

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА ГАУССОВА ПУЧКА С НЕСКОЛЬКИМИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

А.А. Ковалёв^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

В световых полях, наряду с фазовыми сингулярностями, существуют поляризационные сингулярности – изолированные нули интенсивности с радиальной, азимутальной или радиально-азимутальной поляризацией вокруг них. В данной работе исследуются Гауссовы пучки с несколькими произвольно расположенными поляризационными сингулярностями. Получено аналитическое выражение для их комплексной амплитуды. Рассмотрен частный случай, когда поляризационные сингулярности расположены в вершинах правильного многоугольника. Если в таком пучке одна или две поляризационные сингулярности, то это точки с радиальной поляризацией. Если четыре поляризационные сингулярности, то имеются также две точки с азимутальной поляризацией. Показано, что при распространении в пространстве поляризационные сингулярности могут появляться лишь в дискретном наборе плоскостей, в отличие от фазовых сингулярностей, которые имеются в любой поперечной плоскости. В случае двух поляризационных сингулярностей обнаружено преобразование их поляризации с радиальной в начальной плоскости в азимутальную в дальней зоне.

Ключевые слова: Гауссов пучок, поляризационная сингулярность, радиальная поляризация, азимутальная поляризация.

Цитирование: Ковалёв, А.А. Дифракция Френеля и Фраунгофера Гауссова пучка с несколькими поляризационными сингулярностями / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 179-189. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.

Введение

В световых полях, наряду с фазовыми сингулярностями (ФС), встречаются и поляризационные (ПС) – изолированные нули интенсивности, вокруг которых поляризация радиальная, азимутальная либо радиально-азимутальная. ПС встречаются даже в дневном свете [1]. Известно множество способов их формирования [2–8]. Примерами ПС можно считать радиальную, азимутальную, цилиндрическую поляризацию [9] и поляризационные вихри [8, 10].

Радиальная поляризация используется для преодоления дифракционного предела [11–15], в сенсорах электрического напряжения [16], для усиления торондального дипольного момента в структурах металл-диэлектрик–металл [17], для локализации диэлектрических частиц на плоской подложке [18], а также для беспроводной передачи данных [19], в том числе в условиях атмосферной [20] и океанической [21] турбулентности. Азимутальная поляризация используется для острой фокусировки [13, 22], повышения точности локализации молекул в микроскопии [23, 24], формирования тракторных пучков [25], притягивающих микророботы в сторону источника излучения.

Интерес к световым пучкам с неоднородной поляризацией привёл к поиску решений уравнения Гельмгольца, описывающих такие пучки. Эти решения могут быть получены в виде суперпозиций оптических вихрей с противоположным топологическим зарядом и разнонаправленной круговой поляризацией [2], или из продольного векторного потенциала с цилиндрической симметрией [26]. В [27–29] получены выра-

жения и экспериментально сформированы пучки Бесселя–Гаусса с радиальной, азимутальной и цилиндрической поляризацией. В [30] получены уравнения для пучков Гаусса–Максвелла с цилиндрической поляризацией. В [31] изучаются бездифракционные оптические импульсы с цилиндрической поляризацией. В [32] изучается распространение ускоряющихся пучков с различным состоянием поляризации. В [33] с помощью однослойной метаповерхности формируется радиально-поляризованный пучок Лоренца. В [34] показано формирование радиальной, азимутальной и цилиндрической поляризации с помощью суперпозиции двух векторных пучков Лагерра–Гаусса.

Обычно считается, что в пучке есть только одна ПС, хотя известны работы, в которых она переключается с радиальной на азимутальную [35] или радиальная и азимутальная поляризация возникают в разных плоскостях [36]. Нам не известны работы, в которых теоретически исследуются световые поля с несколькими ПС в одной плоскости. В то же время известны работы, в которых исследовались поля с несколькими ФС. Так, в [37] комплексная амплитуда Гауссова пучка с несколькими ФС описана рекуррентно вычисляемыми многочленами. В работе [38] содержится замкнутое выражение для комплексной амплитуды структурно устойчивых Гауссовых пучков, и из этого выражения можно получить и выражение для поля с произвольно расположенными оптическими вихрями.

В данной работе исследуется Гауссов пучок с произвольно расположенными ПС. Используя представление радиальной поляризации через оптические

вихри с круговой поляризацией [2, 39], получено общее аналитическое выражение для комплексных амплитуд пучка с произвольно расположенными ПС, распространяющегося в параксиальной оптической системе, описываемой ABCD-матрицей. Более подробно исследован Гауссов пучок с ПС в вершинах правильного многоугольника. Оказалось, что он является суперпозицией Гауссова пучка и двух мод Лагерра–Гаусса с разнонаправленной круговой поляризацией. Установлено, что если в пучке одна или две ПС, то поляризация в их окрестности радиальная. Если сингулярностей четыре, то имеется две пары точек с радиальной и азимутальной поляризацией. Показано, что если в начальной плоскости у пучка не меньше трёх ПС, то при распространении в пространстве они могут вновь появляться, но лишь в дискретном наборе плоскостей. Этим они отличаются от ФС, которые имеются в любой поперечной плоскости. Показано, что в дальней зоне ПС появляются только при чётном их количестве. В случае двух ПС обнаружено преобразование их поляризации с радиальной в азимутальную при распространении от начальной плоскости к дальней зоне. Световые поля с неоднородной поляризацией могут найти применение в оптической передаче информации [19–21].

1. Суперпозиция двух пучков Гаусса с радиальной поляризацией

Радиально-поляризованный Гауссов пучок можно получить с помощью суперпозиции двух ортогонально-поляризованных мод Эрмита–Гаусса порядков (1, 0) и (0, 1) [40]. Комплексная амплитуда компонент E_x и E_y такого поля в начальной плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = H_{10}(x, y) = x \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2], \\ E_y(x, y, 0) = H_{01}(x, y) = y \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2], \end{cases} \quad (1)$$

где (x, y) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка.

Если требуется получить два радиально-поляризованных Гауссова пучка с центрами в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, то напрашивается задать его комплексную амплитуду в начальной плоскости в следующем виде:

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = H_{10}(x - a, y) + H_{10}(x + a, y), \\ E_y(x, y, 0) = H_{01}(x - a, y) + H_{01}(x + a, y). \end{cases} \quad (2)$$

Интенсивность такого поля равна нулю при $y = 0$ и x , являющемся решением уравнения $x = a \operatorname{th}(2ax/w_0^2)$. Решений у такого уравнения может быть либо три (при $a > w_0/2^{1/2}$), либо одно, когда $x = 0$ является единственным решением (при $a \leq w_0/2^{1/2}$).

Рассмотрим сначала второй случай. На рис. 1 показано распределение интенсивности поля (2) в начальной плоскости ($z = 0$) и дальней зоне ($z = 10z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – расстояние Рэлея, k – волновое число). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние между центрами двух пучков $2a = 8\lambda$, их радиусы

перетяжки $w_0 = 10\lambda$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 20\lambda$ (рис. 1а) и $R = 200\lambda$ (рис. 1б). Из рис. 1а видно, что действительно при $a < w_0/2^{1/2}$ вместо двух ПС получился пучок с небольшой эллиптичностью и лишь с одной ПС в центре.

При $a > w_0/2^{1/2}$ два пучка пространственно разделены. На рис. 2 показано распределение интенсивности поля (2) в начальной плоскости и дальней зоне ($z = 10z_0$). Параметры расчёта те же, что и на рис. 1, но расстояние между центрами двух пучков $2a = 30\lambda$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 40\lambda$ (рис. 2а) и $R = 400\lambda$ (рис. 2б). Из рис. 2а видно, что действительно в начальной плоскости имеется две точки с радиальной поляризацией вокруг них. Однако распределение интенсивности существенно меняется при распространении, и в дальней зоне оно не имеет вид двух световых колец (рис. 2б). Вычислив преобразование Френеля от начального поля (2), можно показать, что поляризация в дальней зоне перестает быть локально-линейной (поэтому она не показана на рис. 2б).

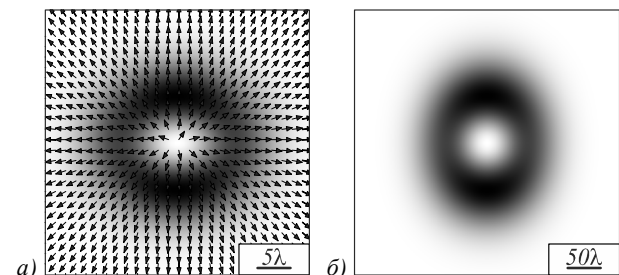


Рис. 1. Распределение интенсивности (негатив) поля (2) в начальной плоскости (а) и дальней зоне (б). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние между центрами двух составляющих пучков $2a = 8\lambda$, их радиусы перетяжки $w_0 = 10\lambda$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 20\lambda$ (а) и $R = 200\lambda$ (б). Стрелками на рис. 1а показано направление поляризации (направление колебания вектора электрической напряжённости)

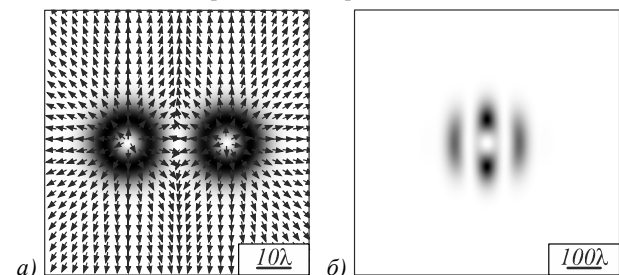


Рис. 2. Распределение интенсивности (негатив) поля (2) в начальной плоскости ($z = 0$) (а) и дальней зоне ($z = 10z_0$) (б). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние между центрами двух составляющих пучков $2a = 30\lambda$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 40\lambda$ (а) и $R = 400\lambda$ (б). Стрелками на рис. 2а показано направление поляризации

2. Гауссов пучок с несколькими произвольно расположенными оптическими вихрями

В [38] показано, что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma w_0^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\sigma w_0}\right), \quad (3)$$

где (x, y, z) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, $\sigma = 1 + iz/z_0$, $f(x \pm iy)$ – произвольная целая аналитическая функция, является решением параксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Из (3) для набора точек с декартовыми координатами (a_j, b_j) ($j = 1, \dots, m$) можно сконструировать параксиальное световое поле, имеющее в начальной плоскости ($z = 0$) оптические вихри в этих точках [41]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma w_0^2}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{re^{i\varphi}}{\sigma} - a_j - ib_j\right), \quad (5)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты. При распространении пучка в оптической системе, описываемой ABCD-матрицей [42], если в начальной плоскости поле имеет вид (5) при $z = 0$:

$$E_0(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \prod_{j=1}^m (re^{i\varphi} - a_j - ib_j), \quad (6)$$

то в выходной плоскости комплексная амплитуда E_1 равна

$$E_1(r, \varphi) = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{re^{i\varphi}}{q} - a_j - ib_j\right), \quad (7)$$

где $q = A + iB/z_0$, $q_2 = (A + iB/z_0)/(C + iD/z_0)$. Аналогично можно записать и решение для оптических вихрей с отрицательным топологическим зарядом:

$$E_1(r, \varphi) = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{re^{-i\varphi}}{q} - a_j + ib_j\right). \quad (8)$$

Из (8) видно, что в выходной плоскости все вихри сохраняются и находятся в точках $(Aa_j - Bb_j/z_0, Ab_j + Ba_j/z_0)$. При распространении в свободном пространстве координаты j -го вихря имеют вид: $(a_j - b_j z/z_0, b_j + a_j z/z_0)$, то есть по отношению к начальному положению вихри повернулись против часовой стрелки. В случае отрицательных топологических зарядов вихри поворачиваются по часовой стрелке. В дальней зоне этот угол поворота равен $\pi/2$.

3. Гауссов пучок с несколькими ПС

Свет с радиальной поляризацией является суперпозицией оптических вихрей ± 1 -го порядка с противоположными круговыми поляризациями [2], так как вектор Джонса имеет вид [39]:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} + ie^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда, складывая световое поле (7) с левой круговой поляризацией и поле (8) с правой круговой поляризацией, можно получить поле, в котором в начальной плоскости в точках (a_j, b_j) расположены ПС:

$$\begin{cases} E_{1x}(r, \varphi) = \frac{1}{2q} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) [\Pi_+(r, \varphi) + \Pi_-(r, \varphi)], \\ E_{1y}(r, \varphi) = \frac{-i}{2q} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) [\Pi_+(r, \varphi) - \Pi_-(r, \varphi)], \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{где } \Pi_{\pm}(r, \varphi) = \prod_{j=1}^m (re^{\pm i\varphi}/q - a_j \mp ib_j).$$

Сочетание произвольных световых полей с ортогональной поляризацией в общем случае приводит к эллиптической поляризации в каждой точке пространства. Однако поле (10) построено так, что в начальной плоскости отношение E_{1y} к E_{1x} вещественно:

$$\frac{E_{1y}(r, \varphi)}{E_{1x}(r, \varphi)} = \text{tg} \left(\arg \left\{ \prod_{j=1}^m (re^{i\varphi} - a_j - ib_j) \right\} \right), \quad (11)$$

где \arg – аргумент комплексного числа. Из (11) видно, что при любом расположении ПС в любой точке начальной плоскости поляризация линейная.

Выражение (10) описывает параксиальный Гауссов пучок с произвольным расположением ПС. Далее рассмотрим случай, когда ПС расположены в вершинах правильного m -угольника: $a_j = a \cos(2\pi j/m)$, $b_j = a \sin(2\pi j/m)$ ($j = 0, \dots, m-1$). Комплексная амплитуда поперечных составляющих электрической напряжённости при любом z в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} E_{1x}(r, \varphi) \\ E_{1y}(r, \varphi) \end{cases} = \frac{1}{q^{m+1}} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) \begin{cases} r^m \cos m\varphi - a^m q^m \\ r^m \sin m\varphi \end{cases}. \quad (12)$$

Поле (12) является суперпозицией трёх соосных мод Лагерра–Гаусса: линейно-поляризованного Гауссова пучка и двух мод порядка $(0, m)$ и $(0, -m)$ с разнонаправленными круговыми поляризациями.

Определим вид ПС в пучке (12) в начальной плоскости. Координаты произвольной точки из окрестности j -й ПС равны: $x = a \cos(2\pi j/m) + \rho \cos \theta$, $y = a \sin(2\pi j/m) + \rho \sin \theta$, где (ρ, θ) – полярные координаты с центром в j -й ПС. В этой точке вектор электрической напряжённости направлен под углом α к оси x , тангенс которого равен

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}(x, y)}{E_{0x}(x, y)} = \frac{-i(x + iy)^m + i(x - iy)^m}{(x + iy)^m + (x - iy)^m - 2a^m}. \quad (13)$$

Так как $x \pm iy = a \exp(\pm i2\pi j/m) + \rho \exp(\pm i\theta)$, то, при условии $\rho \ll a$, получим:

$$\tan \alpha \approx \tan(\theta - 2\pi j/m). \quad (14)$$

Это означает, что при $m > 2$ в каждой точке будет разный вид ПС. Если $m \leq 2$, то $\tan \alpha = \tan \theta$, то есть в таком пучке есть две симметричные точки с радиальной поляризацией. Если $m = 4$, то в таком пучке также имеется две точки с радиальной поляризацией, но есть ещё и две точки с азимутальной поляризацией. При других значениях m , наряду с радиальной поляризацией, имеются также точки с радиально-азимутальной (цилиндрической) поляризацией [9].

На рис. 3 показаны распределения интенсивности в начальной плоскости Гауссова пучка (12) с несколькими ПС при следующих параметрах расчёта: радиус перетяжки $w_0 = 10\lambda$, количество ПС $m = 1$ (рис. 3а), $m = 2$ (рис. 3б), $m = 3$ (рис. 3в), $m = 4$ (рис. 3г), расстояние от оптической оси до ПС $a = 2\lambda$ (рис. 3а), $a = 5\lambda$ (рис. 3б), $a = 7\lambda$ (рис. 3в), $a = 9\lambda$ (рис. 3г), об-

ласть расчёта на всех рисунках $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 30\lambda$. Параметр a в каждом случае подбирался так, чтобы теньевые пятна вокруг нулей интенсивности не сливались друг с другом.

Из рис. 3 видно, что при $m = 1$ пучок асимметричен и его центр радиальной поляризации смещён от центра интенсивности. Похожие пучки исследовались в [43], но их поляризация была однородная. Также видно, что при $m = 2$ и $m = 4$ противоположные ПС находятся в противофазе, то есть если в конкретный момент времени в окрестности одной точки с радиальной поляризацией вектора напряжённости направлены от этой точки, то в другой – к ней. Это является следствием граничных условий: в области между двумя ПС вектор напряжённости не может мгновенно изменить направление. Аналогично и для точек с азимутальной поляризацией: в окрестности одной из них вектор напряжённости направлен по часовой стрелке, а в окрестности другой – против часовой.

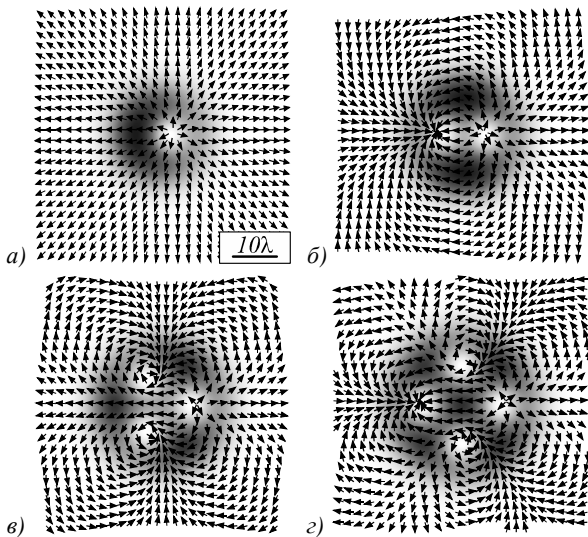


Рис. 3. Распределения интенсивности (негатив) в начальной плоскости Гауссова пучка с одной (а), двумя (б), тремя (в) и четырьмя (г) ПС. Параметры расчёта: радиус перетяжки $w_0 = 10\lambda$, количество ПС $m = 1$ (а), $m = 2$ (б), $m = 3$ (в), $m = 4$ (г), расстояние от оптической оси до ПС $a = 2\lambda$ (а), $a = 5\lambda$ (б), $a = 7\lambda$ (в), $a = 9\lambda$ (г), область расчёта на всех рисунках $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 30\lambda$. Стрелками показано направление поляризации

Заметим, что известны световые пучки, включающие в себя одновременно радиальную поляризацию и азимутальную. В работе [36] световой пучок распространяется в одноосном кристалле и фокусируется внутри него в двух плоскостях, причём в одной плоскости формируется радиальная поляризация, а в другой – азимутальная. Пучок с рис. 3г распространяется в свободном пространстве и имеет ПС с радиальной и азимутальной поляризацией в одной плоскости.

Подобно пучкам с рис. 3а, б, можно получить пучки с одной или двумя ПС с азимутальной поляризацией. Подобно (9), вектор Джонса для азимутальной поляризации тоже можно представить в виде суперпозиции оптических вихрей ± 1 -го порядка с противоположными круговыми поляризациями [39]:

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} - ie^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{i}{2} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{i}{2} e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тогда, аналогично комбинируя поля (7) и (8), но с учётом (15), получим, что составляющая E_y равна составляющей E_x из (10), а составляющая E_x равна составляющей $-E_y$ из (10). Вместо (12) получим:

$$\begin{Bmatrix} E_{1x}(r, \varphi) \\ E_{1y}(r, \varphi) \end{Bmatrix} = \frac{1}{q^{m+1}} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_2}\right) \begin{Bmatrix} -r^m \sin m\varphi \\ r^m \cos m\varphi - a^m q^m \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

На рис. 4 показаны распределения интенсивности пучков (16) во входной плоскости с теми же параметрами, что и на рис. 3а, б, но с азимутальной поляризацией. При $m = 1$ похожее распределение интенсивности и поляризации встречалось в работе [34], однако случаи, когда в пучке больше одной ПС, в этой работе не рассматривались.

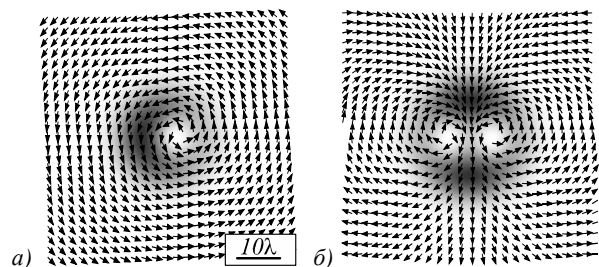


Рис. 4. Распределения интенсивности (негатив) в начальной плоскости Гауссова пучка с одной (а) и двумя (б) ПС, в окрестности которых азимутальная поляризация. Параметры расчёта те же, что и на рис. 3а, б. Стрелками показано направление поляризации

4. Распространение Гауссова пучка с несколькими ПС в ABCD-системе

При распространении в пространстве оптические вихри в Гауссовом пучке не исчезают и присутствуют в любой поперечной плоскости. Возникает вопрос, сохраняются ли также и ПС. Нули интенсивности поля (12) возникают там, где $|E_{1x}|^2 = |E_{1y}|^2 = 0$, но $|E_{1x}|^2 = 0$ при равенстве нулю мнимой части q^m :

$$\text{Im}\{q^m\} = (A^2 + B^2/z_0^2)^{m/2} \sin[m\psi(z)] = 0, \quad (17)$$

где $\psi(z) = \arctg[B/(Az_0)]$ – аналог фазы Гоу для ABCD-системы. Равенство (17) выполняется, когда

$$m\psi(z) = \pi p, \quad (18)$$

где p – любое целое число. Условие (18) означает, что в отличие от ФС, которые сохраняются в любой поперечной плоскости, ПС может появляться только в дискретном наборе плоскостей.

4.1. Дифракция Фраунгофера

Дальняя зона формируется в задней фокальной плоскости сферической линзы и в свободном пространстве ($z \gg z_0$). Матрицы ABCD таких систем имеют вид:

$$M_{\text{Lens}} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\text{Space}} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где f – фокусное расстояние, z – расстояние распространения в свободном пространстве. В обоих случаях в (18) $\psi(z) = \pi/2$. Согласно (18), ПС в дальней зоне возникают только при чётных m . Для примера рассмотрим прохождение через линзу. В начальной плоскости $q = 1$, в то время как в дальней зоне $q = if/z_0$, то есть эта величина – чисто мнимая. Поэтому из (12) видно, что составляющая E_y имеет нули интенсивности, а составляющая E_x имеет их только при чётных значениях m .

Наличие ПС при чётных значениях m и их отсутствие при нечётных значениях m объясняется расщеплением ПС на две ФС. В дальней зоне оптический вихрь с положительным (отрицательным) топологическим зарядом поворачивается на $\pi/2$ против (по) часовой стрелки. При этом для чётных m для каждой ПС во входной плоскости существует симметричная ПС. Эти две ПС расщепляются, а в дальней зоне они снова рекомбинируют.

Для чётных m определим координаты ПС. Это можно сделать из условий, следующих из (12):

$$\begin{cases} E_{1x}(r, \varphi) \sim r^m \cos m\varphi - a^m (if/z_0)^m = 0, \\ E_{1y}(r, \varphi) \sim r^m \sin m\varphi = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из (12) видно, что в начальной плоскости отношение E_{0y}/E_{0x} вещественно во всех точках, то есть в каждой точке поляризация линейная, хотя направление колебаний и различно в разных точках. Из (20) видно, что в дальней зоне поляризация уже не обязательно является линейной. Так, в начале координат ($r=0$) она линейна, но при нечётных m в окрестности начала координат поляризация эллиптическая. Рассмотрим теперь случай, когда m чётно. В этом случае из (20) видно, что в дальней зоне поляризация в каждой отдельной точке – линейная. Определим, где находятся ПС.

Если $m/2$ чётно, то решением системы (20) являются точки с полярными координатами $r = af/z_0$, $\varphi = 2j\pi/m$, $j = 0, \dots, m-1$. Если $m/2$ нечётно, то решением (20) являются точки с координатами $r = af/z_0$, $\varphi = (2j+1)\pi/m$, $j = 0, \dots, m-1$. То есть при m , кратных 4, ПС в дальней зоне находятся на тех же полярных углах, что и в начальной плоскости, а при чётных m , не кратных 4, ПС поворачиваются на угол π/m .

Подобно (14), найдём направление вектора поляризации. При m , кратных 4, координаты точки в окрестности j -й ПС равны $x = (af/z_0) \cos(2\pi j/m) + \rho \cos \theta$ и $y = (af/z_0) \sin(2\pi j/m) + \rho \sin \theta$. В этой точке вектор напряжённости направлен под углом

$$\tan \alpha = \frac{E_{1y}(x, y)}{E_{1x}(x, y)} \approx \tan \left(\theta - \frac{2\pi j}{m} \right). \quad (21)$$

При чётных m , не кратных 4, вектор напряжённости в окрестности j -й ПС направлен под углом

$$\tan \alpha = \frac{E_{1y}(x, y)}{E_{1x}(x, y)} \approx \tan \left[\theta - \frac{(2j+1)\pi}{m} \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим простейшие частные случаи ($m \leq 4$). Полученные выражения (20) – (22) показывают, что:

- пучок с одной и тремя ПС в начальной плоскости не имеет ПС в дальней зоне;
- в пучке с двумя ПС две противоположные точки с радиальной поляризацией поворачиваются в дальней зоне на угол $\pi/2$ и преобразуются в две противоположные точки с азимутальной поляризацией;
- пучок с четырьмя ПС (две радиальные и две азимутальные) в дальней зоне также имеет две радиальные и две азимутальные ПС, причём их положения не поворачиваются на $\pi/2$ вокруг оптической оси.

На рис. 5 показаны распределения интенсивности пучка (12) при $m = 1, \dots, 4$ в задней фокальной плоскости сферической линзы. Параметры пучка те же, что и на рис. 3, кроме области расчёта: $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10\lambda$. Фокусное расстояние линзы было равно $f = 100\lambda$.

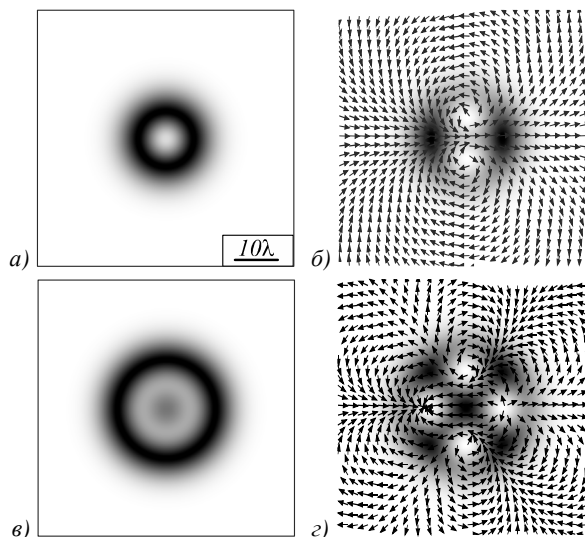


Рис. 5. Распределения интенсивности (негатив) Гауссова пучка с несколькими ПС в задней фокальной плоскости линзы. Параметры расчёта: радиус перетяжки $w_0 = 10\lambda$, фокусное расстояние линзы $f = 100\lambda$, количество ПС в начальной плоскости $m = 1$ (а), $m = 2$ (б), $m = 3$ (в), $m = 4$ (г), расстояние от оптической оси до ПС $a = 2\lambda$ (а), $a = 5\lambda$ (б), $a = 7\lambda$ (в), $a = 9\lambda$ (г), область расчёта на всех рисунках $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10\lambda$. Стрелками на рис. 5б, г показано направление поляризации

4.2. Дифракция Френеля

При дифракции Френеля матрица ABCD имеет вид $M_{\text{Френеля}}$ (19). Распределение интенсивности имеет нули при условии

$$z = z_0 \operatorname{tg}(\pi p/m), \quad (23)$$

где $p = 0, 1, \dots, [m/2]$. Условие (23), как и (18), следует из условия $\operatorname{Im}\{q^m\} = 0$. Значит, как и в начальной плоскости поля (12), отношение E_{1y} к E_{1x} вещественно, то есть в поперечных плоскостях на расстояниях (23) в любой точке поляризация линейная.

В частности, из (23) следует, что при $m = 1$ ПС с радиальной поляризацией имеется только во входной

плоскости (рис. 3а). При $m=2$ обе ПС восстанавливаются в дальней зоне. При $m > 2$ ПС появляются снова хотя бы в одной поперечной плоскости. Например, выше показано, что при $m=3$ ПС отсутствуют в дальней зоне, но, оказывается, они возникают на расстоянии $z=3^{1/2}z_0$. При $m=4$, наряду с дальней зоной, ПС появляются на расстоянии Рэлея $z=z_0$.

Определим положения ПС в плоскостях (23). В каждой такой плоскости $q^m = (-1)^p \cos^{-m}(\pi p/m)$ и тогда, согласно (12), координаты ПС находятся из условий:

$$\begin{cases} E_{1x}(r, \varphi) \sim r^m \cos m\varphi - a^m (-1)^p \cos^{-m}\left(\frac{\pi p}{m}\right) = 0, \\ E_{1y}(r, \varphi) \sim r^m \sin m\varphi = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Условию (24) удовлетворяет m точек с полярными координатами $r = a/\cos(\pi p/m)$ и $\varphi_s = 2s\pi/m$ (p – чётно) или $\varphi_s = (2s+1)\pi/m$ (p – нечётно), где $s=0, 1, \dots, m-1$, т.е. при нечётных p система ПС по сравнению с начальной плоскостью поворачивается на угол π/m .

В окрестностях ПС вектор напряжённости направлен под углом $\tan \alpha = \tan(\theta - \varphi_s)$. В частности, при $m=4$ на расстоянии Рэлея ($p=1$) нули интенсивности расположены на расстоянии $r=2^{1/2}a$ под полярными углами $\varphi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, то есть система ПС по сравнению с начальной плоскостью поворачивается на 45 градусов, причём вместо двух ПС с радиальной и двух ПС с азимутальной поляризацией будут четыре ПС с цилиндрической поляризацией.

На рис. 6 показаны распределения интенсивности пучка (12) с четырьмя ПС в трёх плоскостях: $z = z_0/2$ (рис. 6а), $z = 2z_0$ (рис. 6б), $z = z_0$ (рис. 6в, г).

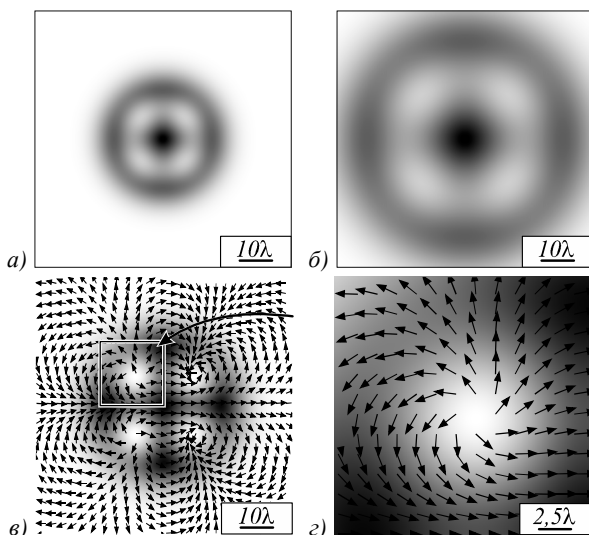


Рис. 6. Распределения интенсивности (негатив) Гауссова пучка, имевшего в начальной плоскости четыре ПС, на расстояниях $z = z_0/2$ (а), $z = 2z_0$ (б), $z = z_0$ (в) и увеличенный фрагмент распределения на расстоянии $z = z_0$ (г). Параметры расчёта: радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0 = 10\lambda$, расстояние от оптической оси до ПС в начальной плоскости $a = 9\lambda$, область расчёта: $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 40\lambda$ (а–в) и $-R/2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq R/2$ (г). Стрелками на (в, г) показано направление поляризации

Из рис. 3г видно, что в начальной плоскости такой пучок имеет две точки с радиальной поляризацией на горизонтальной оси и две точки с азимутальной поляризацией на вертикальной оси. На расстояниях до расстояния Рэлея и после него вместо нулей интенсивности имеются только минимумы (рис. 6а,б). На расстоянии Рэлея в каждой точке эллиптическая поляризация вырождается в линейную и возникают ПС, повернутые на 45 градусов относительно оптической оси (рис. 6в), причём в отличие от начальной плоскости эти ПС имеют цилиндрическую поляризацию, а не радиальную и азимутальную. В окрестности ПС вектор напряжённости направлен под углом 45 градусов по сравнению с направлением, которое было бы при радиальной поляризации (рис. 6г). В дальней зоне дифракции снова появляются ПС с радиальной и азимутальной поляризацией (рис. 5з).

В рассмотренных выше примерах видно, что при числе ПС больше двух только одна или две из них имеют радиальную поляризацию, представляющую наибольший практический интерес. Возникает вопрос, можно ли сделать пучок с несколькими ПС с радиальной поляризацией. Из (11) следует, что в окрестности точки (a_s, b_s) вектор напряжённости направлен к оси x под углом, тангенс которого равен

$$\tan \alpha = \operatorname{tg} \left(\theta + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^m \arg \{ (a_s - a_j) + i(b_s - b_j) \} \right). \quad (25)$$

Из (25) следует, что можно добиться радиальной поляризации во всех ПС, например, просто расположив их на одной горизонтальной линии. Однако нули интенсивности в этом случае не видны так отчётливо, как на рис. 3–6, поскольку области тени вокруг них сливаются. На рис. 7 показано распределение интенсивности (в начальной плоскости) пучка в форме эллипса, однако внутри этого эллипса имеется четыре точки с радиальной поляризацией вокруг них.

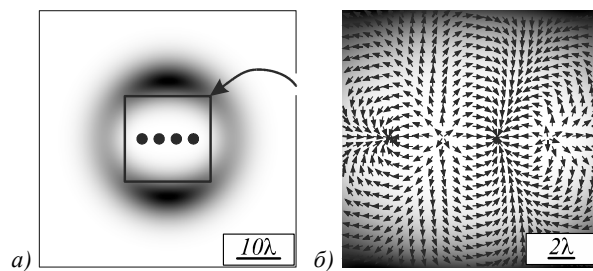


Рис. 7. Распределение интенсивности (негатив) Гауссова пучка, имевшего в начальной плоскости четыре ПС, расположенные на одной горизонтальной оси в точках с координатами $(-1,5a, 0), (-0,5a, 0), (0,5a, 0), (1,5a, 0)$. Параметры расчёта: радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0 = 10\lambda$, расстояние между ПС $a = 4\lambda$, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 30\lambda$ (а) и $R = 10\lambda$ (б). Кружками на рис. 7а обозначены ПС. Стрелками на рис. 7б показано направление поляризации

В отличие от (12) такой пучок состоит не из трёх, а из пяти мод Лагерра–Гаусса. ПС расщепляются на ФС с положительным и отрицательным топологическим зарядом, поворачивающиеся вокруг оптической

оси соответственно против часовой стрелки и по часовой стрелке. Поэтому в пучке на рис. 7 ПС в дальней зоне будут не в вершинах квадрата, а на одной вертикальной линии, причём их поляризация сменится на азимутальную. Это видно на рис. 8, на котором показано распределение интенсивности пучка на рис. 7 в задней фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние $f=100\lambda$).

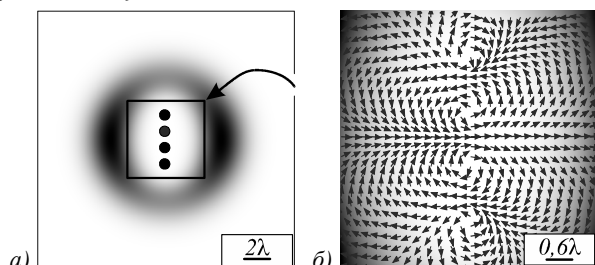


Рис. 8. Распределение интенсивности (негатив) пучка с рис. 7 в задней фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f=100\lambda$. Параметры расчёта те же, что и для рис. 7, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R=10\lambda$ (а) и $R=3\lambda$ (б). Кружками на рис. 8а обозначены ПС. Стрелками на рис. 8б показано направление поляризации

Заключение

В работе теоретически исследован Гауссов пучок с произвольно расположенными ПС. Получено аналитическое выражение для комплексной амплитуды пучка, распространяющегося в параксиальной оптической системе, описываемой ABCD-матрицей. В качестве частного случая исследован Гауссов пучок с ПС, расположенными в вершинах правильного многоугольника.

Оказалось, что такой пучок является суперпозицией линейно-поляризованного Гауссова пучка и двух мод Лагерра–Гаусса с разнонаправленной круговой поляризацией. Если в таком пучке одна или две ПС, то это точки с радиальной поляризацией. Если четыре ПС, то, наряду с двумя точками с радиальной поляризацией, имеются и две точки с азимутальной поляризацией. Показано, что ПС, имеющиеся у пучка в начальной плоскости, при распространении в пространстве могут появляться лишь в дискретном наборе плоскостей. Этим они отличаются от ФС, которые имеются в любой поперечной плоскости. В случае двух ПС показано преобразование их поляризации с радиальной в азимутальную при распространении от начальной плоскости до дальней зоны. Результаты данной работы могут найти применение в оптической передаче информации, закодированной в виде ПС.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в параграфе «Суперпозиция двух пучков Гаусса с радиальной поляризацией», Российского научного фонда (грант № 17-19-01186) в параграфе «Распространение Гауссова пучка с несколькими поляризационными сингулярностями в ABCD-системе» и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, 16-

47-630483) в параграфах «Гауссов пучок с несколькими произвольно расположенными оптическими вихрями» и «Гауссов пучок с несколькими поляризационными сингулярностями».

Литература

1. **Dennis, M.R.** Singular optics: Optical vortices and polarization singularities / M.R. Dennis, K. O'Holleran, M.J. Padgett // *Progress in Optics*. – 2009. – Vol. 53. – P. 293-363. – DOI: 10.1016/S0079-6638(08)00205-9.
2. **Tidwell, S.C.** Generating radially polarized beams interferometrically / S.C. Tidwell, D.H. Ford, W.D. Kimura // *Applied Optics*. – 1990. – Vol. 29, Issue 15. – P. 2234-2239. – DOI: 10.1364/AO.29.002234.
3. **Oron, R.** The formation of laser beams with pure azimuthal or radial polarization / R. Oron, S. Blit, N. Davidson, A.A. Friese, Z. Bomzon, E. Hasman // *Applied Physics Letters*. – 2000. – Vol. 77, Issue 21. – P. 3322. – DOI: 10.1063/1.1327271.
4. **Flossmann, F.** Polarization singularities from unfolding an optical vortex through a birefringent crystal / F. Flossmann, U.T. Schwarz, M. Maier, M.R. Dennis // *Physical Review Letters*. – 2005. – Vol. 95, Issue 25. – P. 253901. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.253901.
5. **Kozawa, Y.** Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism / Y. Kozawa, S. Sato // *Optics Letters*. – 2005. – Vol. 30, Issue 22. – P. 3063-3065. – DOI: 10.1364/OL.30.003063.
6. **Lai, W.J.** Generation of radially polarized beam with a segmented spiral varying retarder / W.J. Lai, B.C. Lim, P.B. Phua, K.S. Tiaw, H.H. Teo, M.H. Hong // *Optics Express*. – 2008. – Vol. 16, Issue 20. – P. 15694-15699. – DOI: 10.1364/OE.16.015694.
7. **Zhu, S.** Generation and propagation of a vector cosine-Gaussian correlated beam with radial polarization / S. Zhu, Y. Chen, J. Wang, H. Wang, Z. Li, Y. Cai // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23, Issue 26. – P. 33099-33115. – DOI: 10.1364/OE.23.033099.
8. **Fu, S.** Generating polarization vortices by using helical beams and a Twyman Green interferometer / S. Fu, C. Gao, Y. Shi, K. Dai, L. Zhong, S. Zhang // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, Issue 8. – P. 1775-1778. – DOI: 10.1364/OL.40.001775.
9. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // *Advances in Optics and Photonics*. – 2009. – Vol. 1, Issue 1. – P. 1-57. – DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
10. **Fu, S.** Simultaneous generation of multiple perfect polarization vortices with selective spatial states in various diffraction orders / S. Fu, C. Gao, T. Wang, S. Zhang, Y. Zhai // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 23. – P. 5454-5457. – DOI: 10.1364/OL.41.005454.
11. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // *Physical Review Letters*. – 2003. – Vol. 91, Issue 23. – P. 233901. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.233901.
12. **Urbach, H.P.** Field in focus with a maximum longitudinal electric component / H.P. Urbach, S.F. Pereira // *Physical Review Letters*. – 2008. – Vol. 100, Issue 12. – P. 123904. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.123904.
13. **Segawa, S.** Demonstration of subtraction imaging in confocal microscopy with vector beams / S. Segawa, Y. Kozawa, S. Sato // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39, Issue 15. – P. 4529-4532. – DOI: 10.1364/OL.39.004529.
14. **Yu, A.** Creation of sub-diffraction longitudinally polarized spot by focusing radially polarized light with binary phase

- lens / A. Yu, G. Chen, Z. Zhang, Z. Wen, L. Dai, K. Zhang, S. Jiang, Z. Wu, Y. Li, C. Wang, X. Luo // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – 38859. – DOI: 10.1038/srep38859.
15. **Sedukhin, A.G.** Efficient tight focusing of laser beams optimally matched to their thin-film linear-to-radial polarization conversion: Method, implementation, and field near focus / A.G. Sedukhin, A.G. Poleshchuk // *Optics Communications*. – 2018. – Vol. 407. – P. 217-226. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.042.
 16. **Tan, Q.** A new optical voltage sensor based on radial polarization detection / Q. Tan, Q. Xu, N. Xie, C. Li // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. – 2017. – Vol. 66, Issue 1. – P. 158-164. – DOI: 10.1109/TIM.2016.2621198.
 17. **Bao, Y.** Plasmonic toroidal dipolar response under radially polarized excitation / Y. Bao, X. Zhu, Z. Fang // *Scientific Reports*. – 2015. – Vol. 5. – 11793. – DOI: 10.1038/srep11793.
 18. **Roy, S.** Radially polarized light for detection and nanolocalization of dielectric particles on a planar substrate / S. Roy, K. Ushakova, Q. van den Berg, S. F. Pereira, H. P. Urbach // *Physical Review Letters*. – 2015. – Vol. 114, Issue 10. – 103903. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.103903.
 19. **Milione, G.** 4×20 Gbit/s mode division multiplexing over free space using vector modes and a q -plate mode (de)multiplexer / G. Milione, M.P.J. Lavery, H. Huang, Y. Ren, G. Xie, Th.A. Nguyen, E. Karimi, L. Marrucci, D.A. Nolan, R.R. Alfano, A.E. Willner // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, Issue 9. – P. 1980-1983. – DOI: 10.1364/OL.40.001980.
 20. **Peng, X.** Propagation of a radially polarized twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere / X. Peng, L. Liu, J. Yu, X. Liu, Y. Cai, Y. Baykal, W. Li // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 18, Issue 12. – 125601. – DOI: 10.1088/2040-8978/18/12/125601.
 21. **Tang, M.** Propagation of radially polarized beams in the oceanic turbulence / M. Tang, D. Zhao // *Applied Physics B: Lasers and Optics*. – 2013. – Vol. 111, Issue 4. – P. 665-670. – DOI: 10.1007/s00340-013-5394-5.
 22. **Hao, X.** Phase encoding for sharper focus of the azimuthally polarized beam / X. Hao, C. Kuang, T. Wang, X. Liu // *Optics Letters*. – 2010. – Vol. 35, Issue 23. – P. 3928-3930. – DOI: 10.1364/OL.35.003928.
 23. **Lew, M.D.** Azimuthal polarization filtering for accurate, precise, and robust single-molecule localization microscopy / M.D. Lew, W.E. Moerner // *Nano Letters*. – 2014. – Vol. 14, Issue 11. – P. 6407-6413. – DOI: 10.1021/nl502914k.
 24. **Backlund, M.P.** Removing orientation-induced localization biases in single-molecule microscopy using a broadband metasurface mask / M.P. Backlund, A. Arbabi, P.N. Petrov, E. Arbabi, S. Saurabh, A. Faraon, W.E. Moerner // *Nature Photonics*. – 2016. – Vol. 10. – P. 459-462. – DOI: 10.1038/nphoton.2016.93.
 25. **Carretero, L.** Periodic trajectories obtained with an active tractor beam using azimuthal polarization: Design of particle exchanger / L. Carretero, P. Acebal, C. García, S. Blaya // *IEEE Photonics Journal*. – 2015. – Vol. 7, Issue 1. – 3400112. – DOI: 10.1109/JPHOT.2015.2402123.
 26. **Yan, S.** Exact description of a cylindrically symmetrical complex-argument Laguerre-Gauss beam / S. Yan, B. Yao // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33, Issue 10. – P. 1074-1076. – DOI: 10.1364/OL.33.001074.
 27. **Schimpf, D.N.** Radially polarized Bessel-Gauss beams: decentered Gaussian beam analysis and experimental verification / D.N. Schimpf, W.P. Putnam, M.D.W. Grogan, S. Ramachandran, F.X. Kärtner // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 15. – P. 18469-18483. – DOI: 10.1364/OE.21.018469.
 28. **Madhi, D.** Cylindrically polarized Bessel-Gauss beams / D. Madhi, M. Ornigotti, A. Aiello // *Journal of Optics*. – 2015. – Vol. 17, Issue 2. – 025603. – DOI: 10.1088/2040-8978/17/2/025603.
 29. **Wu, G.** Generation and self-healing of a radially polarized Bessel-Gauss beam / G. Wu, F. Wang, Y. Cai // *Physical Review A*. – 2014. – Vol. 89, Issue 4. – 043807. – DOI: 10.1103/PhysRevA.89.043807.
 30. **Lewis, W.** Maxwell-Gaussian beams with cylindrical polarization / W. Lewis, R. Vyas // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 7. – P. 1595-1603. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.001595.
 31. **Ornigotti, M.** Cylindrically polarized nondiffracting optical pulses / M. Ornigotti, C. Conti, A. Szameit // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 18, Issue 7. – 075605. – DOI: 10.1088/2040-8978/18/7/075605.
 32. **Bar-David, J.** Unveiling the propagation dynamics of self-accelerating vector beams / J. Bar-David, N. Voloch-Bloch, N. Mazurski, U. Levy // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – 34272. – DOI: 10.1038/srep34272.
 33. **Guo, J.-Y.** Generation of radial polarized lorentz beam with single layer metasurface / J.-Y. Guo, X.-K. Wang, J.-W. He, H. Zhao, S.-F. Feng, P. Han, J.-S. Ye, W.-F. Sun, G.-H. Situ, Y. Zhang // *Advanced Optical Materials*. – 2017. – Vol. 6, Issue 1. – 1700925. – DOI: 10.1002/adom.201700925.
 34. **Vyas, S.** Polarization singularities in superposition of vector beams / S. Vyas, Y. Kozawa, S. Sato // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 7. – P. 8972-8986. – DOI: 10.1364/OE.21.008972.
 35. **He, H.-S.** Direct generation of vector vortex beams with switchable radial and azimuthal polarizations in a monolithic Nd:YAG microchip laser / H.-S. He, Z. Chen, J. Dong // *Applied Physics Express*. – 2017. – Vol. 10, Issue 5. – 052701. – DOI: 10.7567/APEX.10.052701.
 36. **Khonina, S.N.** Generation of cylindrical vector beams of high orders using uniaxial crystals / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, S.V. Alferov, V.A. Soifer // *Journal of Optics*. – 2015. – Vol. 17, Issue 6. – 065001. – DOI: 10.1088/2040-8978/17/6/065001.
 37. **Ferrando, A.** Analytical solution for multi-singular vortex Gaussian beams: the mathematical theory of scattering modes / A. Ferrando, M.A. García-March // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 18, Issue 6. – 064006. – DOI: 10.1088/2040-8978/18/6/064006.
 38. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – 184 с. – ISBN: 978-5-9221-1216-1.
 39. **Moreno, I.** Decomposition of radially and azimuthally polarized beams using a circular-polarization and vortex-sensing diffraction grating / I. Moreno, J.A. Davis, I. Ruiz, D.M. Cottrell // *Optics Express*. – 2010. – Vol. 18, Issue 7. – P. 7173-7183. – DOI: 10.1364/OE.18.007173.
 40. **Bochove, E.J.** Acceleration of particles by an asymmetric Hermite-Gaussian laser beam / E.J. Bochove, G.T. Moore, M.O. Scully // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 46, Issue 10. – P. 6640-6653.
 41. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87. – DOI: 10.1080/09500349314550101.
 42. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – Sausalito, California: University Science Books, 1986. – 1283 p. – ISBN: 978-0-935702-11-8.
 43. **Котляр, В.В.** Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Сойфер // *Компьютерная оптика*. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 4-10.

Сведения об авторах

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 7 февраля 2018 г. Окончательный вариант – 14 марта 2018 г.

FRESNEL AND FRAUNHOFER DIFFRACTION OF A GAUSSIAN BEAM WITH SEVERAL POLARIZATION SINGULARITIES

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

Alongside phase singularities (optical vortices), there may be light fields with polarization singularities (PS), i.e. isolated intensity nulls with radial, azimuthal, or radial-azimuthal polarization around them. Here, we study Gaussian beams with several arbitrarily located PS. An analytic expression is obtained for their complex amplitude. A partial case is studied when the PS are at the vertices of a regular polygon. If the beam has one or two PS, then these are points with radial polarization. If there are four PS, then two of the points will have azimuthal polarization. It is shown that while propagating in free space, the PS can appear only in a discrete set of planes, in contrast to the phase singularities, which exist in any transverse plane. In the case of two PS, it is shown that their polarization transforms from radial in the initial plane to azimuthal in the far field.

Keywords: Gaussian beam, polarization singularity, radial polarization, azimuthal polarization.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV. Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam with several polarization singularities. *Computer Optics* 2018; 42(2): 179-189. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.

Acknowledgements: This work was supported by the Federal Agency for Scientific Organizations under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (Superposition of two Gaussian beams with radial polarization), by the Russian Science Foundation under project No.17-19-01186 (Propagation of a Gaussian beam with multiple polarization singularities in an ABCD-system), and by the Russian Foundation for Basic Research under projects ## 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, and 16-47-630483 (A Gaussian beam with multiple arbitrarily located optical vortices and A Gaussian beam with multiple polarization singularities).

References

- | | |
|---|--|
| <p>[1] Dennis MR, O'Holleran K, Padgett MJ. Singular optics: Optical vortices and polarization singularities. <i>Progress in Optics</i> 2009; 53: 293-363. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)00205-9.</p> <p>[2] Tidwell SC, Ford DH, Kimura WD. Generating radially polarized beams interferometrically. <i>Appl Opt</i> 1990; 29(15): 2234-2239. DOI: 10.1364/AO.29.002234.</p> <p>[3] Oron R, Blit S, Davidson N, Friesem AA, Bomzon Z, Hasman E. The formation of laser beams with pure azi-</p> | <p>muthal or radial polarization. <i>Appl Phys Lett</i> 2000; 77(21): 3322. DOI: 10.1063/1.1327271.</p> <p>[4] Flossmann F, Schwarz UT, Maier M, Dennis MR. Polarization singularities from unfolding an optical vortex through a birefringent crystal. <i>Phys Rev Lett</i> 2005; 95(25): 253901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.253901.</p> <p>[5] Kozawa Y, Sato S. Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism. <i>Opt Lett</i> 2005; 30(22): 3063-3065. DOI: 10.1364/OL.30.003063.</p> <p>[6] Lai WJ, Lim BC, Phua PB, Tiaw KS, Teo HH, Hong MH. Generation of radially polarized beam with a segmented</p> |
|---|--|

- spiral varying retarder. *Opt Express* 2008; 16(20): 15694-15699. DOI: 10.1364/OE.16.015694.
- [7] Zhu S, Chen Y, Wang J, Wang H, Li Z, Cai Y. Generation and propagation of a vector cosine-Gaussian correlated beam with radial polarization. *Opt Express* 2015; 23(26): 33099-33115. DOI: 10.1364/OE.23.033099.
- [8] Fu S, Gao C, Shi Y, Dai K, Zhong L, Zhang S. Generating polarization vortices by using helical beams and a Twyman Green interferometer. *Opt Lett* 2015; 40(8): 1775-1778. DOI: 10.1364/OL.40.001775.
- [9] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [10] Fu S, Gao C, Wang T, Zhang S, Zhai Y. Simultaneous generation of multiple perfect polarization vortices with selective spatial states in various diffraction orders. *Opt Lett* 2016; 41(23): 5454-5457. DOI: 10.1364/OL.41.005454.
- [11] Dorn R, Quabis S, Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam. *Phys Rev Lett* 2003; 91(23): 233901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.233901.
- [12] Urbach HP, Pereira SF. Field in focus with a maximum longitudinal electric component. *Phys Rev Lett* 2008; 100(12): 123904. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.123904.
- [13] Segawa S, Kozawa Y, Sato S. Demonstration of subtraction imaging in confocal microscopy with vector beams. *Opt Lett* 2014; 39(15): 4529-4532. DOI: 10.1364/OL.39.004529.
- [14] Yu A, Chen G, Zhang Z, Wen Z, Dai L, Zhang K, Jiang S, Wu Z, Li Y, Wang C, Luo X. Creation of sub-diffraction longitudinally polarized spot by focusing radially polarized light with binary phase lens. *Sci Rep* 2016; 6: 38859. DOI: 10.1038/srep38859.
- [15] Sedukhin AG, Poleshchuk AG. Efficient tight focusing of laser beams optimally matched to their thin-film linear-to-radial polarization conversion: Method, implementation, and field near focus. *Opt Commun* 2018; 407: 217-226. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.042.
- [16] Tan Q, Xu Q, Xie N, Li C. A new optical voltage sensor based on radial polarization detection. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 2017; 66(1): 158-164. DOI: 10.1109/TIM.2016.2621198.
- [17] Bao Y, Zhu X, Fang Z. Plasmonic toroidal dipolar response under radially polarized excitation. *Sci Rep* 2015; 5: 11793. DOI: 10.1038/srep11793.
- [18] Roy S, Ushakova K, van den Berg Q, Pereira SF, Urbach HP. Radially polarized light for detection and nanolocalization of dielectric particles on a planar substrate. *Phys Rev Lett* 2015; 114(10): 103903. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.103903.
- [19] Milione G, Lavery MPJ, Huang H, Ren Y, Xie G, Nguyen TA, Karimi E, Marrucci L, Nolan DA, Alfano RR, Willner AE. 4×20 Gbit/s mode division multiplexing over free space using vector modes and a q -plate mode (de)multiplexer. *Opt Lett* 2015; 40(9): 1980-1983. DOI: 10.1364/OL.40.001980.
- [20] Peng X, Liu L, Yu J, Liu X, Cai Y, Baykal Y, Li W. Propagation of a radially polarized twisted Gaussian Schell-model beam in turbulent atmosphere. *J Opt* 2016; 18(12): 125601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/12/125601.
- [21] Tang M, Zhao D. Propagation of radially polarized beams in the oceanic turbulence. *Appl Phys B* 2013; 111(4): 665-670. DOI: 10.1007/s00340-013-5394-5.
- [22] Hao X, Kuang C, Wang T, Liu X. Phase encoding for sharper focus of the azimuthally polarized beam. *Opt Lett* 2010; 35(23): 3928-3930. DOI: 10.1364/OL.35.003928.
- [23] Lew MD, Moerner WE. Azimuthal polarization filtering for accurate, precise, and robust single-molecule localization microscopy. *Nano Lett* 2014; 14(11): 6407-6413. DOI: 10.1021/nl502914k.
- [24] Backlund MP, Arbabi A, Petrov PN, Arbabi E, Saurabh S, Faraon A, Moerner WE. Removing orientation-induced localization biases in single-molecule microscopy using a broadband metasurface mask. *Nat Photon* 2016; 10: 459-462. DOI: 10.1038/nphoton.2016.93.
- [25] Carretero L, Acebal P, García C, Blaya S. Periodic trajectories obtained with an active tractor beam using azimuthal polarization: design of particle exchanger. *IEEE Photonics Journal* 2015; 7(1): 3400112. DOI: 10.1109/JPHOT.2015.2402123.
- [26] Yan S, Yao B. Exact description of a cylindrically symmetrical complex-argument Laguerre-Gauss beam. *Opt Lett* 2008; 33(10): 1074-1076. DOI: 10.1364/OL.33.001074.
- [27] Schimpf DN, Putnam WP, Grogan MDW, Ramachandran S, Kärtner FX. Radially polarized Bessel-Gauss beams: decentered Gaussian beam analysis and experimental verification. *Opt Express* 2013; 21(15): 18469-18483. DOI: 10.1364/OE.21.018469.
- [28] Madhi D, Ornigotti M, Aiello A. Cylindrically polarized Bessel-Gauss beams. *J Opt* 2015; 17(2): 025603. DOI: 10.1088/2040-8978/17/2/025603.
- [29] Wu G, Wang F, Cai Y. Generation and self-healing of a radially polarized Bessel-Gauss beam. *Phys Rev A* 2014; 89(4): 043807. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.043807.
- [30] Lewis W, Vyas R. Maxwell-Gaussian beams with cylindrical polarization. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(7): 1595-1603. DOI: 10.1364/JOSAA.31.001595.
- [31] Ornigotti M, Conti C, Szameit A. Cylindrically polarized nondiffracting optical pulses. *J Opt* 2016; 18(7): 075605. DOI: 10.1088/2040-8978/18/7/075605.
- [32] Bar-David J, Voloch-Bloch N, Mazurski N, Levy U. Unveiling the propagation dynamics of self-accelerating vector beams. *Sci Rep* 2016; 6: 34272. DOI: 10.1038/srep34272.
- [33] Guo J, Wang X, He J, Zhao H, Feng S, Han P, Ye J, Sun W, Situ G, Zhang Y. Generation of radial polarized Lorentz beam with single layer metasurface. *Adv Opt Mater* 2017; 2017: 1700925.
- [34] Vyas S, Kozawa Y, Sato S. Polarization singularities in superposition of vector beams. *Opt Express* 2013; 21(7): 8972-8986. DOI: 10.1364/OE.21.008972.
- [35] He H-S, Chen Z, Dong J. Direct generation of vector vortex beams with switchable radial and azimuthal polarizations in a monolithic Nd:YAG microchip laser. *Appl Phys Express* 2017; 10(5): 052701. DOI: 10.7567/APEX.10.052701.
- [36] Khonina SN, Karpeev SV, Alferov SV, Soifer VA. Generation of cylindrical vector beams of high orders using uniaxial crystals. *J Opt* 2015; 17(6): 065001. DOI: 10.1088/2040-8978/17/6/065001.
- [37] Ferrando A, García-March MA. Analytical solution for multi-singular vortex Gaussian beams: the mathematical theory of scattering modes. *J Opt* 2016; 18(6): 064006. DOI: 10.1088/2040-8978/18/6/064006.
- [38] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Modern optics of Gaussian beams [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
- [39] Moreno I, Davis JA, Ruiz I, Cottrell DM. Decomposition of radially and azimuthally polarized beams using a circular-polarization and vortex-sensing diffraction grating. *Opt Express* 2010; 18(7): 7173-7183. DOI: 10.1364/OE.18.007173.

- [40] Bochove EJ, Moore GT, Scully MO. Acceleration of particles by an asymmetric Hermite-Gaussian laser beam. *Phys Rev A* 1992; 46(10): 6640-6653.
- [41] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87. DOI: 10.1080/09500349314550101.
- [42] Siegman AE. *Lasers*. Sausalito, California: University Science Books; 1986. ISBN: 978-0-935702-11-8.
- [43] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum. *Computer Optics* 2014; 38(1): 4-10.

Authors' information

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@smr.ru.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@smr.ru.

Received February 7, 2018. The final version – March 14, 2018.
