

ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ГАУССОВА ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Мы показали, что эллиптический Гауссов пучок, сфокусированный цилиндрической линзой, является линейной комбинацией счётного числа только чётных угловых гармоник как с положительным, так и с отрицательным топологическим зарядом. Получена точная формула для орбитального углового момента астигматического Гауссова пучка в виде сходящегося ряда из функций Лежандра второго рода. Показано, что при определённых условиях в этом ряду остаются только слагаемые с положительным или отрицательным топологическим зарядом.

Ключевые слова: эллиптический Гауссов пучок, цилиндрическая линза, орбитальный угловой момент, топологический заряд.

Цитирование: Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент астигматического Гауссова лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 609-616. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-609-616.

Введение

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) активно исследуются в настоящее время из-за их широкого применения для оптического захвата и вращения микрочастиц [1] и холодных атомов [2], в фазово-контрастной микроскопии [3], в микроскопии со стимулированным истощением излучения [4], в оптической классической [5] и квантовой информатике [6].

Интересный лазерный пучок, который обладает ОУМ, но не имеет изолированных нулей интенсивности с фазовой дислокацией, рассмотрен в [7]. В [7] вычислили ОУМ для эллиптического Гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. Идея использования цилиндрической линзы для придания пучку ОУМ была впервые высказана в [8]. В [8] было экспериментально показано, что пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, после цилиндрической линзы на определённом расстоянии и при определённых условиях преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с ОУМ.

В работах [9–20] пытались получить как можно большее значение ОУМ. В [9] предложено увеличивать ОУМ с помощью набора Гауссовых вихревых пучков, центры которых расположены на окружности, а оптические оси отдельных пучков и общая оптическая ось являются скрещенными прямыми. В [9] показано, что ОУМ такого составного пучка может быть равен 204 на фотон. В [10] вместо Гауссовых пучков предлагается использовать небольшие отверстия в непрозрачном экране как точечные источники. Если их расположить в виде спирали, то в совокупности они сформируют вихревой пучок с ОУМ. В [10] практически реализован пучок с ОУМ, равным 3. В [11] показано, что при острой фокусировке оптического вихря с большим топологическим зарядом уменьшается контраст или видимость боковых лепестков. В [11] практически фокусировался пучок с ОУМ, равным 15 на фотон. В [12] предложен интересный способ определения топологического заряда оптического вихря с помощью кольцевой дифракционной решётки. Экспериментально показано, что таким способом можно определить топологический заряд ± 25 .

В [13] экспериментально с помощью трёхволнового смещения в нелинейной среде Керра сформированы вихревые гармоники с ОУМ до 30 на фотон. В [14] практически осуществили с помощью цифрового многоэлементного зеркала (с числом микрозеркал 1024×768) генерацию идеального оптического вихря с топологическим зарядом 90. В [15] с помощью жидкокристаллического модулятора света (число элементов 1900×1200) сформировали оптический вихрь с топологическим зарядом 200, что позволило вращать микрочастицы диаметром 1,4 мкм со скоростью 500 мкм/с. В [16] также с помощью модулятора света (число отсчётов 1920×1080) сформированы перепутанные пары фотонов с ОУМ ± 300 на фотон. В [17] с помощью спирального фазового зеркала, полученного в пластинке алюминия алмазным резцом, экспериментально сформирован оптический вихрь с топологическим зарядом 100. Эти же авторы [18] с помощью усовершенствованной технологии на подложке из алюминия диаметром 75 мм и шероховатостью 3 нм создали спиральное зеркало, способное формировать оптические вихри с топологическим зарядом 1020. В [18] также интерферометрически доказали, что сформированный зеркалом оптический вихрь имеет топологический заряд 5050, но форма вихря при этом существенно искажилась. В [19] с помощью электронной литографии в резисте РММА создали голограмму диаметром 80 мкм с разрешением 35 нм и высотой рельефа 25 нм, которая позволила сформировать вихревой пучок электронов с энергией 0,5–1 эВ с топологическим зарядом 1000. И, наконец, в [20] с помощью спирального алюминиевого зеркала диаметром около 50 мм для длины волны 810 нм сформированы фотоны, перепутанные по ОУМ и поляризации. Причём квантовый ОУМ фотонов был равен ± 10010 . Это максимальное значение ОУМ, полученное на сегодняшний день.

В данной работе, следуя работе [7], мы покажем, что эллиптический Гауссов пучок после цилиндрической линзы, ось которой не совпадает с осями эллипса Гауссова профиля, при распространении вращается и не является вихревым лазерным пучком. Хотя его полный ОУМ может достигать больших значений пучка

тём изменения радиусов перетяжки эллиптического Гауссова пучка и фокусного расстояния цилиндрической линзы. Рассчитаны коэффициенты разложения комплексной амплитуды такого астигматического Гауссова пучка в ряд по угловым гармоникам. Также получена точная формула для ОУМ в виде ряда по функциям Лежандра второго рода.

1. Бесвихревой пучок с ОУМ

В этом параграфе для удобства читателя первые четыре формулы совпадают с [7]. Обычно рассматриваются параксиальные вихревые лазерные пучки, обладающие ОУМ. У таких пучков есть точки сингулярности – это изолированные нули интенсивности, в которых фаза не определена и вокруг которых изофазная поверхность волнового фронта имеет спиральную форму. Но, оказывается, есть простые световые поля, которые обладают ОУМ и не имеют изолированных нулей интенсивности с вихревой фазой. Рассмотрим Гауссов эллиптический пучок, в перетяжке которого расположена цилиндрическая линза [7]. Комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой имеет вид:

$$E(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right), \quad (1)$$

где w_x и w_y – радиусы перетяжки Гауссова пучка по декартовым осям, f – фокусное расстояние тонкой цилиндрической линзы, образующая которой имеет угол с вертикальной осью y , равный α (линза повернута против часовой стрелки), k – волновое число света. Нормированный ОУМ в параксиальном случае вычисляется по формулам [7] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (2)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где J_z – проекция ОУМ на оптическую ось, W – плотность энергии (мощности) света, Im – мнимая часть числа, \bar{E} – комплексно сопряжённая амплитуда к амплитуде (1). Подставляя (1) в (2) и (3), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (1):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2). \quad (4)$$

Из (4) видно, что ОУМ равен нулю, если Гауссов пучок имеет круглое сечение ($w_x = w_y$) или линза не имеет наклона к вертикальной оси ($\alpha = 0$). При наклоне в 45 градусов ОУМ (4) максимальный при прочих равных условиях. Из (4) также видно, что ОУМ пучка (1) в общем случае дробный, хотя может быть и целым. Чем меньше фокусное расстояние цилиндрической линзы, тем больше ОУМ пучка, и чем больше степень эллип-

тичности пучка (1), тем больше его ОУМ. Знак ОУМ определяется тем, по какой оси, y или x , больше вытянут Гауссов пучок в перетяжке. Преимущество пучка (1) в том, что он может быть реализован без дополнительных элементов, без модулятора света, спиральной фазовой пластинки или голограммы с «вилочкой». Для его формирования надо всего две цилиндрические линзы, одна из которых формирует эллиптический Гауссов пучок, а вторая – создаёт ОУМ.

Оценим величину ОУМ для конкретных значений величин, входящих в (4). Гауссов пучок считается параксиальным, если радиусы его перетяжки больше длины волны, пусть они будут равны $w_x = 2$ мм и $w_y = 1$ мм, фокусное расстояние пусть будет равно $f = 10$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, наклон линзы равен 45° ($\alpha = \pi/4$). Тогда ОУМ в (4) будет равен 471,24.

В Приложении 1 показано, что использование двух скрещённых цилиндрических линз с одинаковыми фокусными расстояниями, но имеющих разные знаки, увеличивает нормированный ОУМ в 2 раза.

В Приложении 2 получены формулы, описывающие прохождение поля (1) через ABCD-систему, и получена общая формула для плотности ОУМ астигматического Гауссова пучка на любом расстоянии от плоскости перетяжки.

В Приложении 3 получено выражение для полного ОУМ астигматического Гауссова пучка (1), если цилиндрическую линзу размещать не в перетяжке, а в любой другой плоскости при распространении пучка.

2. Орбитальный угловой момент астигматического пучка

Чтобы наглядно показать формирование ОУМ, ОУМ пучка (1) в данном параграфе будет рассчитан другим способом, основанным на разложении амплитуды поля (1) в ряд по угловым гармоникам. Разложим амплитуду (1) в полярных координатах (r, φ)

$$E(r, \varphi) = \exp(-ar^2 \cos^2 \varphi - br^2 \sin^2 \varphi - icr^2 \sin 2\varphi), \quad (5)$$

в ряд по угловым гармоникам:

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(r) \exp(in\varphi), \quad (6)$$

$$\text{где } C_n(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

а также

$$\begin{aligned} a &= w_x^{-2} + ik(2f)^{-1} \cos^2 \alpha, \\ b &= w_y^{-2} + ik(2f)^{-1} \sin^2 \alpha, \\ c &= k(4f)^{-1} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Интеграл (7) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} C_n(r) &= (2\pi)^{-1} e^{-D} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \exp(-in\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A = [(a-b)/2]r^2$, $B = cr^2$, $D = [(a+b)/2]r^2$. После замены $t = 2\varphi$, и с учётом чётности номера $n = 2m$, вместо (9) получим:

$$C_n(r) = (2\pi)^{-1} e^{-D} \int_0^{2\pi} \exp(-imt - A \cos t - iB \sin t) dt = (-i)^m e^{-D+im\theta} J_m(F) = e^{-D} \left(\frac{F}{A-B}\right)^m J_m(F), \quad (10)$$

где $F = (B^2 - A^2)^{1/2}$, $\text{tg } \theta = iB/A$. Для нечётных номеров угловых гармоник $n = 2m + 1$ коэффициенты (9) будут равны нулю:

$$\begin{aligned} 2\pi C_{2m+1}(r) &= e^{-D} \int_0^{2\pi} \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi = \\ &= e^{-D} \left\{ \int_0^{\pi} \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi} \exp[-i(2m+1)(\varphi + \pi) - A \cos 2(\varphi + \pi) - iB \sin 2(\varphi + \pi)] d\varphi \right\} = \\ &= e^{-D} \int_0^{\pi} [1 + (-1)^{2m+1}] \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда для коэффициентов (9) получим:

$$C_n(r) = \begin{cases} e^{-D} \left(\frac{F}{A-B}\right)^{n/2} J_{n/2}(F), & n = 2m, \\ 0, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) видно, что коэффициенты при угловых гармониках с положительными и отрицательными номерами различаются по модулю ($n = 2m$):

$$|C_{2m}(r)|^2 = e^{-2\text{Re}D} \left|\frac{A+B}{A-B}\right|^m |J_m(F)|^2, \quad (13)$$

$$|C_{-2m}(r)|^2 = e^{-2\text{Re}D} \left|\frac{A-B}{A+B}\right|^m |J_m(F)|^2.$$

Нормированный ОУМ для разложения (6) можно представить в виде выражения:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{C}_n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n}, \quad (14)$$

где

$$\bar{C}_n = \int_0^{\infty} |C_n(r)|^2 r dr.$$

Далее полагаем $\alpha = \pi/4$, чтобы $a - b$ было вещественным и можно было убрать знак модуля у квадрата функции Бесселя. Коэффициенты в сумме (14) для чётных номеров имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2m} &= \left|\frac{a-b+2c}{a-b-2c}\right|^m \times \\ &\times \int_0^{\infty} \exp[-\text{Re}(a+b)r^2] \times \\ &\times J_m^2\left(\frac{r^2}{2} \sqrt{4c^2 - (a-b)^2}\right) r dr. \end{aligned} \quad (15)$$

В общем же случае, при $\alpha \neq \pi/4$, вместо (15) получится более громоздкое выражение:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2m} &= \int_0^{\infty} e^{-2\text{Re}D} \left|\frac{A+B}{A-B}\right|^m |J_m(F)|^2 r dr = \\ &= \left|\frac{a-b+2c}{a-b-2c}\right|^m \int_0^{\infty} e^{-\text{Re}(a+b)r^2} J_m(Gr^2) J_m(G^*r^2) r dr = (16) \\ &= \frac{1}{2} \left|\frac{a-b+2c}{a-b-2c}\right|^m \int_0^{\infty} e^{-\text{Re}(a+b)u} J_m(Gu) J_m(G^*u) du, \end{aligned}$$

где $G = [4c^2 - (a-b)^2]^{1/2}/2$.

Интеграл в (15) можно вычислить с помощью справочного [21] интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-pr^2} J_m^2(qr^2) r dr = (2\pi q)^{-1} Q_{|m|-1/2} \left(1 + \frac{p^2}{2q^2}\right), \quad (17)$$

для вычисления интеграла в (16) можно также использовать справочный интеграл [21]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-px} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx &= \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{bc}} Q_{\nu-1/2} \left(\frac{p^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $Q_\nu(x)$ – шаровая функция или функция Лежандра 2-го рода ($x > 1$):

$$\begin{aligned} Q_\nu(x) &= \sqrt{\pi} (2x)^{-\nu-1} \Gamma(\nu+1) \Gamma^{-1}(\nu+3/2) \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu + \frac{3}{2}, x^{-2}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, ${}_2F_1(a, b, c, x)$ – гипергеометрическая функция [22]. Тогда вместо (15) можно записать:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2m} &= \pi^{-1} \left(\frac{c+a-b}{c-a+b}\right)^m \times \\ &\times \left[c^2 - (a-b)^2\right]^{-1/2} Q_{|m|-1/2} \left[1 + \frac{2(a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2}\right], \end{aligned} \quad (20)$$

или для общего случая угла наклона $\alpha \neq \pi/4$ вместо (20) получим:

$$\bar{C}_{2m} = \frac{1}{2\pi|G|} \left| \frac{a-b+2c}{a-b-2c} \right|^m \times Q_{|m|-1/2} \left(\frac{\text{Re}^2(a+b) + 2\text{Re}G^2}{2|G|^2} \right). \quad (21)$$

Пусть $|G|^2 \approx 0$. Тогда аргумент функции Лежандра в (21) стремится к бесконечности, и из асимптотики функции Лежандра при $x \gg 1$ [22]

$$Q_{|v|}(x) \approx \sqrt{\pi} (2x)^{-|v|-1} \Gamma(|v|+1) \Gamma^{-1}(|v|+3/2) \quad (22)$$

следует выражение для коэффициентов разложения в формуле для ОУМ (14):

$$\bar{C}_{2m} = \frac{1}{2^{2|m|+1} \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(|m|+1/2)}{\Gamma(|m|+1)} \times \frac{|a-b+2c|^{|m|+m} |a-b-2c|^{|m|-m}}{\text{Re}^{2|m|+1}(a+b)}. \quad (23)$$

Заметим, что аргумент функции Лежандра в (20) комплексный. Далее для определённости опять пусть цилиндрическая линза повернута на угол α , равный 45 градусам. Когда Гауссов пучок круглый ($w_y = w_x$), тогда в (20) $a-b=0$, и коэффициенты (20) при угловых гармониках с номерами m и $-m$ равны, то есть ОУМ (14) равен нулю. При $2c=b-a$, или когда $f^{-1} = z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$ ($z_{0x} = kw_x^2/2$, $z_{0y} = kw_y^2/2$ – длины Рэлея), все коэффициенты (20) при $m > 0$ равны нулю, а при $m < 0$ коэффициенты (20) отличны от нуля:

$$\bar{C}_{2m} = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ \frac{f}{k\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(|m|+1/2)}{\Gamma(|m|+1)} \left(\frac{w_y^2 + w_x^2}{w_x^2 - w_y^2} \right)^{-2|m|-1}, & m \leq 0. \end{cases} \quad (24)$$

При этом ОУМ (14) отличен от нуля. Если же, наоборот, $2c=a-b$, то есть $f^{-1} = z_{0x}^{-1} - z_{0y}^{-1}$, то все коэффициенты при $m < 0$ равны нулю, а при $m > 0$ коэффициенты (20) отличны от нуля:

$$\bar{C}_{2m} = \begin{cases} \frac{f}{k\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{w_x^2 + w_y^2}{w_x^2 - w_y^2} \right)^{-2m-1}, & m \geq 0, \\ 0, & m < 0. \end{cases} \quad (25)$$

При этом также ОУМ (14) отличен от нуля. Из (25) видно, что коэффициенты $|\bar{C}_n|$ ряда (14) с увеличением номера убывают до нуля. При больших m вместо (25) можно записать ($m > 0$):

$$\bar{C}_{2m} \approx \frac{f}{k\sqrt{\pi m}} \left(\frac{w_y^2 - w_x^2}{w_y^2 + w_x^2} \right)^{2m+1}. \quad (26)$$

Далее пусть для определённости $a-b > 0$ или $w_y > w_x$, и пусть $c > a-b$, то есть $f^{-1} > z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$. Тогда коэффициенты (20) с положительными номерами $m > 0$ будут больше коэффициентов с отрицательными

номерами: $\bar{C}_{2m} > \bar{C}_{-2m}$. То есть больший вклад в ОУМ будут давать угловые гармоники $\exp(i2m\phi)$ с положительными номерами, и значит, ОУМ > 0 . Если, наоборот, $a-b < 0$ или $w_y < w_x$ и $f^{-1} < z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$, тогда $\bar{C}_{2m} < \bar{C}_{-2m}$ и ОУМ < 0 . Эти выводы согласуются с формулой (4).

Таким образом, мы показали, что эллиптический Гауссов пучок с астигматизмом (1) обладает ОУМ (14), в который дают вклад только все чётные угловые гармоники как с положительным топологическим зарядом $2m$, так и отрицательным $-2m$, хотя их вклады разные по величине $\bar{C}_{2m} \neq \bar{C}_{-2m}$. Причём при $m=0$ коэффициент \bar{C}_0 отличен от нуля и равен:

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - (a-b)^2}} Q_{-1/2} \left[1 + \frac{2(a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right]. \quad (27)$$

Значение функции Лежандра в (27) можно получить через полный эллиптический интеграл [22]:

$$Q_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x}} K \left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} \right), \quad (28)$$

$$K(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}}.$$

3. Моделирование

Проверим численно полученные выше соотношения. Рассчитаем ОУМ по исходной формуле (4) и по формуле через разложение по угловым гармоникам (14). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, угол наклона цилиндрической линзы $\alpha = \pi/4$, радиусы перетяжки эллиптического Гауссова пучка $w_x = 20\lambda$ и $w_y = 400\lambda$, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f = 1/(1/z_{0x} - 1/z_{0y}) \approx 1260\lambda$. Распределение модулей коэффициентов $|\bar{C}_n|$ показано на рис. 1 (сплошная кривая). Для других радиусов перетяжки $w_x = 10\lambda$, $w_y = 100\lambda$ и фокусного расстояния цилиндрической линзы $f = 1/(1/z_{0x} - 1/z_{0y}) \approx 317\lambda$ распределение модулей коэффициентов $|\bar{C}_n|$ в формуле (14) показано на рис. 1 (прерывистая кривая).

Для первого случая (сплошная кривая на рис. 1) ОУМ, рассчитанный по формуле (4), равен 99,500625, а ОУМ, рассчитанный по формуле (14), равен 99,48454. Для второго случая (прерывистая кривая на рис. 1) ОУМ, рассчитанный по формуле (4), равен 24,5025, а ОУМ, рассчитанный по формуле (14), равен 24,5025. Во втором случае видим совпадение с точностью до четырёх знаков после запятой. В расчёте по формуле (14) было учтено 2000 коэффициентов $|\bar{C}_n|$. Из рис. 1 видно, что чем меньше ОУМ, тем меньше величина отличных от нуля коэффициентов разложения по угловым гармоникам $|\bar{C}_n|$ (прерывистая кривая под сплошной кривой).

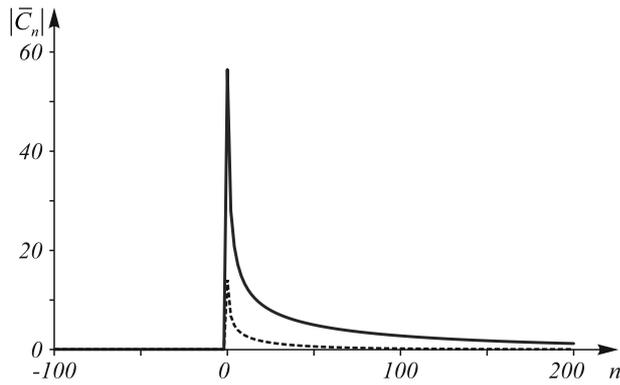


Рис. 1. Распределение $|\bar{C}_n|$ (только чётные номера, нечётные равны нулю) для двух разных пучков и фокусных расстояний цилиндрической линзы: $w_x = 20\lambda$, $w_y = 400\lambda$, $f = 1260\lambda$ (сплошная кривая); $w_x = 10\lambda$, $w_y = 100\lambda$, $f = 317\lambda$ (прерывистая кривая)

Заключение

В работе мы получили следующие результаты. Для астигматического Гауссова пучка, который формируется при фокусировке эллиптического Гауссова пучка цилиндрической линзой, получено выражение для нормированного ОУМ в виде ряда из функций Лежандра второго рода с полуцелыми номерами. Если параметры эллиптического Гауссова пучка и цилиндрической линзы удовлетворяют условию $f^{-1} = z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$, то вклад в ОУМ вносят только угловые гармоники с отрицательными топологическими зарядами $2m < 0$. И, наоборот, если имеет место условие $f^{-1} = z_{0x}^{-1} - z_{0y}^{-1}$, то вклад в ОУМ вносят только угловые гармоники с положительными чётными номерами $2m > 0$. Во всех случаях самым большим по величине будет нулевой коэффициент в разложении астигматического поля по угловым гармоникам. Но так как этот коэффициент умножается на ноль (нулевой топологический заряд), то он не даёт вклад в ОУМ. Но из-за большого вклада нулевой угловой гармоники в амплитуду астигматического поля в распределении интенсивности этого поля нет изолированных нулей, и поэтому точек с сингулярной фазой. Такой астигматический пучок выглядит как безвихревой, хотя он обладает ОУМ.

В трёх Приложениях мы получили: 1) явное выражение для нормированного ОУМ астигматического Гауссова пучка, сфокусированного двумя скрещенными цилиндрическими линзами (собирающей и рассеивающей); этот пучок имеет больший ОУМ, чем сфокусированный только одной собирающей; 2) явную формулу для нормированной плотности ОУМ астигматического Гауссова пучка, прошедшего ABCD-систему; 3) явную формулу для нормированного ОУМ для астигматического пучка, если цилиндрическая линза расположена не в перетяжке эллиптического Гауссова пучка, а на произвольном расстоянии от перетяжки.

Приложение 1

Рассмотрим вместо поля (1) более общее световое поле, когда эллиптический Гауссов пучок проходит

через две скрещенные цилиндрические линзы с разным фокусным расстоянием f_x, f_y , оси которых наклонены под углом α к горизонтальной оси. Комплексная амплитуда такого поля в начальной плоскости ($z = 0$) имеет вид:

$$E(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{ikx'^2}{2f_x} - \frac{iky'^2}{2f_y}\right], \quad (A1)$$

где

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{cases} \quad (A2)$$

Тогда, подставив поле (A1) в (2), (3), можно найти нормированный ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{k}{8} \left(\frac{1}{f_y} - \frac{1}{f_x} \right) (w_x^2 - w_y^2) \sin 2\alpha. \quad (A3)$$

Из сравнения (A3) с (4) видно, что если фокусные расстояния цилиндрических линз имеют разные знаки (одна линза собирающая, а другая – рассеивающая), то ОУМ можно увеличить в 2 раза по сравнению с использованием только одной цилиндрической линзы.

Приложение 2

Рассмотрим распространение поля (A1) через ABCD-систему, тогда для комплексной амплитуды на выходе можно получить выражение:

$$E_2(\xi, \eta) = \frac{-ik}{B\sqrt{G}} \times \exp\left[\frac{ikD}{2B}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{k^2}{B^2} \frac{P_{xx}\eta^2 + P_{yy}\xi^2 - P_{xy}\xi\eta}{G}\right], \quad (B1)$$

где

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2f_x} \cos^2 \alpha + \frac{ik}{2f_y} \sin^2 \alpha - \frac{ikA}{2B}, \\ P_{yy} &= \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2f_x} \sin^2 \alpha + \frac{ik}{2f_y} \cos^2 \alpha - \frac{ikA}{2B}, \\ P_{xy} &= \frac{ik}{2} \left(\frac{1}{f_x} - \frac{1}{f_y} \right) \sin 2\alpha, \quad G = 4P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2. \end{aligned} \quad (B2)$$

Распределение интенсивности поля (A1) на выходе ABCD-системы будет иметь вид:

$$I_2(\xi, \eta) = \frac{k^2}{B^2|G|} \exp\left[-\frac{2k^2}{B^2|G|^2} \Psi(\xi, \eta)\right], \quad (B3)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \\ &= \operatorname{Re}\{P_{yy}G^*\}\xi^2 + \operatorname{Re}\{P_{xx}G^*\}\eta^2 - \operatorname{Re}\{P_{xy}G^*\}\xi\eta. \end{aligned}$$

Из (B3) видно, что интенсивность имеет вид эллиптического Гауссова пучка, как и в начальной плоскости (A1). Из формулы (B1) можно получить формулу для плотности ОУМ в полярных координатах (r, φ) на любом расстоянии z при условии, что цилиндрическая линза только одна с фокусным расстоянием f_x , а также $f_y \rightarrow \infty$, $\alpha = \pi/4$, $A = 1$, $B = z$:

$$\frac{J_z}{|E_2|^2} = kr^2 \frac{2z_{0x}z_{0y} [f_x z^2 + z_{0x}z_{0y}(z - f_x)] \cos 2\phi + f_x (z_{0y}^2 - z_{0x}^2) z (z - 2f_x) \sin 2\phi}{4[f_x z^2 + z_{0x}z_{0y}(z - f_x)]^2 + (z_{0x} + z_{0y})^2 z^2 (z - 2f_x)^2}, \quad (B4)$$

где $z_{0x} = kw_x^2/2$, $z_{0y} = kw_y^2/2$ – длины Рэлея. В частном случае на двойном фокусном расстоянии из (B4) следует простая формула для плотности ОУМ:

$$\frac{J_z}{|E_2|^2} = \frac{k}{2f_x} \frac{z_{0x}z_{0y}}{4f_x^2 + z_{0x}z_{0y}} r^2 \cos 2\phi. \quad (B5)$$

Из (B4) следует, что нормированная плотность ОУМ зависит от расстояния до линзы z . Причём числитель пропорционален z^2 , а знаменатель – z^4 . То есть плотность ОУМ (B4) убывает с расстоянием квадратично, так же, как убывает интенсивность Гауссова пучка из-за его расходимости.

Приложение 3

Рассмотрим эллиптический Гауссов пучок (1) не в плоскости перетяжки, а в любой другой плоскости на расстоянии z от плоскости перетяжки. Комплексная амплитуда на расстоянии z от перетяжки пучка (1) будет иметь вид:

$$E(x, y, z) = [q_x(z)q_y(z)]^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2 q_x(z)} - \frac{y^2}{w_y^2 q_y(z)}\right), \quad (C1)$$

где

$$q_x(z) = 1 + \frac{iz}{z_{0x}}, \quad q_y(z) = 1 + \frac{iz}{z_{0y}}, \quad (C2)$$

а длины Рэлея – как в (B4). Если в поле (C1) поместить цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f , образуя которой повернута в поперечной плоскости на угол α , комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой будет иметь вид:

$$E(x, y, z) = [q_x(z)q_y(z)]^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2 q_x(z)} - \frac{y^2}{w_y^2 q_y(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right). \quad (C3)$$

Нормированный ОУМ пучка (C3) имеет вид:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f}\right) (w_y^2 |q_y|^2 - w_x^2 |q_x|^2). \quad (C4)$$

Из (C4) видно, что знак и величина ОУМ зависит от расстояния z от перетяжки эллиптического Гауссова пучка до плоскости размещения цилиндрической линзы. Это более ясно видно, если записать (C4) в другом виде:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f}\right) (w_y^2 - w_x^2) \left(1 - \frac{4z^2}{k^2 w_x^2 w_y^2}\right). \quad (C5)$$

Из (C5) видно, что если цилиндрическую линзу поместить на расстоянии $z = kw_x w_y / 2$, то ОУМ будет

равен нулю, так как на этом расстоянии эллиптический Гауссов пучок имеет круглое сечение. Если $z < kw_x w_y / 2$, ОУМ положительный, если $z > kw_x w_y / 2$, то отрицательный. При больших z ОУМ растёт по модулю квадратично от z . Хотя заметим, что при ранее выбранных параметрах Гауссова пучка ($w_x = 2$ мм, $w_y = 1$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм), расстояние, на котором ОУМ от максимального (при $z = 0$) уменьшается до нуля, равно $z = 4\pi$ метров. Поэтому для получения максимального ОУМ следует поместить цилиндрическую линзу в перетяжку эллиптического Гауссова пучка.

Благодарность

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 17-19-01186.

Литература

1. **Grier, D.** A revolution in optical manipulation / D. Grier // Nature. – 2003. – Vol. 424, Issue 6950. – P. 810-816. – DOI: 10.1038/nature01935.
2. **Kuga, T.** Novel optical trap of atoms with a doughnut beam / T. Kuga, Y. Torii, N. Shiokawa, T. Hirano, Y. Shimizu, H. Sasada // Physical Review Letters. – 1997. – Vol. 78, Issue 25. – P. 4713-4716. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4713.
3. **Bernet, S.** Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy / S. Bernet, A. Jesacher, S. Furhapter, C. Maurer, M. Ritsch-Marte // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 9. – P. 3792-3805. – DOI: 10.1364/OE.14.003792.
4. **Willig, K.I.** STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis / K.I. Willig, S.O. Rizzoli, V. Westphal, R. Jahn, S.W. Hell // Nature. – 2006. – Vol. 440, Issue 7086. – P. 935-939. – DOI: 10.1038/nature04592.
5. **Wang, J.** Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J.-Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // Nature Photonics. – 2012. – Vol. 6, Issue 7. – P. 488-496. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
6. **Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Nature. – 2001. – Vol. 412, Issue 6844. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.
7. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // Optics Communications. – 1997. – Vol. 144, Issues 4-6. – P. 210-213. – DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
8. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
9. **Izdebskaya, Y.** Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum / Y. Izdebskaya, T. Fadeyeva, V. Shvedov, A. Volyar // Optics Letters. – 2006. – Vol. 31, Issue 17. – P. 2523-2525. – DOI: 10.1364/OL.31.002523.
10. **Li, Z.** Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination / Z. Li, M. Zhang, G. Liang, X. Li, X. Chen, C. Cheng // Optics Express. – 2013. – Vol. 21, Issue 13. – P. 15755-15764. – DOI: 10.1364/OE.21.015755.

11. **Krenn, M.** On small beams with large topological charge / M. Krenn, N. Tischler, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2016. – Vol. 18. – 033012. – DOI: 10.1088/1367-2630/18/3/033012.
12. **Zheng, S.** Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings / S. Zheng, J. Wang // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – 40781. – DOI: 10.1038/srep40781.
13. **Vieira, J.** High orbital angular momentum harmonic generation / J. Vieira, R.M.G.M. Trines, E.P. Alves, R.A. Fonseca, J.T. Mendonca, R. Bingham, P. Norreys, L.O. Silva // *Physical Review Letters*. – 2016. – Vol. 117, Issue 26. – 265001. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.265001.
14. **Chen, Y.** Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device / Y. Chen, Z.X. Fang, Y.X. Ren, L. Gong, R.D. Lu // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54, Issue 27. – P. 8030-8035. – DOI: 10.1364/AO.54.008030.
15. **Jesacher, A.** Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface / A. Jesacher, S. Furhapter, C. Maurer, S. Bernet, M. Ritsch-Marte // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 13. – P. 6342-6352.
16. **Fickler, R.** Quantum entanglement of high angular momenta / R. Fickler, R. Lapkiewicz, W.N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, A. Zeilinger // *Science*. – 2012. – Vol. 338, Issue 6107. – P. 640-643. – DOI: 10.1126/science.1227193.
17. **Campbell, G.** Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors / G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, P.K. Lam // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51, Issue 7. – P. 873-876. – DOI: 10.1364/AO.51.000873.
18. **Shen, Y.** Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices / Y. Shen, G.T. Campbell, B. Hage, H. Zou, B.C. Buchler, P.K. Lam // *Journal of Optics*. – 2013. – Vol. 15, Issue 4. – 044005. – DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044005.
19. **Mafakheri, E.** Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography / E. Mafakheri, A.H. Tavabi, P. Lu, R. Balboni, F. Venturi, C. Menozzi, G.C. Gazzadi, S. Frabboni, A. Sit, R.E. Dunin-Borkowski, E. Karimi // *Applied Physics Letters*. – 2017. – Vol. 110. – 093113. – DOI: 10.1063/1.4977879.
20. **Fickler, R.** Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2016. – Vol. 113, Issue 48. – P. 13642-13647. – DOI: 10.1073/pnas.1616889113.
21. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
22. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – пер. с англ. – М., Наука, 1979.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г. Окончательный вариант – 10 августа 2017 г.

ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF AN ASTIGMATIC GAUSSIAN LASER BEAM

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

²Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

We show that an elliptic Gaussian beam focused by a cylindrical lens can be represented as a linear combination of a countable number of only even angular harmonics with both positive and negative topological charge. For the orbital angular momentum of an astigmatic Gaussian beam, an exact expression is obtained in the form of a converging series of the Legendre functions of the second kind. It is shown that at some conditions only terms with the positive or negative topological charge are retained in this series.

Keywords: elliptic Gaussian beam, cylindrical lens, orbital angular momentum, topological charge.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of an astigmatic Gaussian laser beam. *Computer Optics* 2017; 41(5): 609-616. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-609-616.

Acknowledgements: The work was funded by the Russian Science Foundation under project #17-19-01186.

References

- [1] Grier D. A revolution in optical manipulation. *Nature* 2003; 424(6950): 810-816. DOI: 10.1038/nature01935.
- [2] Kuga T, Torii Y, Shiokawa N, Hirano T, Shimizu Y, Sasaki H. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam. *Phys Rev Lett* 1997; 78(25): 4713-4716. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4713.
- [3] Bernet S, Jesacher A, Furrer S, Maurer C, Ritsch-Marte M. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy. *Opt Express* 2006; 14(9): 3792-3805. DOI: 10.1364/OE.14.003792.
- [4] Willig KI, Rizzoli SO, Westphal V, Jahn R, Hell SW. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis. *Nature* 2006; 440(7086): 935-939. DOI: 10.1038/nature04592.
- [5] Wang J, Yang J, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nature Photon* 2012; 6(7): 488-496. DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
- [6] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412(6844): 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [7] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-3. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [8] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [9] Izdebskaya Y, Fadeyeva T, Shvedov V, Volyar A. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum. *Opt Lett* 2006; 31(17): 2523-2525. DOI: 10.1364/OL.31.002523.
- [10] Li Z, Zhang M, Liang G, Li X, Chen X, Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pin-hole plates under plane wave illumination. *Opt Express* 2012; 21(13): 15755-64. DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- [11] Krenn M, Tischler N, Zeilinger A. On small beams with large topological charge. *New J Phys* 2016; 18: 033012. DOI: 10.1088/1367-2630/18/3/033012.
- [12] Zheng S, Wang J. Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings. *Sci Rep* 2017; 7: 40781. DOI: 10.1038/srep40781.
- [13] Vieira J, Trines RMGM, Alves EP, Fonseca RA, Mendonca JT, Bingham R, Norreys P, Silva LO. High orbital angular momentum harmonic generation. *Phys Rev Lett* 2016; 117(26): 265001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.265001.
- [14] Chen Y, Fang ZX, Ren YX, Gong L, Lu RD. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device. *Appl Opt* 2015; 54(27): 8030-8035. DOI: 10.1364/AO.54.008030.
- [15] Jesacher A, Furrer S, Maurer C, Bernet S, Ritsch-Marte M. Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface. *Opt Express* 2006; 14(13): 6342-6352.
- [16] Fickler R, Lapkiewicz R, Plick WN, Krenn M, Schaeff C, Ramelow S, Zeilinger A. Quantum entanglement of high angular momenta. *Science* 2012; 338(6107): 640-643. DOI: 10.1126/science.1227193.
- [17] Campbell G, Hage B, Buchler B, Lam PK. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors. *Appl Opt* 2012; 51(7): 873-876. DOI: 10.1364/AO.51.000873.
- [18] Shen Y, Campbell GT, Hage B, Zou H, Buchler BC, Lam PK. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices. *J Opt* 2013; 15(4): 044005. DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044005.
- [19] Mafakheri E, Tavabi AH, Lu P, Balboni R, Venturi F, Menozzi C, Gazzadi GC, Frabboni S, Sit A, Dunin-Borkowski RE, Karimi E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography. *Appl Phys Lett* 2017; 110: 093113. DOI: 10.1063/1.4977879.
- [20] Fickler R, Campbell G, Buchler B, Lam PK, Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010. *Proc Natl Acad Sci USA* 2016; 113(48): 13642-13647. DOI: 10.1073/pnas.1616889113.
- [21] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions.* New York: Gordon and Breach; 1992. ISBN: 978-2-881240973.
- [22] Abramovitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions.* National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series; 1964.

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Received June 27, 2017. The final version – August 10, 2017.