

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ВЕКТОРНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ХАНКЕЛЯ С ОРБИТАЛЬНЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

Получены в явном виде амплитуды всех проекций векторов напряжённости электрического и магнитного полей для семейства векторных непараксиальных вихревых пучков Ханкеля с линейной поляризацией. Тем самым получены в замкнутой аналитической форме выражения для проекций вектора Умова–Пойнтинга и вектора углового момента. До сих пор только для непараксиальных векторных пучков Бесселя и параксиальных векторных пучков Лагерра–Гаусса были аналитически получены проекции этих векторов.

Ключевые слова: непараксиальное распространение, пучок Ханкеля, оптический вихрь, векторная теория электромагнитного поля, орбитальный угловой момент.

Цитирование: Котляр, В.В. Векторные лазерные пучки Ханкеля с орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 449–452. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-449-452.

Введение

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) интенсивно изучаются в оптике. Они применяются для беспроводной связи с увеличенной плотностью канала передачи информации [1], для оптического захвата и вращения микрочастиц [2]. Такие пучки имеют «иммунитет» к турбулентности, и их можно применять для зондирования атмосферы [3]. В задачах микроманипуляции важно, чтобы фокальное пятно не имело боковых лепестков [4]. Такому требованию удовлетворяют, например, недавно открытые лазерные пучки Ханкеля [5]. Это непараксиальные скалярные вихревые лазерные пучки, которые, аналогично обычным Гауссовым пучкам, не имеют боковых лепестков. Также в задачах микроманипуляции требуется обеспечить острую фокусировку лазерного пучка. При острой фокусировке света, когда лучи сходятся в фокус под большими углами, в формировании фокуса существенную роль начинает играть поляризация. Для адекватного описания ОУМ в области фокуса требуется рассматривать все шесть проекций векторов напряжённости электромагнитного поля. В оптике известно небольшое число векторных световых полей, которые можно описать аналитически явным образом. Замкнутые аналитические выражения для ОУМ до сих пор получены только для параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [6] и для векторных пучков Бесселя [7]. В [8] получены выражения для проекций векторов напряжённости электрического (Е-вектор) и магнитного (Н-вектор) полей электромагнитной волны. Все проекции Е- и Н-векторов выражены через три интеграла, представляющих собой разложения по угловому спектру плоских волн. На основе проекций электромагнитного поля получены выражения для вектора Пойнтинга и ОУМ.

В данной работе рассмотрены новые векторные непараксиальные вихревые пучки Ханкеля. Для векторного пучка Ханкеля с линейной поляризацией получены явные аналитические выражения для всех проекций Е- и Н-векторов напряжённости электромагнитной волны. На основе полученных формул можно в аналитическом виде получить выражение для вектора плотности орбитального момента векторных пучков Ханкеля.

Векторные пучки Ханкеля и плотность углового момента

В [8] показано, что вектор углового момента (ОМ), равный

$$\mathbf{j} = \epsilon \mu [\mathbf{r} \times \mathbf{S}], \quad (1)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость среды, \mathbf{S} – вектор Умова–Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] \right), \quad (2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} – вектора напряжённости электрического и магнитного поля электромагнитной волны, может быть рассчитан для волны с линейной поляризацией, направленной вдоль оси x , с помощью следующих выражений для всех проекций векторов напряжённости поля:

$$\begin{aligned} E_x &= I_1, & E_y &= 0, & E_z &= -\frac{1}{k} \frac{\partial I_2}{\partial x}, \\ H_x &= \frac{i}{\mu k^2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial y \partial x}, \\ H_y &= \frac{i}{\mu} I_3 + \frac{i}{\mu k^2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2}, \\ H_z &= \frac{i}{\mu k} \frac{\partial I_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) используются следующие интегралы:

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A(\rho, \theta) \times \exp\left[ikr\rho \cos(\varphi - \theta) - kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (4)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A(\rho, \theta)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \times \exp\left[ikr\rho \cos(\varphi - \theta) - kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (5)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A(\rho, \theta) \sqrt{\rho^2 - 1} \times \exp\left[ikr\rho \cos(\varphi - \theta) - kz\sqrt{\rho^2 - 1}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (6)$$

где $A(\rho, \theta)$ – комплексная амплитуда спектра плоских волн, (x, y, z) – декартовы координаты, z – координата вдоль оптической оси, (r, φ, z) – цилиндрические координаты и (ρ, θ) – безразмерные полярные координаты спектра плоских волн (то есть ρ – это отношение проекции волнового вектора \mathbf{k} на поперечную плоскость к волновому числу k).

Двойные интегралы (4)–(6) сводятся к одинарным интегралам, если можно явно выделить «вихревую» составляющую амплитуды спектра плоских волн:

$$A(\rho, \theta) = A(\rho) \exp(in\theta), \quad (7)$$

где n – целое число. С учётом (7) выражения (4)–(6) будут иметь вид:

$$I_1 = 2\pi i^n e^{in\phi} \times \int_0^\infty A(\rho) \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho, \quad (8)$$

$$I_2 = 2\pi i^n e^{in\phi} \times \int_0^\infty \frac{A(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho, \quad (9)$$

$$I_3 = 2\pi i^n e^{in\phi} \times \int_0^\infty A(\rho) \sqrt{\rho^2 - 1} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho, \quad (10)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Заметим, что выражения (8)–(10) связаны между собой с помощью производных:

$$I_3 = -\frac{1}{k} \frac{\partial I_1}{\partial z} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial z^2}, \quad I_1 = -\frac{1}{k} \frac{\partial I_2}{\partial z}. \quad (11)$$

Пусть $A(\rho) = \rho^n$. При этом основной вклад в поле дают неоднородные затухающие волны. Мощность такого спектра плоских волн неограниченная, и мощность светового поля, имеющего такой спектр, тоже не ограничена. Если спектр плоских волн задаётся такой степенной функцией, интегралы (8)–(10) можно вычислить с помощью функций Ханкеля:

$$I_1 = 2\pi i^n e^{in\phi} \int_0^\infty \rho^n \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho = i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z r^n e^{in\phi} \Psi_{n+3/2}(R), \quad (12)$$

$$I_2 = 2\pi i^n e^{in\phi} \times \int_0^\infty \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho = i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} r^n e^{in\phi} \Psi_{n+1/2}(R), \quad (13)$$

$$I_3 = 2\pi i^n e^{in\phi} \times \int_0^\infty \rho^n \sqrt{\rho^2 - 1} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) \rho d\rho = i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} r^n e^{in\phi} [z^2 \Psi_{n+5/2}(R) - k^{-1} \Psi_{n+3/2}(R)], \quad (14)$$

$$\Psi_{n+v}(R) = \frac{H_{n+v}^{(2)}(kR)}{R^{n+v}}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi_{n+v}(R)}{\partial x} = -\Psi_{n+v+1}(R)(kr \cos \phi), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Psi_{n+v}(R)}{\partial y} = -\Psi_{n+v+1}(R)(kr \sin \phi),$$

где $H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iY_v(x)$ – функция Ханкеля, $Y_v(x)$ – функция Неймана.

Из (12)–(14) видно, что интегралы I_1, I_2, I_3 равны соответственно пучкам Ханкеля 2-го, 1-го и 3-го типов [5]. Вспомогательные уравнения (16) используются для получения последующих формул.

С помощью (3) и (12)–(15) найдём все проекции векторного светового поля Ханкеля с линейной поляризацией ($E_y(r, \varphi, z) = 0$):

$$E_x(r, \phi, z) = i^{n+1} \pi \lambda^{1/2} z r^n e^{in\phi} \Psi_{n+3/2}(R), \quad (17)$$

$$E_z(r, \phi, z) = \frac{i^{n+1} \lambda^{3/2} r^{n-1} e^{in\phi}}{2} \times \quad (18)$$

$$\times [n e^{-i\phi} \Psi_{n+1/2}(R) - kr^2 \cos \phi \Psi_{n+3/2}(R)],$$

$$H_x(r, \phi, z) = \frac{i^n \lambda^{5/2} r^{n-2} e^{in\phi}}{4\pi\mu} \times \quad (19)$$

$$\times [in(n-1) e^{-i2\phi} \Psi_{n+1/2}(R) - \quad (19)$$

$$-inkr^2 e^{-i2\phi} \Psi_{n+3/2}(R) +$$

$$+k^2 r^4 \sin \phi \cos \phi \Psi_{n+5/2}(R)],$$

$$H_y(r, \phi, z) = \frac{i^n \lambda^{5/2} r^{n-2} e^{in\phi}}{4\pi\mu} \times \quad (20)$$

$$\times [n(n-1) e^{-i2\phi} \Psi_{n+1/2}(R) - \quad (20)$$

$$-2kr^2(1 + n e^{-i\phi} \cos \phi) \Psi_{n+3/2}(R) +$$

$$+k^2 r^2(z^2 + r^2 \cos^2 \phi) \Psi_{n+5/2}(R)],$$

$$H_z(r, \phi, z) = \frac{i^n \lambda^{3/2} z r^{n-1} e^{in\phi}}{2\mu} \times \quad (21)$$

$$\times [i n e^{-i\phi} \Psi_{n+3/2}(R) - kr^2 \sin \phi \Psi_{n+5/2}(R)].$$

Из (1) проекция на ось z ОУМ будет иметь вид:

$$j_z = \frac{\epsilon \mu^2}{2} [x \operatorname{Re}(E_z H_x^* - H_z^* E_x) + y \operatorname{Re}(E_z H_y^*)]. \quad (22)$$

Из (22) видно, что выражения (17)–(21) позволяют в замкнутой форме (хотя и громоздкой) получить плотность проекции ОУМ на оптическую ось для непараксиального векторного пучка Ханкеля.

Из (17) видно, что поперечная проекция Е-поля имеет радиально-симметричное распределение интенсивности с нулевым значением интенсивности на оптической оси (при $r=0$), кроме начальной плоскости ($z=0$) и кроме $n=0$, когда пучок Ханкеля совпадает со сферической волной. Из (18) видно, что продольная проекция Е-поля не будет обладать радиальной симметрией, а будет обладать симметрией относительно обеих декартовых координат и вытянута вдоль направления поляризации (вдоль оси x). Также продольная проекция Е-поля на ось будет всегда равна нулю, кроме случая $n=1$. При $n=1$ в центре распределения интенсивности находится седловая точка: минимум по координате x и максимум по координате y . Значит, и полная интенсивность векторного пучка Ханкеля с линейной поляризацией $I=|E_x|^2+|E_z|^2$ не будет обладать радиальной симметрией относительно оптической оси.

На рис. 1 показаны распределения поперечной и продольной составляющих интенсивности, а также суммарной интенсивности (т.е. величины $I_x=|E_x|^2$, $I_z=|E_z|^2$, $I=I_x+I_y$ соответственно) векторного пучка Ханкеля с линейной поляризацией вдоль оси x , с топологическим зарядом $n=1$ в плоскостях $z=5\lambda$ и $z=10\lambda$.

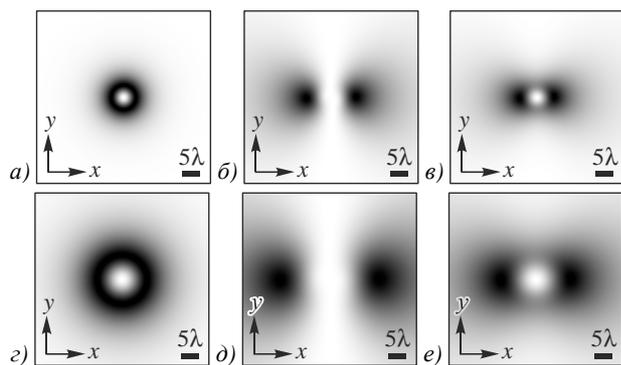


Рис. 1. Интенсивность (негатив) поперечной (а, с), продольной (б, д) и суммарной (в, е) интенсивности векторного пучка Ханкеля (длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $n = 1$) в плоскостях $z = 5\lambda$ (а, б, в) и $z = 10\lambda$ (с, д, е)

Заключение

Комплексные амплитуды скалярных пучков Ханкеля, полученных в [5], использованы для получения векторных пучков Ханкеля. Получены в явном виде амплитуды всех проекций векторов напряжённости электрического и магнитного полей (17)–(21) для векторного непараксиального вихревого пучка Ханкеля с линейной поляризацией. Тем самым получены в замкнутой аналитической форме выражения для проекций вектора Умова–Пойнтинга (УП) (2) и ОУМ (1). До сих пор только для непараксиального векторного пучка Бесселя [7] и параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [6] можно было записать аналитически проекции этих векторов УП и

ОУМ. Хотя интенсивность поперечной электрической компоненты E_x (17) обладает радиальной симметрией, интенсивность других проекций светового поля E_z (18), H_x (19), H_y (20) и H_z (21) не имеет радиальной симметрии для линейно-поляризованного пучка Ханкеля.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9), а также грантов РФФИ 13-07-97008, 14-29-07133 и 14-07-31092, 15-07-01174.

Литература

1. Wang, J. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J.-Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6. – P. 488-496.
2. Khonina, S.N. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, K. Jefimov, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 14. – P. 2167-2184.
3. Zhu, Y. Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence / Y. Zhu, X. Liu, J. Cao, Y. Zhang, F. Zhao // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 7. – P. 7765-7772.
4. Guo, J. Analysis of optical vortices with suppressed sidelobes using modified Bessel-like function and trapezoid annulus modulation structures / J. Guo, Z. Wei, Y. Liu, A. Huang // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2015. – Vol. 32, Issue 2. – P. 195-203.
5. Котляр, В.В. Непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля первого и второго типов / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Соифер // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 299-304.
6. Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
7. Volke-Sepulveda, K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chavez, S. Chavez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4. – P. S82-S89.
8. Cerjan, A. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / A. Cerjan, C. Cerjan // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2011. – Vol. 28, Issue 11. – P. 2253-2260.

References

- [1] Wang J, Yang JY, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat. Photonics* 2012; 6: 488-96.
- [2] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimov K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements *Journal of Modern Optics* 2004; 51(14): 2167-84.
- [3] Zhu Y, Liu X, Cao J, Zhang Y, Zhao F. Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence. *Optics Express* 2014(7); 22: 7765-72.

- [4] Guo J, Wei Z, Liu Y, Huang A. Analysis of optical vortices with suppressed sidelobes using modified Bessel-like function and trapezoid annulus modulation structures. *Journal of the Optical Society of America A* 2015; 32(2): 195-203.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Nonparaxial Hankel vortex beams of the first and second types. *Computer Optics* 2015; 39(3): 299-304.
- [6] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A* 1992; 45: 8185-9.
- [7] Volke-Sepulveda K, Garcés-Chavez V, Chavez-Cedra S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 2002; 4: S82-9.
- [8] Cerjan A, Cerjan C. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Journal of the Optical Society of America A* 2011; 28(11): 2253-60.

VECTORIAL HANKEL LASER BEAMS CARRYING ORBITAL ANGULAR MOMENTUM

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,

² Samara State Aerospace University

Abstract

We have obtained explicit expressions for amplitudes of all components of the electric and magnetic vector of a family of vectorial nonparaxial linearly polarized vortex Hankel beams. Thus, closed-form analytical expressions have been derived for the projections of the Umov-Poynting vector and angular momentum vector. Up to now, projections of these vectors have been obtained only for the nonparaxial vectorial Bessel beams and paraxial vectorial Laguerre-Gaussian beams.

Keywords: nonparaxial propagation, Hankel beam, optical vortex, vector electromagnetic theory, orbital angular momentum.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Vectorial Hankel laser beams carrying orbital angular momentum. *Computer Optics* 2015; 39(4): 449-52, DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-449-452.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства.

E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS). He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, photonic crystal devices.

Поступила в редакцию 8 сентября 2015 г.
Окончательный вариант – 16 сентября 2015 г.