, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, $L_m^n(x)$ – полином Лагерра.

На рис. 1 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из трёх пучков, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника. Все пучки в суперпозициях имеют топологический заряд $n=7$. Рис. 1 был рассчитан по формулам (21)–(24) с числом отсчётов 1000×1000 . Параметры пучков были подобраны таким образом, чтобы световой треугольник на всех дифракционных картинах имел примерно одинаковые размеры. Нормированный ОУМ всех четырёх пучков был рассчитан по формулам (3), (4) и оказался равен $J_z/I \cong 7$, несмотря на различие дифракционных картин. Аналогично на рис. 2 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из пяти таких же пучков, но расположенных в вершинах правильного пятиугольника (большого размера). Нормированный ОУМ всех пучков на рис. 2 также был рассчитан по формулам (3), (4) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.

На рис. 3а,б показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти мод Лагерра–Гаусса порядка $(n, m) = (7, 2)$, расположенных на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$, с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = \lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi im/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$ (т.е. $-R \leq x, y \leq R$).

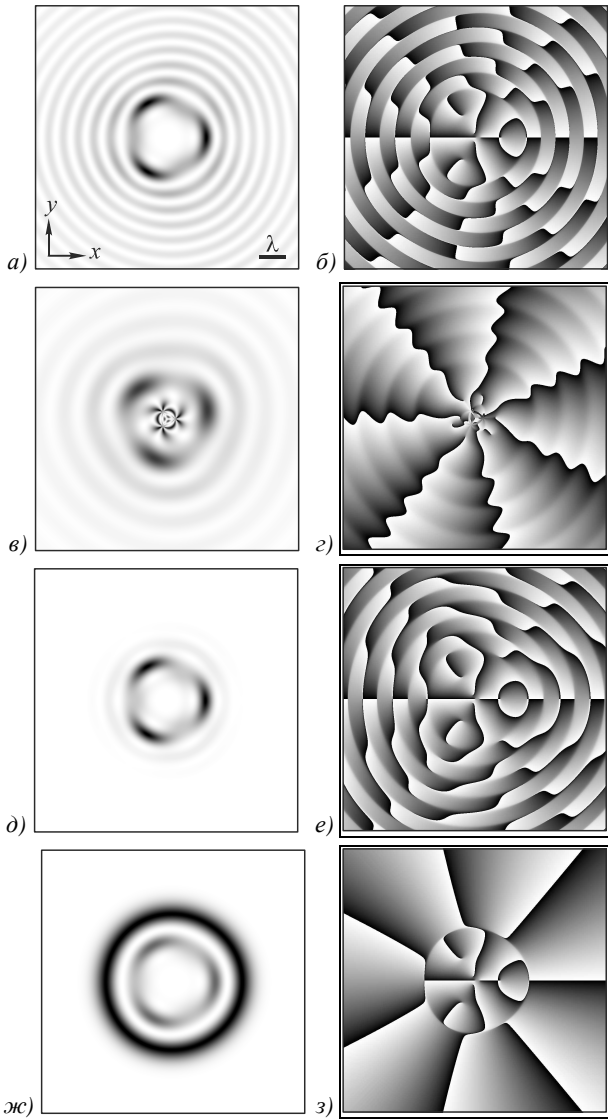


Рис. 1. Интенсивность (негатив) (а, в, д, ж) и фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) (б, г, е, з) суперпозиций трёх вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного треугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos \varphi_p$, $y_p = R_0 \sin \varphi_p$ ($R_0 = 0,3\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/3$, $p = 0, 1, 2$) и имеющих топологический заряд, равный 7: мод Бесселя (а, б), пучков Ханкеля–Бесселя (в, г), пучков Бесселя–Гаусса (д, е) и пучков Лагерра–Гаусса (ж, з). Вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $C = (1, 1, 1)$, размер расчётной области $2R = 10\lambda$. Масштабирующий множитель пучков Бесселя и Бесселя–Гаусса (а, б, д, е) $\alpha = 6/\lambda$. Радиус перетяжки Гауссова пучка равен $w = 2\lambda$ (д, е) и $w = \lambda$ (ж, з). Индекс моды Лагерра–Гаусса (ж, з): $(n, m) = (7, 1)$

На рис. 3в,г показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти пучков Бесселя–Гаусса 7-го порядка, расположенных в тех же точках, что и на рис. 3а,б (т.е. на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$), с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = 2\lambda$, $\alpha = 2/\lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi i m/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$ (т.е. $-R \leq x, y \leq R$).

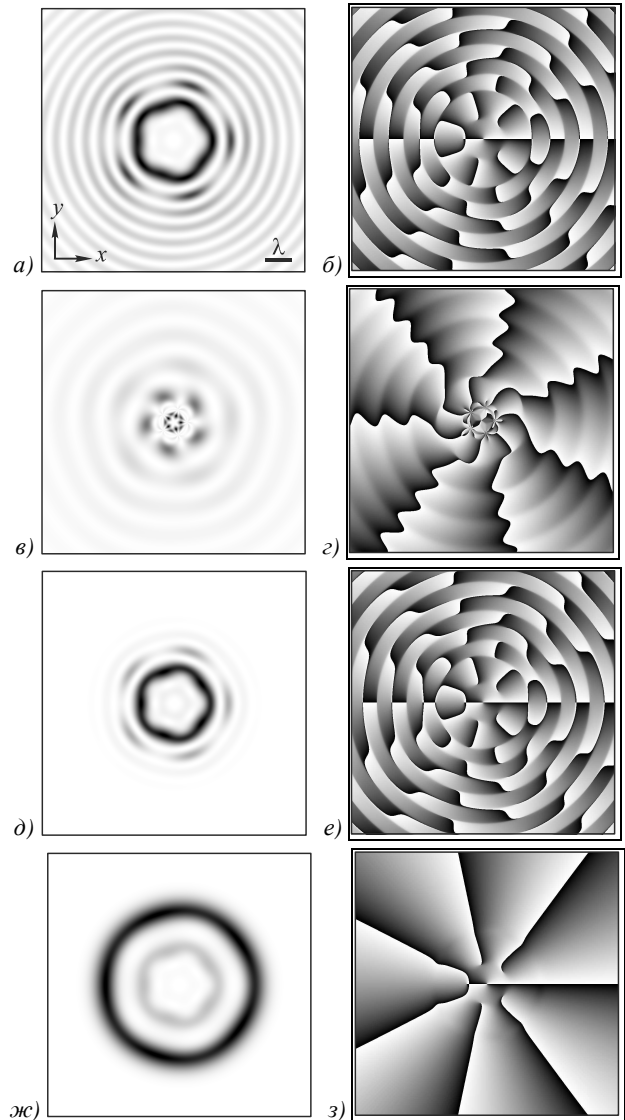


Рис. 2. Интенсивность (негатив) (а, в, д, ж) и фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) (б, г, е, з) суперпозиций пяти вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного пятиугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos \varphi_p$, $y_p = R_0 \sin \varphi_p$ ($R_0 = 0,5\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/5$, $p = 0, \dots, 4$) и имеющих топологический заряд, равный 7: мод Бесселя (а, б), пучков Ханкеля–Бесселя (в, г), пучков Бесселя–Гаусса (д, е) и пучков Лагерра–Гаусса (ж, з). Вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $C = (1, 1, 1, 1, 1)$, размер расчётной области $2R = 10\lambda$. Масштабирующий множитель пучков Бесселя и Бесселя–Гаусса (а, б, д, е) $\alpha = 6/\lambda$. Радиус перетяжки Гауссова пучка равен $w = 2\lambda$ (д, е) и $w = \lambda$ (ж, з). Индекс моды Лагерра–Гаусса (ж, з): $(n, m) = (7, 1)$

Нормированный ОУМ обоих пучков на рис. 3 также был рассчитан по формулам (3), (4) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.

Заключение

Таким образом, в данной работе рассмотрен ОУМ суперпозиции одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей, каждый из которых смещён в плоскости, поперечной оптической оси.

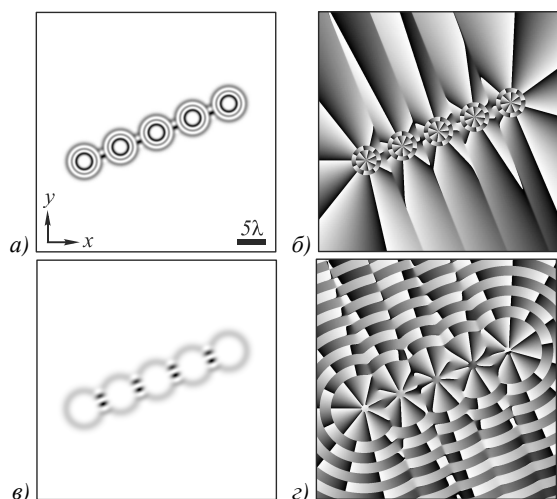


Рис. 3. Интенсивность (негатив) (а, в) и фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) (б, д) суперпозиции пяти мод Лагерра–Гаусса (а, б) и пучков Бесселя–Гаусса (в, д). Параметры мод Лагерра–Гаусса: порядок $(n, m) = (7, 2)$, радиус перетяжки $w = \lambda$. Параметры пучков Бесселя–Гаусса: порядок $n = 7$, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 2/\lambda$. Все пучки имеют длину волны $\lambda = 532$ нм, центры расположены на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$, вектор весовых коэффициентов в суперпозиции $C_m = \exp(2\pi i m/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$

Доказано две теоремы о сохранении нормированного ОУМ такой суперпозиции. Если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т.е. разность фаз между пучками равна 0 или π), то независимо от смещения пучков нормированный ОУМ всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка, т.е. его топологическому заряду. Если центры пучков расположены на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ), то даже при комплексных весовых коэффициентах нормированный ОУМ всей суперпозиции также равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка.

Проведено численное моделирование, подтвердившее сохранение нормированного ОУМ для суперпозиций трёх и пяти оптических вихрей разной формы. Доказанные теоремы позволяют с помощью любого числа одинаковых радиально-симметричных вихревых пучков путём подбора весовых коэффициентов и величины смещения каждого пучка с оптической оси формировать новые пучки с разным распределением интенсивности (в том числе и не радиально-симметричным), но обладающие одинаковым нормированным ОУМ.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-47-02492 и 15-37-20723.

Литература

1. Yao, A.M. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // *Advances in Optics and Photonics*. – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204.

2. Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
3. Barnett, S.M. Orbital angular momentum and nonparaxial light-beams / S.M. Barnett, L. Allen // *Optics Communications*. – 1994. – Vol. 110. – P. 670-678.
4. Volke-Sepulveda, K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garces-Chavez, S. Chavez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4. – P. S82-S89.
5. Litvin, I.A. Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams / I.A. Litvin, A. Dudley, A. Forbes // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19. – No. 18. – P. 16760-16771.
6. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39. – No. 8. – P. 2395-2398.
7. Kotlyar, V.V. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1997. – Vol. 44. – No. 7. – P. 1409-1416.
8. Paakkonen, P. Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics / P. Paakkonen, J. Lautanen, M. Honkanen, M. Kuitinen, J. Turunen, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, A.T. Friberg // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45. – No. 11. – P. 2355-2369.
9. Khonina, S.N. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen // *Optik*. – 1999. – Vol. 110. – No. 3. – P. 137-144.
10. MacDonald, M.P. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures / M.P. MacDonald, L. Paterson, K. Volke-Sepulveda, J. Arlt, W. Sibbett, K. Dholakia // *Science*. – 2002. – Vol. 296. – P. 1101-1103.
11. Courtial, J. Angular momentum of optical vortex arrays / J. Courtial, R. Zambrini, M. Dennis, M. Vasnetsov // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 4. – P. 938-949.
12. Martinez-Castellanos, I. Shaping optical beams with non-integer orbital angular momentum: a generalized differential operator approach / I. Martinez-Castellanos, J. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2015. – ID 229244 (posted 12 August 2014, in press).
13. Durnin, J. Exact solution for nondiffractive beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1987. – Vol. 4. – P. 651-654.
14. Kotlyar, V.V. Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29. – No. 5. – P. 741-747.
15. Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64. – P. 491-495.

References

- [1] Yao AM, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics* 2011; 3: 161-204.
- [2] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A* 1992; 45: 8185-9.
- [3] Barnett SM, Allen L. Orbital angular momentum and nonparaxial light-beams. *Optics Communications* 1994; 110: 670-8.
- [4] Volke-Sepulveda K, Garces-Chavez V, Chavez-Cedra S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-

- order Bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 2002; 4: S82-9.
- [5] Litvin IA, Dudley A, Forbes A. Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams. *Optics Express* 2011; 19(18): 16760-71.
- [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Optics Letters* 2014; 39(8): 2395-8.
- [7] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images. *Journal of Modern Optics* 1997; 44(7): 1409-16.
- [8] Paakkonen P, Lautanen J, Honkanen M, Kuittinen M, Turunen J, Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Friberg AT. Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics. *Journal of Modern Optics* 1998; 45(11): 2355-69.
- [9] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Lautanen J, Honkanen M, Turunen J. Generating a couple of rotating non-diffracting beams using a binary-phase DOE. *Optik* 1999; 110(3): 137-44.
- [10] MacDonald MP, Paterson L, Volke-Sepulveda K, Arlt J, Sibbett W, Dholakia K. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures. *Science* 2002; 296: 1101-3.
- [11] Courtial J, Zambrini R, Dennis M, Vasnetsov M. Angular momentum of optical vortex arrays. *Optics Express* 2006; 4: 938-49.
- [12] Martinez-Castellanos I, Gutierrez-Vega J. Shaping optical beams with non-integer orbital angular momentum: a generalized differential operator approach. *Optics Letters* 2015; 40(8): 1764-7.
- [13] Durnin J. Exact solution for nondiffractive beams. I. The scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A* 1987; 4(4): 651-4.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Hankel-Bessel laser beams. *Journal of the Optical Society of America A* 2012; 29(5): 741-7.
- [15] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Optics Communications* 1987; 64: 491-5.

CONSERVATION THEOREMS FOR THE ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF A SUPERPOSITION OF SHIFTED OPTICAL VORTICES

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, D.S. Kalinkina²

¹ Image Processing Systems Institute, Samara, Russia,
Russian Academy of Sciences,

² Samara State Aerospace University, Samara, Russia

Abstract

We proved two conservation theorems for the orbital angular momentum (OAM) of a superposition of identical optical vortices with an arbitrary radially symmetric shape, integer topological charge n , and arbitrary off-axis shift. The normalized OAM of such a superposition for any real weights equals the OAM of each individual beam contributing to the superposition. If the beam centers are located on a straight line passing through the origin, then, even if the superposition weights are complex, the normalized OAM of the whole superposition equals that of each contributing beam. These theorems allow of generating vortex laser beams with different (not necessarily radially symmetric) intensity distribution, but with the same OAM. The results of numerical simulation are given for superpositions of Bessel beams, Hankel-Bessel, Bessel-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams.

Keywords: orbital angular momentum, optical vortex, topological charge.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS. Conservation theorems for the orbital angular momentum of a superposition of shifted optical vortices. *Computer Optics* 2015; 39(3): 305-10.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Ковалёв Алексей Андреевич** и **Котляр Виктор Викторович** – см. стр. 303 этого номера.

Калинкина Дарья Сергеевна, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика. E-mail: dkalinkina@gmail.com.

Darya Sergeevna Kalinkina (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering faculty. She is a post graduate student of Technical Cybernetics department in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics.

Поступила в редакцию 14 апреля 2015 г.

Окончательный вариант 15 июля 2015 г.