

## ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СВЕТОВОГО ПОЛЯ, ПРОШЕДШЕГО СМЕЩЁННУЮ С ОСИ СПИРАЛЬНУЮ ФАЗОВУЮ ПЛАСТИНКУ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

### Аннотация

Получена простая формула для относительного полного орбитального углового момента параксиального светового пучка с произвольной радиально-симметричной комплексной амплитудой, прошедшего через спиральную фазовую пластинку, центр которой смещён с оптической оси. Формула показывает, что орбитальный угловой момент будет равен нулю, если падающий на спиральную фазовую пластинку пучок ограничен диафрагмой, а центр спиральной фазовой пластинки находится за пределами этой диафрагмы. Ещё интересное следствие из полученной формулы: если падающий на спиральную фазовую пластинку пучок ограничен кольцевой диафрагмой, то в какой бы точке внутри затенённого круга кольцевой диафрагмы ни находился центр спиральной фазовой пластинки, полный орбитальный угловой момент пучка будет одинаковым. То есть целесообразно освещать спиральную фазовую пластинку пучками с кольцевым распределением интенсивности, так как при этом неточное совмещение центра спиральной фазовой пластинки и центра кольцевого распределения интенсивности не будет влиять на полный орбитальный угловой момент пучка. Также получено выражение для плотности орбитального углового момента такого пучка в начальной плоскости.

**Ключевые слова:** орбитальный угловой момент, смещённая спиральная фазовая пластинка, радиально-симметричный световой пучок, круглая диафрагма, кольцевая диафрагма.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент произвольного осесимметричного светового поля, прошедшего смещённую с оси спиральную фазовую пластинку / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 212-218. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-212-218.

### Введение

В [1, 2] А. Цайлингер предложил регистрировать фотоны, которые рождаются парами в ходе спонтанного параметрического рассеяния в перепутанном состоянии по орбитальному угловому моменту (ОУМ), с помощью смещения центров Гауссова пучка и голограммы «с вилочкой». Он предположил, что при малом смещении между центрами пучка и голограммы формируется линейная комбинация Гауссова пучка и пучка Лагерра–Гаусса. В [3] также экспериментально показано, что можно регистрировать перепутанные по ОУМ стоковые и антистоковые фотоны с помощью четырёхволнового смещения в ансамбле «горячих» атомов и при смещении центров Гауссова пучка и голограммы «с вилочкой». Известны также исследования трансформации оптических вихрей и в классическом свете. Под оптическим вихрем здесь понимается лазерный пучок с изолированным нулём интенсивности на оптической оси и спиральной фазой с целым топологическим зарядом. В [4] теоретически изучается влияние на оптический вихрь смещения вдоль оптической оси центра перетяжки Гауссова пучка от плоскости спиральной фазовой пластинки, совмещённой с дифракционной линзой (спиральная линза). В [5] экспериментально исследуется прохождение оптического вихря через набор малых отверстий в непрозрачном экране, центры которых лежат на окружности. Показано, что при этом вырожденный оптический вихрь  $n$ -го порядка распадается на  $n$  невырожденных оптических вихрей (1-го порядка). В [6] исследуется

трансформация оптического вихря с помощью внесения в него разной степени эллиптичности. Эта работа [6] продолжает более ранние работы по исследованию эллиптических оптических вихрей [7, 8]. В [9] предложено формировать оптический вихрь с помощью набора малых отверстий в непрозрачном экране, центры которых расположены на спирали. Небольшие деформации направляющей спирали приводят к искажению формы оптического вихря.

Наиболее близкими по тематике к данной работе являются ранние статьи авторов [10–12]. В них теоретически и экспериментально исследуются трансформации оптического вихря, которые получаются в результате комплексного смещения исходной функции комплексной амплитуды в декартовой системе координат. Такое смещение приводит к асимметрии оптического вихря: вместо светового кольца (или «пончика») формируется полумесяц. В [10] комплексное смещение координат применено для пучков Бесселя, а в [11] – для пучков Лагерра–Гаусса. В [12] оптический вихрь  $n$ -го порядка преобразуется в  $n$  оптических вихрей 1-го порядка с помощью использования эллиптического Гауссова пучка, падающего на спиральную фазовую пластинку. В [13] теоретически исследуется дифракция Гауссова пучка на смещённой с оси голограмме с «вилочкой». В [14, 15] получены формулы для полного относительного ОУМ Гауссова пучка со смещённым центром спирального фазового вихря.

Заметим, что при комплексном смещении координат ОУМ пучков Бесселя [10] и Лагерра–Гаусса [11] растёт. Растёт также ОУМ у эллиптического вихрево-

го пучка Эрмита–Гаусса [12]. В отличие от них ОУМ асимметричного Гауссова вихря, описанного в [14, 15], убывает с увеличением расстояния между центрами Гауссова пучка и спиральной фазовой пластинки. В [16, 17] получены формулы для полного ОУМ для эллиптических Гауссовых вихрей.

В этой работе мы получили точное выражение для полного относительного ОУМ для случая произвольного (а не только Гауссова) радиально-симметричного распределения интенсивности, дифрагирующего на спиральной фазовой пластинке (СФП), центр которой смещён с оптической оси.

### 1. Расчёт полного орбитального углового момента

Рассмотрим начальное вихревое световое поле, комплексная амплитуда которого имеет вид:

$$E_n(r, \varphi) = E_0(r) \exp(in\varphi), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в начальной плоскости при  $z=0$ ,  $n$  – целое число, равное топологическому заряду СФП с пропуском:

$$T_n(\varphi) = \exp(in\varphi), \quad (2)$$

а  $E_0(r)$  – осесимметричная комплексная амплитуда светового поля, падающего на СФП (2) (в дальнейшем «падающая волна»), равная

$$E_0(r) = A(r) \exp(i\psi(r)), \quad (3)$$

где  $A(r)$  и  $\psi(r)$  – соответственно модуль амплитуды падающей волны (3) и её аргумент,  $I(r) = A^2(r)$  – интенсивность падающего поля. Пусть далее центр СФП (2) смещён с оптической оси на вектор с полярными координатами  $(r_0, \varphi_0)$ . Тогда пропускание СФП вместо (2) примет вид:

$$T_n(r, r_0, \varphi, \varphi_0) = \left[ \frac{r \exp(i\varphi) - r_0 \exp(i\varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}} \right]^n. \quad (4)$$

Далее мы получим простое выражение для ОУМ параксиального светового пучка, сформировавшегося после прохождения осесимметричного светового поля (3) через смещённую СФП (4). В параксиальном случае ОУМ можно заменить проекцией вектора ОУМ на оптическую ось, которую будем вычислять по формуле:

$$J_z = \text{Im} \left\{ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi) r dr d\varphi \right\}, \quad (5)$$

где  $\text{Im}$  – мнимая часть комплексного числа,  $E^*$  – комплексно сопряжённая функция. Так как величина (5) является инвариантом для любого параксиального светового поля, то рассчитывать её можно в любой плоскости, перпендикулярной оптической оси, и в том числе в начальной плоскости при  $z=0$ . Мощность лазерного пучка будем рассчитывать по формуле:

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) E(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (6)$$

Известно, что ОУМ зависит от расстояния от начала координат до точки «центра масс» светового поля. И если это расстояние равно нулю, то рассчитанный ОУМ будет минимальным. В нашем случае как раз «центр масс» пучка (3) совмещён с началом координат  $(r, \varphi)$ , а СФП смещена от начала координат на вектор  $(r_0, \varphi_0)$ . Для расчёта нормированного ОУМ подставим в (5) и (6) комплексную амплитуду вида

$$E(r, \varphi) = E_0(r) T_n(r, r_0, \varphi, \varphi_0). \quad (7)$$

Получим промежуточное выражение перед тем, как выполнять интегрирование по полярному углу:

$$J_z = n \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{I(r) r [r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} r dr d\varphi. \quad (8)$$

Интеграл по  $\varphi$  в (8) можно вычислить с помощью двух справочных интегралов [18] (выражения 2.5.16.61, 2.5.16.67, 2.5.16.68):

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos t} = \frac{2\pi}{|r_0^2 - r^2|}, \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos t} = \begin{cases} \frac{2\pi r}{r_0(r_0^2 - r^2)}, & r < r_0, \\ \frac{2\pi r_0}{r(r^2 - r_0^2)}, & r > r_0. \end{cases} \quad (10)$$

После вычисления интеграла по  $\varphi$  для нормированного ОУМ светового поля (7) окончательно получим:

$$\frac{J_z}{W} = n \int_{r_0}^\infty I(r) r dr \left[ \int_0^\infty I(r) r dr \right]^{-1}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что ОУМ зависит только от длины вектора смещения  $r_0$  и не зависит от полярного угла вектора смещения  $\varphi_0$  и от вида волнового фронта падающей волны  $\psi(r)$ .

Кроме того, так как числитель в (11) всегда меньше или равен знаменателю, то ОУМ будет убывать до нуля при увеличении величины смещения СФП от «центра масс» падающего пучка  $r_0$ . Если смещение равно нулю  $r_0=0$ , то нормированный ОУМ равен топологическому заряду:

$$\frac{J_z}{W} = n. \quad (12)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (8) равно плотности ОУМ в каждой точке сечения лазерного пучка (7) в начальной плоскости  $z=0$ :

$$j_z = \frac{nI(r) r [r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (13)$$

В начале координат ( $r=0$ ) плотность ОУМ (13) всегда равна нулю, так как «плечо» равно нулю. Из (13) следует, что нормированная плотность ОУМ пучка (7) при отсутствии смещения  $r_0=0$  также равна топологическому заряду, как и полный ОУМ (12):

$$\frac{j_z}{I} = n. \quad (14)$$

На бесконечности ( $r \gg r_0$ ) плотность ОУМ тоже равна топологическому заряду (14) при любом конечном  $r_0$ . Получается, что на бесконечности смещение центра СФП от «центра масс» пучка не проявляется. Из (13) также следует, что на окружности с радиусом  $r=r_0$  независимо от величины  $r_0$  значение плотности ОУМ равно

$$\frac{j_z}{I} = \frac{n}{2}, \quad (15)$$

во всех точках, кроме точки  $\varphi = \varphi_0$ . В этой точке плотность  $j_z/I$  не имеет предела (плотность равна  $n/2$  на окружности  $r=r_0$ , стремится к  $+\infty$  с внешней стороны окружности и к  $-\infty$  с её внутренней стороны). На прямой линии, проходящей через начало координат ( $r=0$ ), и под углом  $\varphi = \varphi_0$  плотность (13) имеет вид:

$$\frac{j_z}{I} = \begin{cases} \frac{nr}{r-r_0}, & \varphi = \varphi_0, \\ \frac{nr}{r+r_0}, & \varphi = \varphi_0 + \pi. \end{cases} \quad (16)$$

Из (16) следует, что при  $r \rightarrow r_0$ ,  $r < r_0$  плотность ОУМ (13) стремится к  $-\infty$ , а при  $r \rightarrow r_0$ ,  $r > r_0$  плотность ОУМ (13) стремится к  $+\infty$ . В точке с координатами  $(r_0, \varphi_0)$  при любом направлении подхода к этой точке плотность стремится к бесконечности, так как эта точка сингулярности. Интересно, что эта особенность плотности ОУМ (стремление к бесконечности в точке  $(r_0, \varphi_0)$ ) проявляется только при  $r_0 > 0$ , а при  $r_0 = 0$  плотность ОУМ в точке сингулярности равна топологическому заряду (14), так как «плечо» равно нулю. Интересно также отметить, что плотность ОУМ (13) может быть отрицательной. Например, из (16) видно, что на луче  $\varphi = \varphi_0$  при  $0 < r < r_0$  плотность ОУМ меньше нуля. То есть поток энергии в этих точках вращается в обратную сторону.

Вернёмся к уравнению (11) для нормированного ОУМ и получим на его основе частные случаи.

1) Если смещённую СФП освещает несмещённый Гауссов пучок с радиусом перетяжки  $w$  и распределением интенсивности в перетяжке ( $I_0$  – постоянная)

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right), \quad (17)$$

то из (11) следует, что ОУМ Гауссова лазерного пучка, прошедшего смещённую СФП, будет равен:

$$\frac{J_z}{W} = n \exp\left(-\frac{2r_0^2}{w^2}\right). \quad (18)$$

Из (18) видно, что с увеличением расстояния от центра СФП до центра перетяжки Гауссова пучка ОУМ уменьшается экспоненциально от  $n$  до нуля. Этот результат был получен ранее в [14].

2) Если смещённую с оптической оси СФП осветить плоской волной, ограниченной круглой диафрагмой, то есть интенсивность падающего пучка можно описать функцией

$$I(r) = I_0 \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = I_0 \begin{cases} 1, & r < R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases} \quad (19)$$

то из (11) следует, что ОУМ такого пучка будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{W} = n \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right). \quad (20)$$

Из (20) следует, что с ростом  $r_0$  от нуля до  $R$  нормированный ОУМ уменьшается от  $n$  до нуля квадратично. При любом  $r_0 > R$  из (11) следует, что ОУМ будет равен нулю.

3) Если ограничить плоскую волну, падающую на смещённую СФП, не круглой, а кольцевой диафрагмой с внешним радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$ , то интенсивность освещающего пучка будет равна:

$$I(r) = I_0 \left[ \text{circ}\left(\frac{r}{R_2}\right) - \text{circ}\left(\frac{r}{R_1}\right) \right]. \quad (21)$$

Нормированный ОУМ (11) такого пучка будет равен:

$$\frac{J_z}{W} = \begin{cases} n, & r_0 < R_1, \\ n \left( \frac{R_2^2 - r_0^2}{R_2^2 - R_1^2} \right), & R_1 < r_0 < R_2, \\ 0, & r_0 > R_2. \end{cases} \quad (22)$$

Из (22) следует интересное свойство такого вихревого пучка. Если освещать СФП плоской волной, ограниченной кольцевой диафрагмой, то при любом расположении центра СФП внутри круга с внутренним радиусом  $R_1$  нормированный ОУМ пучка будет равен топологическому заряду  $n$ .

## 2. Численное моделирование

На рис. 1 показаны распределения фазы в начальной плоскости, рассчитанные по формуле (4) (с учётом ограничения круглой диафрагмой (19)), а также распределения интенсивности и фазы на расстоянии  $z = 15\lambda$ , рассчитанные методом распространения пучка (*Beam Propagation Method*) в программе RSoft BeamPROP, для следующих значений параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП  $n = 5$ , радиус диафрагмы  $R = 4\lambda$ , расчётная область  $-5\lambda \leq x, y \leq 5\lambda$  (в начальной плоскости) и  $-12,5\lambda \leq x, y \leq 12,5\lambda$  (на расстоянии  $z = 15\lambda$ ), смещение СФП  $r_0 = 0$  (рис. 1а-в),  $r_0 = 0,5\lambda$  (рис. 1г-е),  $r_0 = \lambda$  (рис. 1ж-и),  $r_0 = 2\lambda$  (рис. 1к-м),  $r_0 = 4\lambda$  (рис. 1н-п).

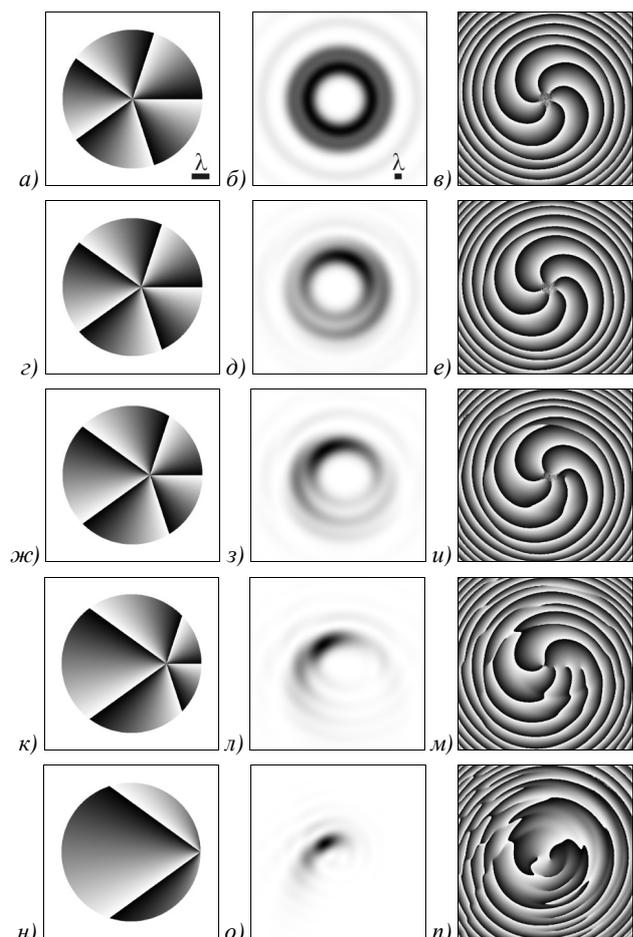


Рис. 1. Распределения фазы в начальной плоскости и распределения интенсивности и фазы на расстоянии  $z = 15\lambda$  для длины волны  $\lambda = 532$  нм, топологического заряда СФП  $n = 5$ , радиуса диафрагмы  $R = 4\lambda$ , смещения СФП  $r_0 = 0$  (а-в),  $r_0 = 0,5\lambda$  (з-е),  $r_0 = \lambda$  (ж-и),  $r_0 = 2\lambda$  (к-м),  $r_0 = 4\lambda$  (н-п). Расчётная область  $-5\lambda \leq x, y \leq 5\lambda$  (в начальной плоскости) и  $-12,5\lambda \leq x, y \leq 12,5\lambda$  (на расстоянии  $z = 15\lambda$ )

В табл. 1 приведены значения нормированного ОУМ для разных смещений СФП, вычисленные по формуле (20).

Табл. 1. Нормированный ОУМ для разных смещений СФП от центра круглой диафрагмы

$r_0/\lambda$	0,00	0,50	1,00	2,00	4,00
$J_z/I$	5,00	4,92	4,69	3,75	0,00

Из табл. 1 и из формулы (20) видно, что смещение центра СФП от центра диафрагмы на 10% от её радиуса меняет ОУМ лишь на 1%, и кольцевая структура интенсивности сохраняется, несмотря на её асимметричность.

На рис. 2 показаны распределения фазы в начальной плоскости, рассчитанные по формуле (4) (с учётом ограничения кольцевой диафрагмой (21)), а также распределения интенсивности и фазы на расстоянии  $z = 15\lambda$ , рассчитанные методом распространения пучка (*Beam Propagation Method*) в программе RSoft BeamPROP, для следующих значений параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд СФП

$n = 15$ , внутренний и внешний радиусы диафрагмы  $R_1 = 3,5\lambda$  и  $R_2 = 4\lambda$ , расчётная область  $-5\lambda \leq x, y \leq 5\lambda$  (в начальной плоскости) и  $-25\lambda \leq x, y \leq 25\lambda$  (на расстоянии  $z = 15\lambda$ ), смещение СФП  $r_0 = 0$  (рис. 2а-в),  $r_0 = 2\lambda$  (рис. 2з-е),  $r_0 = 3\lambda$  (рис. 2ж-и),  $r_0 = 3,75\lambda$  (рис. 2к-м),  $r_0 = 4\lambda$  (рис. 2н-п).

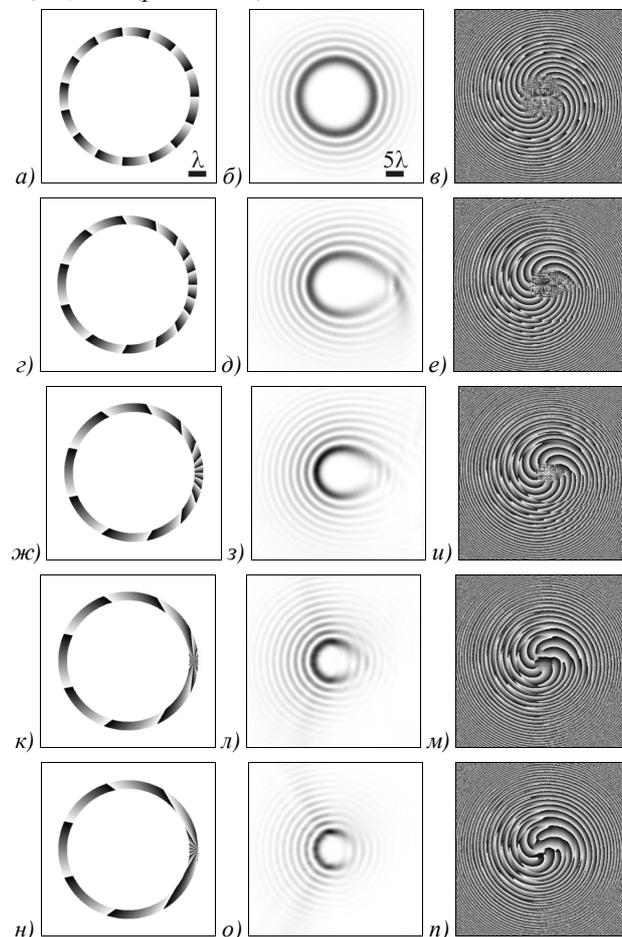


Рис. 2. Распределения фазы в начальной плоскости и распределения интенсивности и фазы на расстоянии  $z = 15\lambda$  для длины волны  $\lambda = 532$  нм, топологического заряда СФП  $n = 15$ , внутреннего и внешнего радиусов кольцевой диафрагмы  $R_1 = 3,5\lambda$  и  $R_2 = 4\lambda$ , смещения СФП  $r_0 = 0$  (а-в),  $r_0 = 2\lambda$  (з-е),  $r_0 = 3\lambda$  (ж-и),  $r_0 = 3,75\lambda$  (к-м),  $r_0 = 4\lambda$  (н-п). Расчётная область  $-5\lambda \leq x, y \leq 5\lambda$  (в начальной плоскости) и  $-25\lambda \leq x, y \leq 25\lambda$  (на расстоянии  $z = 15\lambda$ )

В табл. 2 приведены значения нормированного ОУМ для разных смещений СФП, вычисленные по формуле (22).

Табл. 2. Нормированный ОУМ для разных смещений СФП от центра кольцевой диафрагмы

$r_0/\lambda$	0,00	2,00	3,00	3,75	4,00
$J_z/I$	15,00	15,00	15,00	7,75	0,00

Из рис. 2а-и и табл. 2 видно, что, несмотря на разный вид интенсивности (кольцо и полукольцо), нормированный ОУМ этих полей одинаков и равен 15. Кроме того, эти поля обладают слабой дифракцией из-за того, что их амплитуда отлична от нуля на

узком кольце (как у мод Бесселя в дальней зоне). Видно также, что при увеличении  $r_0$  первое светлое кольцо не только искажается и становится полукольцом, но и уменьшается его размер.

### Заключение

В данной работе получена простая формула для относительного полного орбитального углового момента паракиального светового пучка с произвольной (не только Гауссовой) радиально-симметричной комплексной амплитудой, прошедшего через спиральную фазовую пластинку, центр которой смещён с оптической оси. Формула показывает, что ОУМ равен нулю, если падающая на СФП плоская волна ограничена диафрагмой, а центр СФП находится за пределами этой диафрагмы. Если падающая на СФП плоская волна ограничена кольцевой диафрагмой, то, в какой бы точке внутри затенённого круга кольцевой диафрагмы ни находился центр СФП, полный ОУМ пучка одинаковый. То есть целесообразно освещать СФП пучками с кольцевым распределением интенсивности, так как при этом неточное совмещение центра СФП и центра кольцевого распределения интенсивности не будет влиять на полный ОУМ пучка. Также получено выражение для плотности ОУМ такого пучка в начальной плоскости. Результаты работы могут найти применение в оптической передаче информации и манипуляции микрообъектами.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в параграфе «Численное моделирование» и Российского научного фонда (грант 17-19-01186) в параграфе «Расчёт полного орбитального углового момента».

### Литература

- Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Nature*. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.
- Vaziri, A.** Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments / A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4, Issue 2. – P. S47-S51. – DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/367.
- Chen, Q.-F.** Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble / Q.-F. Chen, B.-S. Shi, Y.-Sh. Zhang, G.-C. Guo // *Physical Review A*. – 2008. – Vol. 78, Issue 5. – 053810. – DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.
- Janicijevic, L.** Gaussian laser beam transformation into an optical vortex beam by helical lens / L. Janicijevic, S. Topuzoski // *Journal of Modern Optics*. – 2016. – Vol. 63, Issue 2. – P. 164-176. – DOI: 10.1080/09500340.2015.1085106.
- Ricci, F.** Instability of higher-order optical vortices analyzed with a multi-pinhole interferometer / F. Ricci, W. Löffler, M.P. van Exter // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 20. – P. 22961-22975. – DOI: 10.1364/OE.20.022961.
- Kumar, A.** Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices / A. Kumar, P. Vaity, R.P. Singh // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19, Issue 7. – P. 6182-6190. – DOI: 10.1364/OE.19.006182.
- Dennis, M.R.** Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam / M.R. Dennis // *Optics Letters*. – 2006. – Vol. 31, Issue 9. – P. 1325-1327. – DOI: 10.1364/OL.31.001325.
- Kotlyar, V.V.** Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2006. – Vol. 23, Issue 1. – P. 43-56. – DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
- Li, Z.** Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination / Z. Li, M. Zhang, G. Liang, X. Li, X. Chen, C. Cheng // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 13. – P. 15755-15764. – DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93. – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, Issue 5. – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- Bazhenov, V.Y.** Laser beams with screw dislocations in their wavefront / V.Y. Bazhenov, M.V. Vasnetsov, M.S. Soskin // *JETP Letters*. – 1990. – Vol. 52. – P. 429-431.
- Kotlyar, V.V.** Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 1. – P. 139-142. – DOI: 10.1364/OL.42.000139.
- Котляр, В.В.** Дробный орбитальный угловой момент Гауссова пучка с внедрённым внесевым оптическим вихрем / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев, Е.Г. Абрамочкин // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 22-29. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
- Kotlyar, V.V.** Elliptic Gaussian optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 95, Issue 5. – 053805. – DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
- Kotlyar, V.V.** Controlling orbital angular momentum of an optical vortex by varying its ellipticity / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Optics Communications*. – 2018. – Vol. 410. – P. 202-205. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.10.004.
- Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 850 с.

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 187 этого выпуска.

ГРПТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 15 февраля 2018 г. Окончательный вариант – 15 марта 2018 г.

## ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF AN ARBITRARY AXISYMMETRIC LIGHT FIELD AFTER PASSING THROUGH AN OFF-AXIS SPIRAL PHASE PLATE

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

<sup>2</sup> Samara National Research University, Samara, Russia

### Abstract

We obtain a simple formula for the relative total orbital angular momentum (OAM) of a paraxial light beam with arbitrary rotationally symmetric complex amplitude passed through a spiral phase plate (SPP) whose center is shifted from the optical axis. The formula shows that the OAM equals zero if the incident beam is bounded by an aperture and the SPP center is outside this aperture. For the incident beam bounded by an annular aperture, there is another interesting consequence of the obtained expression. The total OAM of such a beam is the same regardless of the position of the SPP center within the shaded circle of the aperture. Thus, it would be appropriate to illuminate the SPP by beams with an annular intensity distribution, since in this case an inaccurate alignment of the SPP center and the center of the annular intensity distribution does not affect the total OAM of the beam. We also obtain an expression for the OAM density of such a beam in the initial plane.

**Keywords:** orbital angular momentum, shifted spiral phase plate, rotationally-symmetric light beam, circular aperture, annular aperture.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of an arbitrary axisymmetric light field after passing through an off-axis spiral phase plate. *Computer Optics* 2018; 42(2): 212-218. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-212-218.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Federal Agency for Scientific Organizations under agreement No. 007-Г3/Ч3363/26 (Numerical simulation) and by the Russian Science Foundation under project No.17-19-01186 (Calculation of the total orbital angular momentum).

### References

- [1] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [2] Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments. *J Opt B: Quant Semicl Opt* 2002; 4(2): S47-S51. DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/367.
- [3] Chen Q-F, Shi B-S, Zhang Y-S, Guo G-C. Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble. *Phys Rev A* 2008; 78(5): 053810. DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.
- [4] Janicijevic L, Topuzoski S. Gaussian laser beam transformation into an optical vortex beam by helical lens. *J Mod Opt* 2016; 63(2): 164-176. DOI: 10.1080/09500340.2015.1085106.
- [5] Ricci F, Löffler W, van Exter MP. Instability of higher-order optical vortices analyzed with a multi-pinhole interferometer. *Opt Express* 2012; 20(20): 22961-22975. DOI: 10.1364/OE.20.022961.
- [6] Kumar A, Vaity P, Singh RP. Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices. *Opt Express* 2011; 19(7): 6182-6190. DOI: 10.1364/OE.19.006182.
- [7] Dennis MR. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt Lett* 2006; 31(9): 1325-1327. DOI: 10.1364/OL.31.001325.
- [8] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(1): 43-56. DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
- [9] Li Z, Zhang M, Liang G, Li X, Chen X, Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination. *Opt Express* 2013; 21(13): 15755-15764. DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- [11] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93: 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [13] Bazhenov VY, Vasnetsov MV, Soskin MS. Laser beams with screw dislocations in their wavefront. *JETP Letters* 1990; 52: 429-431.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Asymmetric Gaussian optical vortex. *Opt Lett* 2017; 42(1): 139-142. DOI: 10.1364/OL.42.000139.

- [15] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Abramochkin EG. Fractional orbital angular momentum of a Gaussian beam with an embedded off-axis optical vortex. *Computer Optics* 2017; 41(1): 22-29. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Elliptic Gaussian optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 95(5): 053805. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA. Controlling orbital angular momentum of an optical vortex by varying its ellipticity. *Opt Commun* 2018; 410: 202-205. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.10.004.
- [18] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and series. Volume 2: Special functions.* New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.

---

The information about authors **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 189 of this issue.

---

*Received February 15, 2018. The final version – March 15, 2018.*

---