СВЯЗЬ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ В ОПТИКЕ, ФОКУСИРОВКИ ИЗЛУЧЕНИЯ И ЗАДАЧИ МОНЖА–КАНТОРОВИЧА

Н.Л. Казанский [1,2], С.И. Харитонов [2], И.Н. Козлова [2], М.А. Моисеев [1]
[1] ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;
[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Статья посвящена использованию вариационных принципов для решения фазовой проблемы в оптике. В работе рассмотрена связь четырёх фундаментальных задач: фазовой проблемы в оптике, обратной задачи фокусировки когерентного излучения, задачи оптимального перемещения масс Монжа–Канторовича и вариационных методов решения модифицированного уравнения Монжа–Ампера. Показано, что решение фазовой проблемы в оптике в рамках асимптотического подхода тесно связано с решением задачи оптимального перемещения масс с неквадратичной функцией стоимости.

Ключевые слова: фазовая проблема в оптике, задача оптимального перемещения масс, уравнение Монжа–Ампера.

Цитирование: **Казанский, Н.Л.** Связь фазовой проблемы в оптике, фокусировки излучения и задачи Монжа–Канторовича / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, И.Н. Козлова, М.А. Моисеев // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 574-587. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-574-587.

Введение

Проблема получения фазовых характеристик световых полей возникает в разнообразных оптических исследованиях. Трудности непосредственного измерения фазы заставляют оптиков искать обходные пути: пытаться извлекать фазовую информацию из данных об интенсивности. Разумеется, попытки получить простые рецепты решения задачи были обречены на неудачу. Однако за последние годы наметилось серьёзное продвижение в проблеме восстановления фазовых характеристик световых полей. Появились работы, в которых с помощью вычислительных методов реально выполняется восстановление фазовых характеристик по характеристикам интенсивности. Важно подчеркнуть, что при этом привлекаются дополнительные данные о поле, например, во многих случаях используются распределения интенсивности в разных плоскостях.

Для восстановления фазовой информации Гершберг и Сэкстон [1 – 4] первыми стали привлекать данные об интенсивности, относящиеся не к одной, а к двум плоскостям. Особенно удачным у них оказался итерационный способ нахождения фазы, который заключается в следующем. Допустим, что исходное монохроматическое поле, несущее информацию об исследуемом объекте, было зарегистрировано в двух плоскостях: во входной плоскости и в Фурье-плоскости.

Обозначим поле во входной плоскости $E_0(u,v)$, а в плоскости изображения – $E(x,y)$. Пусть при регистрации поля получена информация о функциях $E_0(u,v)$ и $E(x,y)$, а информация о фазовых множителях отсутствует. Задача состоит в построении комплексной функции по заданному модулю и модулю Фурье-образа.

Фазовая проблема в оптике непосредственно связана с решением обратной задачи фокусировки. Решению этой задачи посвящено множество работ [5 – 10].

Связь фазовой проблемы в оптике и задачи фокусировки когерентного излучения состоит в следующем: пусть требуется преобразовать когерентное излучение, имеющее в одной плоскости распределение освещённости $E_0(u,v)$, в пучок света, который в другой плоскости имеет распределение освещённости $E(x,y)$. Так как мы знаем распределение модуля комплексной амплитуды света в двух различных плоскостях, то можно найти распределение фазы (или эйконала) $\Phi_0(u,v)$ во входной плоскости. Теперь у нас есть полная информация о волновом поле. В результате решения фазовой проблемы нам становится известно: чтобы сформировать распределение поля с освещённостью в выходной плоскости $E(x,y)$, необходимо сформировать во входной плоскости излучение с комплексной амплитудой $\sqrt{E_0(u,v)}\exp(i\Phi_0(u,v))$. На втором этапе решения задачи фокусировки когерентного излучения встаёт вопрос: каким образом создать требуемое комплексное распределение амплитуды? Это возможно сделать с помощью зеркал, рефракционных оптических элементов с криволинейной поверхностью или дифракционных оптических элементов.

В данной работе рассмотрено решение фазовой проблемы в оптике в рамках асимптотического подхода, основанного на решении модифицированного уравнения Монжа–Ампера.

В своё время инженер и математик Гаспард Монж сформулировал следующий вопрос: какой самый дешёвый способ транспортировки кучи песка с минимальными затратами, если знать, что перемещение отдельной частицы из положения x в положение y имеет стоимость $c(x,y)$. Оказалось, что решение задачи оптимальной транспортировки песка тесно связано с решением классического уравнения Монжа–Ампера. Эта связь изучается в работах [11 – 12]. В этих статьях установлено, что решение классического уравнения Монжа–Ампера можно свести к задаче оптимального перемещения масс с квадратичной функцией стоимости [13 – 14].

Выше было отмечено, что решение фазовой проблемы в рамках асимптотического подхода сводится к решению модифицированного уравнения Монжа–Ампера. В данной работе показано, что решение данного уравнения эквивалентно решению задачи оптимального перемещения масс с неквадратичной функцией стоимости.

1. Фазовая проблема в рамках геометрической оптики

Классическая фазовая проблема в оптике состоит в нахождении фазы волнового поля по распределению освещённости (модуля комплексной амплитуды) в двух параллельных плоскостях. Для решения этой задачи достаточно восстановить информацию о фазе волнового поля только в одной плоскости. Рассмотрим решение этой важной задачи в приближении геометрической оптики.

В рамках скалярной теории дифракции монохроматический свет описывается комплексной функцией $U(x,y,z)$. Эту функцию иногда называют комплексной амплитудой света. Комплексная амплитуда удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0 , \tag{1}$$

где ΔU – лапласиан, $k = \omega / c$, ω – циклическая частота света, c – скорость света. Представим комплексную амплитуду света в виде

$$U(x,y,z) = A(x,y,z)\exp\big(ik\Phi(x,y,z)\big), \tag{2}$$

где $\Phi(x,y,z)$ – эйконал, $A(x,y,z)$ – амплитуда световой волны. В результате уравнение сводится к системе

$$\begin{aligned} &\nabla A^2 \nabla\Phi + A^2 \Delta\Phi = 0, \\ &(\nabla\Phi)^2 = 1 = 1 + \frac{\Delta A}{k^2 A}. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение – это уравнение переноса, которое можно интерпретировать как закон сохранения энергии, а второе уравнение назовём дифракционным уравнением эйконала. Отличие дифракционного уравнения эйконала от обычного состоит в наличии члена $\Delta A/(k^2 A)$. В асимптотическом пределе вышеприведённые уравнения имеют вид [15]

$$\begin{aligned} &(\nabla\Phi)^2 = 1, \\ &\nabla A^2 \nabla\Phi + A^2 \Delta\Phi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В данной постановке решение системы уравнений распадается на независимое решение уравнений эйконала и переноса. В этом состоит смысл приближения геометрической оптики.

Для решения этих уравнений введём лучевые координаты. Лучевые координаты появляются как решение характеристической системы уравнений, которая возникает при решении уравнения эйконала методом характеристик. Связь лучевых координат с декартовыми имеет вид

$$\begin{aligned} &x = u + \frac{\partial\Phi_0}{\partial u} l, \quad y = v + \frac{\partial\Phi_0}{\partial v} l, \\ &z = S_z l, \; S_z = \sqrt{1 - \Phi_{0u}^2 - \Phi_{0v}^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Phi_0(u,v)$ – распределение эйконала в плоскости $z=0$, l – расстояние вдоль луча. Решение уравнения эйконала в лучевых координатах имеет вид [15 – 16]

$$\Psi = \Psi(u,v) = \Phi_0(u,v) + l . \tag{6}$$

Для того чтобы получить решение уравнения эйконала, необходимо разрешить уравнения, описывающие лучевые координаты, и представить в виде

$$u = U(x,y,z), \; v = V(x,y,z), \; l = L(x,y,z) . \tag{7}$$

В этом случае решение уравнения эйконала в декартовых координатах имеет вид.

$$\begin{aligned} &\Phi(x,y,z) = \\ &= \Psi\big(U(x,y,z), V(x,y,z), L(x,y,z)\big) = \\ &= \Phi_0\big(U(x,y,z), V(x,y,z)\big) + L(x,y,z). \end{aligned} \tag{8}$$

После того, как получено решение уравнения эйконала, его можно подставить в уравнение переноса и получить уравнение, содержащее только функцию $A^2(x,y,z)$ в качестве неизвестной. Следует отметить, что решение уравнения в декартовой системе нецелесообразно, так как обратить уравнения для лучевых координат сложно. Решение уравнения переноса будем проводить также в лучевой системе координат. Для решения уравнения переноса необходимо найти градиент функции эйконала и выражение для лапласиана.

Связь производных в декартовой системе координат с производными в лучевой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{A_{11}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial u} - \frac{A_{21}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{A_{31}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial l}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{A_{12}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{A_{22}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{A_{32}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial l}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{A_{13}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial u} - \frac{A_{23}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{A_{33}}{(det)}\frac{\partial\Psi}{\partial l}, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &A_{11} = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad A_{21} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ &A_{31} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &A_{12} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad A_{22} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ &A_{32} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &A_{13} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad A_{23} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial u}, \\ &A_{33} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\left(det\right)=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial l}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial l}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&=S_z^{-1}\left\{-\Phi_{vu}^2 l^2+\Phi_{uu}\Phi_{vv}l^2+\right.\\&+\left.\left(\Phi_{uu}\Phi_u^2+\Phi_{vv}\Phi_v^2+2\Phi_{vu}\Phi_u\Phi_v\right)l\right\}+\\&+\left\{2l\Phi_{uv}\Phi_v\Phi_u+S_z^2-\left(\Phi_{vv}\Phi_u^2+\Phi_{uu}\Phi_v^2\right)l+\right.\\&+\left.\left(\Phi_{uu}+\Phi_{vv}\right)l-\Phi_{uv}^2 l^2+\Phi_{vv}\Phi_{uu}l^2\right\}S_z^{-1}.\end{aligned} \tag{15}$$

Градиент функции эйконала, записанный в лучевых координатах, имеет вид

$$\begin{aligned}&p_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial l},\ p_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial l},\\&p_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial l}.\end{aligned} \tag{16}$$

Анализ полученных выражений показывает, что декартовые компоненты градиента функции эйконала могут быть выражены через производные функций, входящих в определение лучевых координат. Рассмотрим теперь выражение для оператора Лапласа. Оператор Лапласа от функции эйконала имеет простой вид (см. Приложение А)

$$\vartriangle\Phi=\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial\, logD\left(l\right)}{\partial l}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}&p_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial l},\ p_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial l},\\&p_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial l},\end{aligned} \tag{18}$$

$$D\left(l\right)=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial l}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial l}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Используя вышеприведённые выражения для градиента и оператора Лапласа функции эйконала в лучевых координатах, получим, что уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial A^2}{\partial l}+A^2\frac{\partial}{\partial l}\left\{logD\left(l\right)\right\}=0. \tag{20}$$

Интегрируя уравнение переноса в лучевых координатах, получаем

$$A^2\left(u,v,l\right)=A^2\left(u,v,0\right)D^{-1}\left(l\right)D\left(0\right). \tag{21}$$

Осуществляя несложные преобразования, получим также, что решение уравнения переноса в координатах (u,v,z) имеет вид

$$A^2\left(u,v,z\right)=\frac{A^2\left(u,v,0\right)}{X_uY_v-X_vY_u}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\text{где }X\left(u,v,z\right)=u+\Phi_{0u}\frac{z}{S_z},\\&Y\left(u,v,z\right)=v+\Phi_{0v}\frac{z}{S_z},\ \ S_z=\sqrt{1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Следует отметить, что система координат (u,v,z) не совпадает с лучевой системой координат, однако она более удобна для решения фазовой проблемы, так как уравнения плоскостей, в которых определены распределения освещённостей, имеют простой вид $z=\text{const}$. Используя обозначения

$$A^2\left(u,v,z\right)=E\left(x,y,z\right)\ \ A^2\left(u,v,0\right)=E_0\left(u,v\right), \tag{24}$$

получаем дифференциальное соотношение, связывающее распределения освещённостей в двух плоскостях (см. Приложение Б)

$$E\left(X,Y\right)\left(X_uY_v-X_vY_u\right)=E_0\left(u,v\right), \tag{25}$$

$$x=X\left(u,v,z\right),y=Y\left(u,v,z\right). \tag{26}$$

Если считать функции $E_0(u,v)$ и $E(X,Y)$ известными, то получается дифференциальное уравнение в частных производных для определения функции распределения эйконала в плоскости $z=0$. Это уравнение будем называть модифицированным уравнением Монжа–Ампера. Если известна функция эйконала в некоторой плоскости, легко можно восстановить комплексную амплитуду во всём пространстве.

Во введении было отмечено, что фазовая проблема в оптике тесно связана с обратной задачей фокусировки когерентного излучения. Пусть требуется преобразовать когерентное излучение, имеющее в одной плоскости распределение освещённости $E_0(u,v)$, в пучок света, который в другой плоскости имеет распределение освещённости $E(x,y)$. Так как мы знаем распределение модуля комплексной амплитуды света в двух различных плоскостях, то можно найти распределение фазы (или эйконала) $\Phi_0(u,v)$ во входной плоскости. Для того, чтобы сформировать распределение эйконала, на пути входного пучка помещается рефракционный оптический элемент с криволинейной поверхностью. В случае, если входной пучок имеет плоский волновой фронт и выполняются условия применения параксиального приближения, уравнение этой поверхности принимает простой вид

$$h\left(u,v\right)=\frac{\Phi_0\left(u,v\right)}{(n-1)}, \tag{27}$$

где $h(u,v)$ – аппликата высоты в точке с декартовыми координатами (u,v), n – показатель преломления материала, из которого изготовлен оптический элемент. Требуемое распределение эйконала можно сформировать с помощью гармонического дифракционного оптического элемента с высотой микрорельефа

$$h\left(u,v\right)=(n-1)\,\text{mod}_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Phi_0\left(u,v\right)\right). \tag{28}$$

В случае, если условия параксиального приближения не выполняются, формула для поверхности оптического элемента имеет более сложный вид.

2. Задача Монжа–Канторовича

Рассмотрим пару сопряжённых преобразований

Прямое лучевое преобразование $T:(u,v)\to(x,y)$ имеет вид

$$x = X(u,v),\quad y = Y(u,v). \tag{29}$$

Это преобразование позволяет найти координаты точки (x,y) прихода лучей в плоскости регистрации (фокальной плоскости) по координатам точки выхода (u,v). Прямое преобразование будем обозначать T.

Обратное лучевое преобразование $R:(\xi,\eta)\to(u,v)$ (сопряжённое преобразование) имеет вид

$$u = U(\xi,\eta),\quad v = V(\xi,\eta). \tag{30}$$

Это преобразование позволяет найти координаты точки (u,v) выхода лучей в плоскости, непосредственно прилегающей к оптическому элементу, по координатам точки в области регистрации (фокальной плоскости) (x,y) выхода. Обратное преобразование будем обозначать R.

Можно показать, что для пары преобразований

$$u = U(\xi,\eta),\quad v = V(\xi,\eta), \tag{31}$$

$$\xi = X(u,v),\quad \eta = Y(u,v) \tag{32}$$

выполняется следующее соотношение

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta}-\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)\left(R^{-1}\right)=\left(X_uY_v-X_vY_u\right)^{-1}(R), \tag{33}$$

где

$$u = U\big(X(u,v),Y(u,v)\big),\; v = V\big(X(u,v),Y(u,v)\big), \tag{34}$$

$$\xi = X\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big),\; \eta = Y\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big). \tag{35}$$

Значок R^{-1} означает, что равенство (33) выполняется, если после нахождения производных применить преобразование (35).

Рассмотрим минимизацию функционала

$$S=\int E_0(u,v)\rho(u,v,X,Y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{36}$$

$$\rho(u,v,X,Y)=\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2} \tag{37}$$

при условии

$$\begin{gathered} E_0(u,v)=E\big(X(u,v),Y(u,v)\big)\times \\ \times\big(X_u(u,v)Y_v(u,v)-X_v(u,v)Y_u(u,v)\big). \end{gathered} \tag{38}$$

2.1. Вариация функционала

Рассмотрим условную минимизацию. Построим функционал

$$\begin{gathered} S=\int\Big\{E_0(u,v)\rho(u,v,X,Y)+ \\ +\lambda(u,v)\Big(E(X,Y)\big(X_uY_v-X_vY_u\big)-E_0\Big)\Big\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \end{gathered} \tag{39}$$

$\lambda(u,v)$ – неопределённый множитель Лагранжа.

Получим выражение для вариации этого функционала.

Для этого рассмотрим вариацию функций

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(u,v)&=X(u,v)+\varepsilon\omega_1(u,v), \\ Y_\varepsilon(u,v)&=Y(u,v)+\varepsilon\omega_2(u,v). \end{aligned} \tag{40}$$

Вариация функционала в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} \delta S= \\ =\int E_0(u,v)\left\{\frac{(X-u)\varepsilon\omega_1(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}+\right. \\ \left.+\frac{(Y-v)\varepsilon\omega_2(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}\right\}^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+ \\ +\int\lambda(u,v)\Big(\delta E(X,Y)\big(X_uY_v-X_vY_u\big)+ \\ +E(X,Y)\delta\big(X_uY_v-X_vY_u\big)\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+ \\ +\int\delta\lambda(u,v)\Big(E(X,Y)\big(X_uY_v-X_vY_u\big)-E_0\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{gathered} \tag{41}$$

Условие

$$\frac{\delta S}{\delta\lambda(u,v)}=0 \tag{42}$$

приводит к уравнению

$$E(X,Y)\big(X_uY_v-X_vY_u\big)=E_0. \tag{43}$$

Это показывает, что условие экстремальности функционала приводит к уравнению, которое мы использовали при записи функционала в качестве ограничения.

Вариация $\delta E(X,Y)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \delta E(X,Y)= \\ =\varepsilon\left(\frac{\partial E(X,Y)}{\partial X}\omega_1(u,v)+\frac{\partial E(X,Y)}{\partial Y}\omega_2(u,v)\right). \end{gathered} \tag{44}$$

Вариация $\delta(X_uY_v-X_vY_u)$

$$\begin{gathered} \delta\big(X_uY_v-X_vY_u\big)=\delta X_uY_v+X_u\delta Y_v-\delta X_vY_u-X_v\delta Y_u= \\ =\varepsilon\left(\frac{\omega_{1u}(u,v)Y_v+X_u\omega_{2v}(u,v)-Y_u\omega_{1v}(u,v)-X_v\omega_{2u}(u,v)}{X_uY_v-X_vY_u}\right)\big(X_uY_v-X_vY_u\big). \end{gathered} \tag{45}$$

Запишем полученное выражение в виде (см. Приложения В и Г)

$$\delta\big(X_uY_v-X_vY_u\big)=\left[\varepsilon Tr\Big(\big(DT(u,v)\big)^{-1}D\omega(u,v)\Big)\right]\big(X_uY_v-X_vY_u\big). \tag{46}$$

Здесь введены обозначения

$$\left(\frac{\omega_{1u}(u,v)Y_v + X_u\omega_{2v}(u,v) - Y_u\omega_{1v}(u,v) - X_v\omega_{2u}(u,v)}{X_uY_v - X_vY_u}\right) = \left[Tr\left(\left(DT(u,v)\right)^{-1}D\omega(u,v)\right)\right].$$

Подставляем выражение для вариации якобиана, получим выражение для функционала в следующем виде

$$\begin{gathered}\delta S = \varepsilon\int E_0(u,v)\left\{\frac{(X-u)\omega_1(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}+\right.\\ \left.+\frac{(Y-v)\omega_2(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\ +\int\lambda(u,v)\big(\delta E(X,Y)(X_uY_v-X_vY_u)+\\ +E(X,Y)(X_uY_v-X_vY_u)\varepsilon Tr\left(\left(DT\right)^{-1}D\omega\right)\big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{gathered} \tag{47}$$

Подставляя в эту формулу выражение для вариации функции $E(X, Y)$, получаем выражение для вариации функционала в виде

$$\begin{gathered}\delta S = \varepsilon\int E_0(u,v)\left\{\frac{(X-u)\omega_1(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}+\right.\\ \left.+\frac{(Y-v)\omega_2(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Yt)^2+F^2}}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\ +\varepsilon\int\lambda(u,v)(X_uY_v-X_vY_u)\Big(\big(E_X(X,Y)\omega_1+\\ +E_Y(X,Y)\omega_2\big)+E(X,Y)Tr\left(\left(DT\right)^{-1}D\omega\right)\Big)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{gathered} \tag{48}$$

Далее, учитывая, что якобиан лучевого преобразования записывается в виде

$$\left(X_uY_v - X_vY_u\right) = \frac{E_0(u,v)}{E(X,Y)}, \tag{49}$$

получаем окончательно выражение для вариации функционала в виде

$$\begin{gathered}\delta S = \varepsilon\int E_0(u,v)\left\{\frac{(X-u)\omega_1(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}+\right.\\ \left.+\frac{(Y-v)\omega_2(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2+(v-Y)^2+F^2}}\right\}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\ +\varepsilon\int\lambda(u,v)\left(\frac{E_0(u,v)}{E(X,Y)}\big(E_X(X,Y)\omega_1(u,v)+\right.\\ +\big(E_Y(X,Y)\omega_2(u,v)\big)+\\ \left.+E_0(u,v)Tr\left(\left(DT\right)^{-1}D\omega\right)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{gathered} \tag{50}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{gathered}I_1 = \int\lambda(u,v)\times\\ \times\left(\frac{E_0(u,v)}{E(X,Y)}\big(E_X(X,Y)\omega_1(u,v)+\right.\\ +E_Y(X,Y)\omega_2(u,v)\big)+\\ \left.+E_0(u,v)Tr\left(\left(DT\right)^{-1}D\omega\right)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{gathered} \tag{51}$$

При замене переменных

$$u = U(\xi,\eta) \quad v = V(\xi,\eta) \tag{52}$$

выражение для $(DT)^{-1}(R)D\omega(R)$ преобразуется следующим образом

$$\begin{gathered}\left(DT\right)^{-1}(R)D\omega(R) =\\ =\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\[2mm] \dfrac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{53}$$

$$Tr\left(\left(DT\right)^{-1}D\omega\right) = \frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}.$$

Использованы следующие обозначения

$$\Omega_1(\xi,\eta) = \omega_1\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big), \tag{54}$$

$$\Omega_2(\xi,\eta) = \omega_2\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big). \tag{55}$$

Сделаем в нем замену переменных

$$\begin{gathered}I_1 = \int\lambda\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big)\Big(\big(E_\xi(\xi,\eta)\Omega_1(\xi,\eta)+\\ +E_\eta(\xi,\eta)\Omega_2(\xi,\eta)\big)+E(\xi,\eta)\times\\ \times\left(\frac{al\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\Big)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\\ =\int\Lambda(\xi,\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\Omega_1(\xi,\eta)E(\xi,\eta)\big)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\big(\Omega_2(\xi,\eta)E(\xi,\eta)\big)\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\\ =\int\Lambda(\xi,\eta)\left(\int\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\Omega_1(\xi,\eta)E(\xi,\eta)\big)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta+\\ +\int\Lambda(\xi,\eta)\left(\int\frac{\partial}{\partial\eta}\big(\Omega_2(\xi,\eta)E(\xi,\eta)\big)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi,\end{gathered} \tag{56}$$

где введено следующее обозначение

$$\Lambda(\xi,\eta) = \lambda\big(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\big). \tag{57}$$

Далее интегрируем по частям

$$I_1 == \left(\int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda(\xi,\eta) \Omega_1(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \right) \mathrm{d}\xi - \right.$$
$$\left. - \int \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} \Omega_2(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\eta +$$
$$+ \left(\int \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Lambda(\xi,\eta) \Omega_2(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \right) \mathrm{d}\eta - \right.$$
$$\left. - \int \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} \Omega_2(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi. \quad (58)$$

Первый интеграл и третий интеграл берутся элементарно и, учитывая факт, что на границе $E(\xi,\eta) \to 0$, окончательно получаем

$$I_1 = - \int \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} \Omega_1(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta -$$
$$- \int \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} \Omega_2(\xi,\eta) E(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}a. \quad (59)$$

В результате выражение для вариации имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varepsilon} = \int E_0(u,v) \left\{ \frac{(X-u)\omega_1(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2 + (v-Y)^2 + F^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(Y-v)\omega_2(u,v)}{\sqrt{(u-X)^2 + (v-Y)^2 + F^2}} \right\} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v -$$
$$- \int \left(\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} \Omega_1(\xi,\eta) + \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} \Omega_2(\xi,\eta) \right) \times$$
$$\times E(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = 0. \quad (60)$$

Сделаем замену переменных в первом интеграле

$$\int \left\{ E(u,v) \left\{ \frac{\xi - U((\xi,\eta))}{L(\xi,\eta)} \Omega_1(\xi,\eta) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\eta - V((\xi,\eta))}{L(\xi,\eta)} \Omega_2(\xi,\eta) \right\} \right\} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta -$$
$$- \int \left(\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} \Omega_1(\xi,\eta) + \frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} \Omega_2(\xi,\eta) \right) \times$$
$$\times E(\xi,\eta) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = 0. \quad (61)$$

В результате получаем, что условие экстремума функционала приводит к условиям

$$\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi - U((\xi,\eta))}{L(\xi,\eta)},$$
$$\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta - V((\xi,\eta))}{L(\xi,a)}. \quad (62)$$

Дополнительное условие

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda(u,v)} = 0 \quad (63)$$

приводит к уравнению

$$E(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u) = E_0. \quad (64)$$

Следует отметить, что это уравнение представляет ограничение, которое использовалось при записи исходного функционала.

2.2.Обсуждение полученных формул

Недостаток полученных выражений состоит в том, что в уравнения (62) входят функции $U(\xi,\eta)$ и $V(\xi,\eta)$, которые описывают преобразование точек, расположенных в области фокусировки, в точки, расположенные в области оптического элемента. Уравнение (64) содержит функции $X(u,v)$, $Y(u,v)$, описывающие преобразование от точек, расположенных в области оптического элемента, в точки, расположенные в области фокусировки. Используя замену координат

$$\xi = X(u,v), \quad \eta = Y(u,v),$$

перепишем уравнение (64) в виде

$$E(\xi,\eta) - E_0(U(\xi,\eta), V(\xi,\eta))(U_\xi V_\eta - U_\eta V_\xi) = 0.$$

Теперь во все полученные уравнения входят функции $U(\xi,\eta)$ и $V(\xi,\eta)$, описывающие связь между точками фокальной плоскости (плоскости $z=F$) и точками в плоскости, в которой расположен оптический элемент (плоскости $z=0$). В этом случае функцию $\Lambda(\xi,\eta)$ можно интерпретировать как функцию эйконала в плоскости фокусировки (плоскости $z=F$).

Из решения уравнения эйконала можно показать, что связь между эйконалом в плоскости $z=0$ и эйконалом в плоскости $z=F$ имеет вид

$$\Lambda(\xi,\eta) = \Phi_0(u,v) + L(\xi,\eta)$$

при условии, что точки в плоскости $z=0$ и плоскости $z=F$ связаны соотношениями

$$u = U(\xi,\eta), \quad v = V(\xi,\eta).$$

Нетрудно показать эквивалентность системы уравнений, записанной в плоскости $z=0$,

$$\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi - U((\xi,\eta))}{L(\xi,\eta)},$$
$$\frac{\partial \Lambda(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta - V((\xi,\eta))}{L(\xi,a)},$$
$$E(\xi,\eta) - E_0(U(\xi,\eta), V(\xi,\eta))(U_\xi V_\eta - U_\eta V_\xi) = 0$$

и системы уравнений, записанной относительно функций и переменных в плоскости $z=F$,

$$\frac{\partial \Phi_0(u,v)}{\partial u} = \frac{X(u,v) - u}{L_1(u,v)},$$
$$\frac{\partial \Phi_0(u,v)}{\partial v} = \frac{Y(u,v) - v}{L_1(u,v)},$$
$$E(X,Y)(X_u Y_v - X_v Y_u) - E_0(u,v) = 0,$$

где $L_1(u,v) = \sqrt{(X(u,v) - u)^2 + (Y(u,v) - v)^2 + F^2}$.

Минимизируя функционал каким-либо известным методом, мы находим функции $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $\lambda(u,v)$. Так как функцию $\Lambda(\xi,\eta)$ можно интерпретировать как функцию эйконала в плоскости $z=F$, то функцию $\lambda(u,v)$ можно интерпретировать как функцию эйконала в плоскости $z=F$, записанную в координатах (u,v). Связь функции $\lambda(u,v)$ с эйконалом в плоскости $z=0$ имеет вид

$$\lambda(u,v)=\Phi_0(u,v)+L_1(u,v).$$

В результате показано, что непосредственная минимизация функционала эквивалентна решению задачи восстановления фазы по распределениям интенсивности в двух различных плоскостях.

Заключение

Метод расчёта, предложенный в настоящей работе, в дальнейшем будет использован для расчёта дифракционных оптических элементов (ДОЭ), которые предназначены для фокусировки в плоские области, имеющие сложную форму. В дальнейшем необходимо усовершенствовать метод восстановления эйкональной функции ДОЭ по известному лучевому соответствию. Для улучшения метода восстановления эйкональной функции могут быть использованы бикубические сплайны. Возможно использование предлагаемых ДОЭ не только в лазерных технологических установках, но и для подсветки местности в ночное время при дистанционном зондировании Земли с низколетящего беспилотного летательного аппарата.

Фазовая проблема в рамках геометрической оптики рассмотрена только для уравнения Гельмгольца. В дальнейшем предполагается получить вариационную постановку для решения фазовой проблемы для уравнения Шредингера и уравнения Клейна–Гордона.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00326) (вычисление вариации в задаче Монжа-Канторовича о перемещении масс во 2 разделе, Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (расчёт Лапласиана и получение уравнения Монжа–Ампера в Приложениях А, Б – соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26), а также грантов РФФИ (№17-47-630164, 16-29-09528) (получение основных уравнений в разделе 1, описывающих фазовую проблему).

Литература

1. **Gerchberg, R.** Super-resolution through error energy reduction / R. Gerchberg // Optica Acta. – 1974. – Vol. 21. – P. 709-720. – DOI: 10.1080/713818946.
2. **Papoulis, A.** A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation / A. Papoulis // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1975. – Vol. 22, Issue 9. – P. 735-742. – DOI: 10.1109/TCS.1975.1084118.
3. **Sheppard, D.G.** Iterative multiframe superresolution algorithms for atmospheric-turbulence-degraded imagery / D.G. Sheppard, B.R. Hunt, M.W. Marcellin // Journal of the Optical Society of America A. – 1998. – Vol. 15, Issue 4. – P. 978-992. – DOI: 10.1364/JOSAA.15.000978.
4. **Soifer, V.** Iterative methods for diffractive optical elements computation / V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. – London: Taylor & Francis Ltd., 1997. – 244 p. – ISBN: 0-7484-0634-4.
5. **Гончарский, А.В.** Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую / А.В. Гончарский, В.А. Данилов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, В.В. Степанов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 3. – С. 605-608.
6. **Doskolovich, L.L.** A method of designing diffractive optical elements focusing into plane areas / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, Issue 7. – P. 1423-1433. – DOI: 10.1080/09500349608232815.
7. **Soifer, V.A.** Methods for computer design of diffractive optical elements / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, N.L. Kazanskiy, L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina, V.S. Pavelyev, R.V. Skidanov, A.V. Volkov, D.L. Golovashkin, V.S. Solovyev, G.V. Usplenyev, ed. by V.A. Soifer. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 784 p. – ISBN: 978-0-471-09533-0.
8. **Doskolovich, L.L.** Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // Optical Engineering. – 2013. – Vol. 52, Issue 9. – 091717. – DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.
9. **Doskolovich, L.L.** Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions / L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, M.A. Moiseev, D.A. Bykov, N.L. Kazanskiy // Optics Express. – 2016. – Vol. 24, Issue 10. – P. 10962-10971. – DOI: 10.1364/OE.24.010962.
10. **Досколович, Л.Л.** Расчёт эйконала светового поля для фокусировки в набор точек / Л.Л. Досколович, М.А. Моисеев, Е.В. Бызов, С.В. Кравченко // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 443-448.
11. **Канторович, Л.В.** О перемещении масс / Л.В. Канторович // Доклады Академии Наук СССР. – 1942. – Т. XXXVII, № 7-8. – С. 227-229.
12. **Богачёв, В.И.,** Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы / В.И. Богачёв, А.В. Колесников // Успехи математических наук. – 2012. – Т. 67, Вып. 5(407). – С. 3-110. – DOI: 10.4213/rm9490.
13. **Glimm, T.** Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – Vol. 117, Issue 3. – P. 4096-4108. – DOI: 10.1023/A:1024856201493.
14. **Sulman, M.M.** An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampere equation // M.M. Sulman, J.F. Williams, R.D. Russell // Applied Numerical Mathematics. – 2011. – Vol. 61, Issue 3. – P. 298-307. – DOI: 10.1016/j.apnum.2010.10.006.
15. **Кравцов, А.Ю.** Геометрическая оптика неоднородных сред / А.Ю. Кравцов, Ю.И. Орлов. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
16. **Кошляков, Н.С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Приложения

А. Расчёт лапласиана

Связь лучевых координат с декартовыми имеет вид

$$x = u + \frac{\partial \Phi_0}{\partial u} l \quad y = v + \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} l \quad z = S_z l \,. \tag{A.1}$$

Эти уравнения можно разрешить

$$u = U\left(x, y, z\right),\ v = V\left(x, y, z\right),\ l = L\left(x, y, z\right). \tag{A.2}$$

Решение уравнения эйконала имеет вид

$$\begin{aligned} &\Phi\left(x, y, z\right) = \\ &= \Psi\left(U\left(x, y, z\right), V\left(x, y, z\right), L\left(x, y, z\right)\right) = \\ &= \Phi_0\left(U\left(x, y, z\right), V\left(x, y, z\right)\right) + L\left(x, y, z\right). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Выражения для производных в лучевых координатах через производные в декартовых координатах имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial l} \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial l} \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Обратная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\det\right)^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

$$\det = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Выражения для величин A_{ij} $(i = 1,3;\ j = 1,3)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &A_{11} = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad A_{12} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ &A_{13} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial v}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} &A_{21} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad A_{22} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ &A_{23} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial v}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} &A_{31} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad A_{32} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ &A_{33} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Выражения для производных в декартовых координатах через производные в лучевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{A_{11}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{A_{21}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{A_{31}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial l}, \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{A_{12}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{A_{22}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{A_{32}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial l}, \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{A_{13}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{A_{23}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{A_{33}}{\left(det\right)}\frac{\partial \Phi}{\partial l}, \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} &\left(det\right) = S_z^{-1}\left\{2l\Phi_{uv}\Phi_v\Phi_u + S_z^2 - \right. \\ &-\left(\Phi_{vv}\Phi_u^2 + \Phi_{uu}\Phi_v^2\right)l + \left(\Phi_{uu} + \Phi_{vv}\right)l - \\ &\left. -\Phi_{uv}^2 l^2 + \Phi_{vv}\Phi_{uu} l^2\right\}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

После упрощения выражения для производных функции эйконала принимают вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_{0u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_{0v}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sqrt{1 - \Phi_{0u}^2 - \Phi_{0v}^2}. \tag{A.15}$$

Используя эти выражения, найдём выражения для дивергенции векторного поля. Дивергенция векторного поля в декартовых координатах имеет вид

$$\operatorname{div}\left(p\right) = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{A_{11}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_x}{\partial u} - \frac{A_{21}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_x}{\partial v} + \frac{A_{31}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_x}{\partial l}, \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} = -\frac{A_{12}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_y}{\partial u} + \frac{A_{22}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_y}{\partial v} - \frac{A_{32}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_y}{\partial l}, \tag{A.17}$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{A_{13}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_z}{\partial u} - \frac{A_{23}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_z}{\partial v} + \frac{A_{33}}{\left(det\right)}\frac{\partial p_z}{\partial l}, \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{1}{(det)}\left(\begin{Vmatrix}\frac{\partial p_x}{\partial u} & \frac{\partial p_x}{\partial v} & \frac{\partial p_x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial p_y}{\partial u} & \frac{\partial p_y}{\partial v} & \frac{\partial p_y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial p_z}{\partial u} & \frac{\partial p_z}{\partial v} & \frac{\partial p_z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right), \tag{A.19}$$

$$p_x=\frac{\partial x}{\partial l},\ p_y=\frac{\partial y}{\partial l},\ p_z=\frac{\partial z}{\partial l}.$$

Пусть

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{1}{(det)}\left(\begin{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial l} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{(det)}\left(\begin{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right)= \tag{A.20}$$

$$=\frac{1}{(det)}\frac{\partial}{\partial l}\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}=\frac{\partial}{\partial l}\left\{log\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right\}.$$

ИТОГО

$$\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial l}\left\{log\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right\}. \tag{A.21}$$

В случае

$$p_x=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\ p_y=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ p_z=\frac{\partial z}{\partial l} \tag{A.22}$$

получаем выражение для лапласиана функции эйконала

$$\Delta\Phi=\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial l}\left\{log\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\right\}. \tag{A.23}$$

Б. Получение уравнения Монжа–Ампера

$$A^2(u,v,l)=A^2(u,v,0)\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(0) & \frac{\partial x}{\partial v}(0) & \frac{\partial x}{\partial l}(0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(0) & \frac{\partial y}{\partial v}(0) & \frac{\partial y}{\partial l}(0)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(0) & \frac{\partial z}{\partial v}(0) & \frac{\partial z}{\partial l}(0)\end{Vmatrix}^{-1}. \tag{Б.1}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$A^2(u,v,l)=A^2(u,v,0)\left(\left[r_u\times r_v\right]r_l\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\left[r_u(0)\times r_v(0)\right]r_l(0)\right), \tag{Б.2}$$

$$x=u+\frac{\partial\Phi_0}{\partial u}l,\quad y=v+\frac{\partial\Phi_0}{\partial v}l,$$
$$z=S_z l,\quad S_z=\sqrt{1-\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial u}\right)^2}, \tag{Б.3}$$

$$\left(\left[r_u\times r_v\right]r_l\right)=\left(y_u z_v-z_u y_v\right)x_l+$$
$$+\left(z_u x_v-x_u z_v\right)y_l+\left(x_u y_v-y_u x_v\right)z_l. \tag{Б.4}$$

Рассмотрим получение выражения $X_uY_v - X_vY_u$,

$$X = u + \frac{\Phi_{0u}}{\sqrt{1-\Phi_u^2-\Phi_v^2}} z, \quad Y = v + \frac{\Phi_{0v}}{\sqrt{1-\Phi_u^2-\Phi_v^2}} z. \tag{Б.5}$$

В результате

$$X_u = 1 + \left[\Phi_{0uu}\sqrt{1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2} - \Phi_{0u} z_u l^{-1}\right] \times \left(1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2\right)^{-1} z, \tag{Б.6}$$

$$Y_v = 1 + \left[\Phi_{0vv}\sqrt{1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2} - \Phi_{0v} z_v l^{-1}\right] \times \left(1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2\right)^{-1} z, \tag{Б.7}$$

$$X_v = \left[\Phi_{0uv}\sqrt{1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2} - \Phi_{0u} z_v l^{-1}\right] \times \left(1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2\right)^{-1} z, \tag{Б.8}$$

$$Y_u = \left[\Phi_{0uv}\sqrt{1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2} + \Phi_{0v} z_u l^{-1}\right] \times \left(1-\Phi_{0u}^2-\Phi_{0v}^2\right)^{-1} z, \tag{Б.9}$$

где

$$-z_u S_z l^{-1} = \left(\Phi_{0u}\Phi_{0uu} + \Phi_{0v}\Phi_{0vu}\right), \quad -z_v S_z l^{-1} = \left(\Phi_{0u}\Phi_{0uv} + \Phi_{0v}\Phi_{0vv}\right). \tag{Б.10}$$

После элементарных преобразований

$$X_u = \left[x_u - x_l z_u z_l^{-1}\right], \tag{Б.11}$$

$$Y_v = \left[y_v - y_l z_v z_l^{-1}\right], \tag{Б.12}$$

$$X_v = \left[x_v - x_l z_v z_l^{-1}\right], \tag{Б.13}$$

$$Y_u = \left[y_u - y_l z_u z_l^{-1}\right], \tag{Б.14}$$

$$X_uY_v - X_vY_u = = \left\{\left(x_u y_v - x_v y_u\right) z_l + \left(z_v y_u - y_v z_u\right) x_l + + \left(x_v z_u - x_u z_v\right) y_l\right\} S_z^{-1}. \tag{Б.15}$$

ИТОГО

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{matrix} \right\| S_z^{-1} = X_uY_v - X_vY_u,$$

$$S_z = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u}(0) & \frac{\partial x}{\partial v}(0) & \frac{\partial x}{\partial l}(0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(0) & \frac{\partial y}{\partial v}(0) & \frac{\partial y}{\partial l}(0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(0) & \frac{\partial z}{\partial v}(0) & \frac{\partial z}{\partial l}(0) \end{matrix} \right\|, \tag{Б.16}$$

$$A^2(u,v,l) = A^2(u,v,0) \times \times \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial l} \end{matrix} \right\|^{-1} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u}(0) & \frac{\partial x}{\partial v}(0) & \frac{\partial x}{\partial l}(0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(0) & \frac{\partial y}{\partial v}(0) & \frac{\partial y}{\partial l}(0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(0) & \frac{\partial z}{\partial v}(0) & \frac{\partial z}{\partial l}(0) \end{matrix} \right\|, \tag{Б.17}$$

$$A^2(u,v,l) = \frac{A^2(u,v,0)}{X_uY_v - X_vY_u}.$$

В. Выражение для производных

Рассмотрим систему линейных уравнений для определения производных

$$\frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial U}\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi} + + \frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial V}\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\xi} = + \frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial\xi}, \tag{В.1}$$

$$\frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial U}\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta} + + \frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial V}\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\eta} = + \frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial\eta}. \tag{В.2}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\xi} \\ \frac{\partial U}{\partial\eta} & \frac{\partial V}{\partial\eta} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta} & \frac{\partial V}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi} \\ \frac{\partial U}{\partial\eta} & \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\frac{\partial U}{\partial\eta}. \tag{В.3}$$

Итого

$$\frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial U} = \frac{\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}}{\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}},$$

$$\frac{\partial\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial V} = \frac{\frac{\partial\omega_1}{\eta}\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\frac{\partial U}{\partial\eta}}{\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}}. \tag{В.4}$$

По аналогии

$$\frac{\partial\omega_2\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial U}=\frac{\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\eta}-\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\eta}\dfrac{\partial V}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial U}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\eta}-\dfrac{\partial U}{\partial\eta}\dfrac{\partial V}{\partial\xi}},$$
$$\frac{\partial\omega_2\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)}{\partial V}=\frac{\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\eta}\dfrac{\partial U}{\partial\xi}-\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\xi}\dfrac{\partial U}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial U}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\eta}-\dfrac{\partial U}{\partial\eta}\dfrac{\partial V}{\partial\xi}}. \tag{В.5}$$

Г. Вспомогательные преобразования

Г.1. Формулы для прямого преобразования

$$DT(u,v)=\begin{pmatrix}X_u & X_v\\ Y_u & Y_v\end{pmatrix},$$
$$D\omega(u,v)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}, \tag{Г.1}$$

$$(DT)^{-1}(u,v)=\begin{pmatrix}X_u & X_v\\ Y_u & Y_v\end{pmatrix}^{-1}=\left(X_uY_v-X_vY_u\right)^{-1}\begin{pmatrix}Y_v & -X_v\\ -Y_u & X_u\end{pmatrix}, \tag{Г.2}$$

$$(DT)^{-1}(u,v)D\omega(u,v)=\begin{pmatrix}X_u & X_v\\ Y_u & Y_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}=\left(X_uY_v-X_vY_u\right)^{-1}\begin{pmatrix}Y_v & -X_v\\ -Y_u & X_u\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}=\left(X_uY_v-X_vY_u\right)^{-1}\begin{pmatrix}Y_v\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial u}-X_v\dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial u} & Y_v\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial v}-X_v\dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial v}\\ -Y_u\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial u}+X_u\dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial u} & -Y_u\dfrac{\partial\omega_1(u,v)}{\partial v}+X_u\dfrac{\partial\omega_2(u,v)}{\partial v}\end{pmatrix}. \tag{Г.3}$$
$$\left[Tr\left(\left(DT(u,v)\right)^{-1}D\omega(u,v)\right)\right]=\left(\frac{\omega_{1u}(u,v)Y_v+X_u\omega_{2v}(u,v)-Y_u\omega_{1v}(u,v)-X_v\omega_{2u}(u,v)}{X_uY_v-X_vY_u}\right).$$

Г.2. Преобразование некоторых выражений при замене координат

Далее рассмотрим обратное преобразование $R:(\xi,\eta)\to(u,v)$

$$u=U(\xi,\eta)\ v=V(\xi,\eta), \tag{Г.4}$$

такое, что

$$X\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)=\xi;\ V\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)=\eta, \tag{Г.5}$$

$$DT(R)=\begin{pmatrix}X_u & X_v\\ Y_u & Y_v\end{pmatrix}\left(\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right)\right)=\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta}-\frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^{-1}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\eta}-\dfrac{\partial X}{\partial\eta}\dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial X}{\partial\eta}\dfrac{\partial U}{\partial\xi}-\dfrac{\partial X}{\partial\xi}\dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial\xi}\dfrac{\partial V}{\partial\eta}-\dfrac{\partial Y}{\partial\eta}\dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial Y}{\partial\eta}\dfrac{\partial U}{\partial\xi}-\dfrac{\partial Y}{\partial\xi}\dfrac{\partial U}{\partial\eta}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta}-\frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^{-1}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial\eta} & \dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial U}{\partial\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial\xi} & \dfrac{\partial X}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial Y}{\partial\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial\xi} & \dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}^{-1}. \tag{Г.6}$$

$$(DT)^{-1}(R)=$$
$$=\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial\xi} & \dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial\xi} & \dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}=DR. \tag{Г.7}$$

$$D\omega(R)=$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial\xi} & \dfrac{\partial U}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\xi} & \dfrac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix}. \tag{Г.8}$$

$$\Omega_1(\xi,\eta)=\omega_1\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right). \tag{Г.9}$$

$$\Omega_2(\xi,\eta)=\omega_2\left(U(\xi,\eta),V(\xi,\eta)\right). \tag{Г.10}$$

$$\left(DT\right)^{-1}\left(R\right)D\omega\left(R\right)=DRD\omega\left(R\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial U}{\partial\eta}\\ \frac{\partial V}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial U}{\partial\eta}\\ \frac{\partial V}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix}= \tag{Г.11}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial U}{\partial\eta}\\ \frac{\partial V}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial\xi} & \frac{\partial U}{\partial\eta}\\ \frac{\partial V}{\partial\xi} & \frac{\partial V}{\partial\eta}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_1(\xi,\eta)}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} & \frac{\partial\Omega_2(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{pmatrix}.$$

Выражение для якобиана обратного преобразования

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial V}{\partial\eta}-\frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{\partial V}{\partial\xi}=\left(X_uY_v-X_vY_u\right)^{-1}\left(R\right).$$

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Казанский Николай Львович** см. стр. 571 этого выпуска.

Харитонов Сергей Иванович, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры наноинженерии, ведущий научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: *prognoz2007@gmail.com* .

Козлова Ирина Николаевна, 1984 года рождения. В 2007 году с отличием окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (СГАУ, ныне – Самарский университет) по специальности «Конструирование и технология радиоэлектронных средств». Кандидат технических наук (2013 г.), доцент кафедры наноинженерии Самарского университета. Область научных интересов: обеспечение надежности микро- и нанообъектов, проектирование устройств наноэлектроники и нанофотоники. В списке научных работ И.Н. Козловой 15 статей, 2 патента. E-mail: *inkozlova@ssau.ru* .

Моисеев Михаил Александрович, 1986 года рождения, в 2008 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности 010600 «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2011 г.), работает научным сотрудником в Лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Является членом международного научного общества SPIE. М.А. Моисеев – специалист в области решения обратных задач геометрической оптики. В списке научных работ М.А. Моисеева 35 статей и 7 авторских свидетельств. E-mail: *mikhail@smr.ru* .

ГРНТИ: 29.31.29.

Поступила в редакцию 27 июня 2018 г. Окончательный вариант – 28 июня 2018 г.

THE CONNECTION BETWEEN THE PHASE PROBLEM IN OPTICS, FOCUSING OF RADIATION, AND THE MONGE-KANTOROVICH PROBLEM

N.L. Kazanskiy [1,2], S.I. Kharitonov [2], I.N. Kozlova [2], M.A. Moiseev [1]

[1] IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardeyskaya str. 151, 443001, Samara, Russia;

[2] Samara National Research University, Moskovskoye shosse 34, Samara, 443086, Samara, Russia

Abstract

We discuss the use of variational principles for solving the phase problem in optics. In this paper, we consider the connection between four fundamental problems: the phase problem in optics, the inverse problem of focusing coherent radiation, the Monge–Kantorovich optimal mass transport problem, and the variational methods for solving the equation of a modified Monge–Ampere equation. It is shown that the solution of the phase problem in optics within the framework of the asymptotic approach is closely related to the solution of the problem of optimal mass transport with a nonquadratic cost function.

Keywords: optimal mass transport, phase problem in optics, Monge–Ampere equation.

Citation: Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Kozlova IN, Moiseev MA. The connection between the phase problem in optics, focusing of radiation, and the Monge–Kantorovich problem. Computer Optics 2018; 42(4): 574-587. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-574-587.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 18-19-00326) (calculation of the variation in the Monge–Kantorovich mass transportation problem, Section 2), by the RF Ministry of Science and Higher Education within the State assignment to the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS (calculation of the Laplacian and derivation of the Monge–Ampere equation, Appendices A and B – Agreement No 007-ГЗ/Ч3363/26), and by Russian Foundation for Basic Research (Projects Nos. 17-47-630164, 16-29-09528) (derivation of the basic equations describing the phase problem, Section 1).

References

[1] Gerchberg R. Super-resolution through error energy reduction. Optica Acta 1974; 21: 709-720. DOI: 10.1080/713818946.

[2] Papoulis A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. IEEE Transactions on Circuits and Systems 1975; 22(9): 735-742. DOI: 10.1109/TCS.1975.1084118.

[3] Sheppard David G., Hunt Bobby R., Marcellin Michael W. Iterative multiframe superresolution algorithms for atmospheric-turbulence-degraded imagery. J Opt Soc Am A 1998; 15(4): 978-992. DOI: 10.1364/JOSAA.15.000978.

[4] Soifer V, Kotlyar V, Doskolovich L. Iterative methods for diffractive optical elements computation. London: Taylor & Francis Ltd; 1997. ISBN: 0-7484-0634-4.

[5] Goncharsky AV, Danilov VA, Popov VV, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA, Stepanov VV. Solution of the inverse problem of laser radiation focusing in an certain curve [In Russian]. Doklady of the USSR Academy of Sciences 1983; 273(3): 605-608.

[6] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. A method of designing diffractive optical elements focusing into plane areas. J Mod Opt 1996; 43(7): 1423-1433. DOI: 10.1080/09500349608232815.

[7] Soifer VA, ed. Methods for computer design of diffractive optical elements. New York: John Wiley & Sons, Inc; 2002. ISBN: 978-0-471-09533-0.

[8] Doskolovich LL, Dmitriev AYu, Kharitonov SI. Analytic design of optical elements generating a line focus. Opt Eng 2013; 52(9): 091717. DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.

[9] Doskolovich LL, Bezus EA, Moiseev MA, Bykov DA, Kazanskiy NL. Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions. Opt Express 2016; 24(10): 10962-10971. DOI: 10.1364/OE.24.010962.

[10] Doskolovich LL, Moiseev MA, Byzov EV, Kravchenko SV. Computation of light field eikonal to focus into a set of points [In Russian]. Computer Optics 2014; 38(3): 443-448.

[11] Kantorovich LV. On the translocation of masses. J Math Sci 2006, 133(4): 1381-1382. DOI: 10.1007/s10958-006-0049-2.

[12] Bogachev VI, Kolesnikov AV. The Monge–Kantorovich problem: achievements, connections, and perspectives. Russian Mathematical Surveys 2012; 67(5): 785-890. DOI: 10.1070/RM2012v067n05ABEH004808.

[13] Glimm T, Oliker V. Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem. J Math Sci 2003; 117(3): 4096-4108. DOI: 10.1023/A:1024856201493.

[14] Sulman MM, Williams JF, Russell RD. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampere equation. Applied Numerical Mathematics 2011; 61(3): 298-307. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.10.006.

[15] Kravtsov AYu, Orlov YuI. Geometrical optics of inhomogeneous media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1990. ISBN: 978-3-642-84033-3.

[16] Koshlyakov NS, Smirnov MM, Gliner EB. Equations of mathematical physics in partial derivatives [In Russian] Moscow: "Vysshaya Shkola" Publisher; 1970.

Author's information

The information about author **Nikolay Lvovich Kazanskiy** you can find on page 573 of this issue.

Sergey Ivanovich Kharitonov (b. 1961) leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University (presently, Samara National Research University). 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of S.I. Kharitonov scientific papers includes87 articles, 5 patents. E-mail: prognoz2007@gmail.com .

Irina Nikolaevna Kozlova (b. 1984) graduated with honors (2007) from Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (presently Samara National Research University), majoring in Design and Technology of Radio-electronic Devices. She received her Candidate in Technical Sciences (2013) degrees from Povolzhsky State University of Telecommunications and Informatics. She is holding a position assistant professor at nanoengineering department.

Current research interests include reliability of micro- and nanoobjects, design of nanoelectronics and nanophotonics elements. She is co-author of 15 scientific papers, 2 patents. E-mail: inkozlova@ssau.ru .

Mikhail Alexandrovich Moiseev (b. 1986) graduated with honors (2008) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. He received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2011) from Samara State Aerospace University. He is a researcher at the Diffraction Optics laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. He is a SPIE-member. He is co-author of 23 scientific papers and seven inventions and patents. His current research interests include nonimaging optics. http://www.ipsi.smr.ru/staff/MoiseevM.htm.

Received June 27, 2018. The final version – June 28, 2018.