ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С БАЗИСАМИ, ПОРОЖДЕННЫМИ САМОПОДОБНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

В.М. Чернов [1, 2]

[1] *ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,*
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

[2] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,*
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе вводятся и исследуются новые базисы дискретных ортогональных преобразований, ассоциированные с некоторыми рекурсивными процессами и обладающие свойством самоподобия. Доказываются достаточные условия ортогональности системы базисных функций. Для преобразований с введенными базисами синтезируются быстрые алгоритмы преобразований. Обсуждается связь рассматриваемых базисов с аналитическими свойствами производящих рядов Дирихле.

Ключевые слова: дискретные ортогональные преобразования, самоподобие, производящие ряды Дирихле.

Цитирование: **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования с базисами, порожденными самоподобными последовательностями / В.М. Чернов // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 904-911. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-904-911.

Введение

В работе исследуются две задачи разной степени популярности, имеющие в разной степени прикладной характер.

Первая задача уже достаточно традиционна для обработки сигналов – синтез новых базисов дискретных ортогональных преобразований, адекватных по своим свойствам тем или иным классам обрабатываемых сигналов с известной или постулируемой априорной информацией, с наличием быстрых алгоритмов их вычисления и учитывающих тенденции развития в постановке прикладных задач и используемых программно-аппаратных средств их решения.

Предметом исследования в данной работе является разработка методов переноса теории дискретных ортогональных преобразований (ДОП) со случая периодических базисов таких преобразований на случай базисных функций, связанных с последовательностями, обладающими свойствами «самоподобия».

Следует заметить, что «универсального» формального определения самоподобия конечных (дискретных) множеств, по всей видимости, не существует. Авторы многочисленных работ по фрактальной теории и её приложениям либо объявляют самоподобными объекты, получаемые в результате *потенциальной* реализации некоторого *потенциально бесконечного* рекурсивного процесса, либо, полагая, что в распоряжении исследователя имеется *актуально бесконечный* объект (множество), решают реальные прикладные задачи, неявно перенося свойства инфинитного предельного множества на конечные подмножества, ограниченные спецификой этой прикладной задачи. Степень корректности такого переноса определяется в том числе и неформализуемым аргументом – субъективной уверенностью исследователя.

В связи с этим возникает вторая задача, в значительно меньшей степени востребованная приложениями, в которых, в силу конечности множеств параметров, характеризующих задачу, формальные, но инфинитные методы уступают место эвристическим соображениям. Тем не менее, разработка таких аналитических инфинитных методов представляется небесполезной для приложений проблематикой хотя бы для формирования субъективного убеждения в правильности выбранной стратегии решения той или иной прикладной задачи.

В данной работе исследуется связь аналитических свойств производящих рядов Дирихле, выраженных в терминах асипмтотики чезаровских средних этих рядов, со свойством «самоподобия» (непериодических) последовательностей, генерирующих новые базисы ДОП.

1. Основные идеи

И в теоретической математике, и в ряде прикладных областей науки, имеющих предметом или средством исследований числовые последовательности $\{a(n)\}$, широко применяется метод производящих функций. Наиболее часто в прикладных науках в качестве производящих функций используются степенные ряды

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^{n} \qquad (1)$$

(например, z-преобразование в информатике) и (много реже) ординарные ряды Дирихле

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} ;\ \operatorname{Re} s>\sigma_{0}. \qquad (2)$$

Классическая теорема Абеля позволяет судить по информации о коэффициентах степенного ряда (сходимость) об аналитических свойствах функции $F(z)$ (подобные теоремы часто называют теоремами абелевого типа). Утверждения, позволяющие по аналитическим свойствам функций $F(z), \Phi(s)$ (или их аналитических продолжений) судить о свойствах последовательности $\{a(n)\}$, называют тауберовыми теоремами [1].

Следует отметить, что один из наиболее мощных математических аппаратов теории функций комплексного переменного – теория аналитического продолжения позволяет получить часто весьма слабую «тауберову» информацию из известных аналитических свойств ряда (1).

Действительно, из теоремы Даффина–Шеффера [2] следует, что в случае конечности множества значений $\{a(n)\}$ ряд (1) либо не продолжается аналитически за пределы круга сходимости, либо является рациональной функцией с конечным числом полюсов в случае периодической последовательности $\{a(n)\}$. Иными словами, теория аналитического продолжения, применительно к *степенному* производящему ряду (1) с конечнозначной последовательностью $\{a(n)\}$ позволяет отличать (с понятными оговорками относительно реалистичности «тестирующего» метода) только периодические последовательности от непериодических.

Производящие *ряды Дирихле* (2) с периодическими последовательностями коэффициентов $\{a(n)\}$, безусловно, мероморфно продолжаются на всю комплексную плоскость, но могут продолжаться и в непериодическом случае.

Отсюда следуют основные задачи работы:

а) получить критерии тауберова типа для класса производящих рядов Дирихле (2), включающего как ряды с периодическими коэффициентами, так и непериодические с неформально принимаемым свойством «самоподобия», но имеющие схожие аналитические свойства производящих функций и, таким образом, позволяющие объединить в один класс и периодические, и «самоподобные» последовательности.

б) синтезировать новые базисы дискретных ортогональных преобразований из найденных (потенциально) непериодических последовательностей и указать возможность переноса методов и дискретного спектрального анализа со случая ДОП с периодическими базисами на случай базисов ДОП, порождённых «самоподобными» последовательностями.

2. Синтез ортогональных базисов

Далее, допуская известную стилистическую вольность, синтезируемые в работе базисы ДОП будем называть для краткости *самоподобными базисами.*

Рассмотрим многочлен

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{r-1} z^{r-1} \in \mathbf{C}[z]$$

и функцию

$$\begin{aligned} F_p(z) &= \prod_{k=0}^{p-1} f(z^{r^k}) = \sum_{n=0}^{r^p-1} a(n) z^n = \\ &= (c_0 + \ldots + c_{r-1} z^{r-1}) \ldots \left(c_0 + c_1 z^{r^{p-1}} + \ldots + c_{r-1} z^{r^{p-1}(r-1)}\right), \\ F_\infty(z) &= \prod_{k=0}^{\infty} f(z^{r^k}). \end{aligned} \tag{3}$$

Положим

$$\Psi_1(n) = a(n) \exp\left\{2\pi i \, n/r^p\right\}, \; n = 0, 1, \ldots, r^p - 1. \tag{4}$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} &\Psi_m(n) = \Psi_1(mn) = a(n) \exp\left\{2\pi i \, nm/r^p\right\}; \\ &n, m = 0, 1, \ldots, r^p - 1, \end{aligned} \tag{5}$$

а преобразование r^p-мерного (входного) вектора

$$\left(x(0), x(1), \ldots, x(r^p - 1)\right)$$

определяется соотношением

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{r^p-1} x(n) \Psi_m(n); m = 0, 1, \ldots, r^p - 1. \tag{6}$$

Теорема 1. Если для коэффициентов c_j многочлена $f(z)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &|c_0|^2 + |c_1|^2 + \ldots + |c_{r-1}|^2 = \beta \neq 0, \\ &|c_0|^2 + |c_1|^2 e^{2\pi i/r} + \ldots + |c_{r-1}|^2 e^{2\pi i(r-1)/r} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

то преобразование (6)

$$\{x(n)\} \to \{\hat{x}(m)\}; m, n = 1, \ldots, r^p - 1$$

является ортогональным относительно стандартного эрмитового произведения:

$$\langle \Psi_k, \Psi_m \rangle = \sum_{n=0}^{r^p-1} \Psi_k(n) \overline{\Psi_m}(n) = \beta^p \cdot \delta_{m,k}, \tag{8}$$

где $\delta_{m,k}$ – дельта-функция Кронекера.

Доказательство. Сумма в (8) представляется в форме

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_k, \Psi_m \rangle = \\ &= \prod_{l=0}^{p-1} \left(|c_0|^2 + \ldots + |c_{r-1}|^2 e^{2\pi i r^l (r-1)(k-m)/r^p} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

При $m = k$ очевидно $\langle \Psi_k, \Psi_m \rangle = \langle \Psi_k, \Psi_k \rangle = \beta^p$

Пусть $m - k = v \neq 0 (\operatorname{mod} r)$ Тогда последний из сомножителей в (9) в силу условия теоремы равен нулю. Если $v \equiv 0 (\operatorname{mod} r^s)$, но $v \neq 0 (\operatorname{mod} r^{s+1})$, то нулю равен один из предыдущих сомножителей в (9). ■

Пример 1. Пусть в (3) справедливы равенства

$$f(z) = 1 - z, \;\; r = 2, \;\; p = 2,$$

$$F_\infty(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - z^{2^k}\right),$$

$$F_1(z) = \left(1 - z^{2^0}\right)\left(1 - z^{2^1}\right) = (1 - z)\left(1 - z^2\right).$$

Тогда значения базисной функции $\Psi_1(n)$ четырехточечного ДОП задается как

$$\Psi_1(n): \left\{1 \cdot i^0, (-1) \cdot i^1, (-1) \cdot i^2, 1 \cdot i^3\right\}; n = 0, 1, 2, 3.$$

Продолжая последовательность коэффициентов $a(n)$ согласно (3) и учитывая, что

$$\Psi_m(n)=\Psi_1(mn):\left\{1\cdot i^{0\cdot m},(-1)\cdot i^{1\cdot m},(-1)\cdot i^{2\cdot m},1\cdot i^{3\cdot m}\right\},$$

получаем матрицу четырехточечного ортогонального преобразования

$$\mathbf{B}_4=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -i & 1 & -i\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}.$$

■

Следствие 1. Пусть G – мультипликативная группа комплексных корней степени r из единицы, H – подгруппа порядка q группы G Пусть K – смежный класс G по H, $K=vH$, $v\in G$, подгруппа H состоит из корней степени q:

$$H=\left\{e^{2\pi i\cdot 0/q},e^{2\pi i\cdot 1/q},\ldots,e^{2\pi i\cdot(q-1)/q}\right\},$$

K – мультипликативный сдвиг множества H.

Пусть $\chi_K(y)$ – характеристическая функция (индикатор) множества K:

$$\chi_K(y)=\begin{cases}1, & \text{если } y\in K,\\ 0, & \text{если } y\notin K.\end{cases}$$

Независимо от конкретного значения параметра мультипликативного сдвига v, справедливы соотношения

$$|\chi_K(0)|^2+|\chi_K(1)|^2+\ldots+|\chi_K(r-1)|^2=\beta\neq 0,$$

$$|\chi_K(0)|^2+|\chi_K(1)|^2e^{\frac{2\pi i}{r}}+\ldots+|\chi_K(r-1)|^2e^{\frac{2\pi i(r-1)}{r}}=0.$$

Следовательно, преобразование (6) с порождающим многочленом

$$f(z)=\chi_K(0)+\chi_K(1)z+\ldots+\chi_K(r-1)z^{r-1},$$

и с базисными функциями, построенными согласно (3)–(5), является дискретным ортогональным преобразованием.

В частности, пусть

$$f(z)=1+z+z^2+\ldots+z^{r-1},$$

тогда

$$F(z)=\prod_{k=1}^{p-1}f(z^{r^k})=\sum_{n=0}^{r^p-1}z^n$$

и функции $\Psi_m(n)$ являются базисными функциями дискретного преобразования Фурье длины $N=r^p$. ■

Следствие 2. Пусть $N=2^p$ тогда числа $w\in\{0,.., 2^p-1\}$ представимы в форме

$$w=w_0r^0+w_1r^1+\ldots+w_{p-1}2^{p-1};\ w_j=0,1.$$

Пусть далее G –группа, изоморфная прямой сумме p экземпляров циклической группы H_j порядка 2:

$$G\cong H_0\oplus H_1\oplus\ldots\oplus H_{p-1}.$$

Свяжем с числом w элемент группы G

$$w\leftrightarrow(w_0,w_1,\ldots,w_{p-1}),$$

считая, что $w_j\in H_j$. Пусть Θ – произвольный характер группы G, он представим в виде

$$\Theta(w)=\theta_0(w_0)\cdot\ldots\cdot\theta_{p-1}(w_{p-1}),$$

где θ_j; $j=0,1,\ldots,(p-1)$ – характеры групп H_j.

Пусть

$$F(z)=\left(1+\theta_0(w_0)z\right)\ldots\left(1+\theta_{p-1}(w_{p-1})z^{2^{p-1}}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{2^p-1}a(n)z^n.$$

Определим спаривание элементов w группы G с элементами μ изоморфной ей дуальной группы G^*:

$$w\circ\mu\leftrightarrow\left(w_0\sigma(\mu_0),\ldots,w_{p-1}\sigma(\mu_{p-1})\right),$$

где σ – некоторая перестановка компонент элемента

$$\mu\leftrightarrow(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{p-1}).$$

Положим, как и ранее, $\Psi_\mu(w)=\Psi_1(w\circ\mu)$.

Тогда преобразование (3) с определенными выше базисными функциями $\Psi_\mu(w)$ является ортогональным. ■

Ясно, что такое преобразование в зависимости от выбора способа спаривания $w\circ\mu$, то есть перестановки σ, является «хаароподобным» преобразованием (преобразованием Хаара, Уолша, Адамара и т.п.).

Аналогичным образом получается и множество преобразований, аналогичных преобразованиям Виленкина–Крестенсона [3].

Непериодическая последовательность $a(n)$, порожденная функцией $F_\infty(z)$, безотносительно к вопросам синтеза ДОП, рассматривалась в [4] как пример непериодической последовательности со специфическими свойствами производящего ряда Дирихле, характерными для рядов с периодическими последовательностями коэффициентов (см. ниже Пример 4).

Пример 2. Рассмотрим многочлен

$$f(z)=1+\omega z+\omega^5z^2+z^3,\ \ \omega=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right),$$

удовлетворяющий условиям Теоремы 1.

Последовательность

$$\psi(n)=\left\{1,\omega,\omega^5,1;\omega,\omega^2,\omega^6,\omega;\omega^5,1,\omega^4,\omega^5;1,\omega,\omega^5,1,\ldots\right\}$$

можно интерпретировать как цепной код кривой – «кривой Коха», а ДОП с базисными функциями

$$\Psi_1(n)=\psi(n)\exp\left\{2\pi i\, n/4^p\right\},\ n=0,1,\ldots,4^p-1;$$

$$\Psi_m(n)=\Psi_1(mn)=\psi(n)\exp\left\{2\pi i\, nm/4^p\right\};$$

$$n,m=0,1,\ldots,4^p-1$$

позволяет известными спектральными методами производить цифровую обработку сигнала типа «зашумлённой кривой Коха». В работах [7], [8] рассматривалась связь также и других «фрактальных» кривых и последовательностей, аналогичных $\psi(n)$. ■

3. Быстрые алгоритмы

Пусть $N=2^t$, $\omega_N=\exp\{2\pi i/N\}$. Рассмотрим «стандартное» дискретное преобразование Фурье (ДПФ) также «стандартной» длины N:

$$\hat{x}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp\left\{\frac{2\pi inm}{N}\right\}; m=0,1,...,N-1,$$

для вычисления которого уже больше полувека существуют «быстрые» алгоритмы – так называемые БПФ. Напомним один из таких алгоритмов – «БПФ с прореживанием по частоте» с целью указать возможность перенесения структуры этого алгоритма на случай быстрого вычисления преобразования (6). Опуская широко известные подробности, имеем:

$$\begin{aligned}&\hat{x}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\omega^{mn}=\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)+x(n+\frac{N}{2})(-1)^m\right)(\omega_{N/2})^{mn}=\\&=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N/2-1}\left(x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right)(\omega_{N/2})^{mn}\\ \qquad\text{при четных } m;\\ \sum\limits_{n=0}^{N/2-1}\left(x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right)(\omega_{N/2})^{mn}\\ \qquad\text{при нечетных } m.\end{cases}\end{aligned} \tag{10}$$

Несложная редукция приводит к обычной оценке арифметической сложности $W(N)$ для рассматриваемых значений параметров ДПФ $W(N)=O(N\cdot\log_2 N)$.

Аналогично, в общем случае для функций Теоремы 1, определенных соотношениями (3)–(5), имеем для преобразования (6):

$$\hat{x}(m)=\sum_{n=0}^{r^p-1}x(n)\Psi_m(n)=\sum_{q=0}^{r-1}\sum_{n=0}^{r^{p-1}-1}x(n+qr^{p-1})\Psi_m(n+qr^{p-1}).$$

Так как

$$\begin{aligned}&\Psi_m(n+qr^{p-1})=\\&=a(n+qr^{p-1})\exp\left\{2\pi i\frac{\left(n+qr^{p-1}\right)m}{r^p}\right\}=\\&=a(n)\cdot c_q\cdot\exp\left\{2\pi i\frac{qm}{r}\right\}\cdot\exp\left\{2\pi i\frac{nm}{r^p}\right\},\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}&\hat{x}(m)=\sum_{n=0}^{r^p-1}x(n)\Psi_m(n)=\\&=\sum_{n=0}^{r^{p-1}-1}\left(\sum_{q=0}^{r-1}x(n+qr^{p-1})\cdot c_q\cdot\exp\{2\pi im/r\}\right)\Psi_m(n).\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, вычисление преобразования (6) длины $N=r^p$ сводится к вычислению r преобразований длины N/r и к дополнительным умножениям в каждой из линейных комбинаций внутренней суммы в (11) на $\exp\{2\pi im/r\}$ – корни степени r из единицы в зависимости от вычета $m(\bmod r)$ и параметры c_q ДОП с базисными функциями(4)–(5).

Разумеется, предложенный алгоритм не снимает общую проблему синтеза специфических быстрых алгоритмов вычисления преобразований (6) с различными свойствами, учитывающими как требования к арифметической или структурной сложности, так и аппаратные возможности применяемых вычислительных средств.

4. Самоподобные базисы и ряды Дирихле

Определение 1. Функцией $\Delta(s)$, $s=\sigma+it\in\mathbf{C}$ класса Линделёфа A будем называть функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

а) в некоторой s –полуплоскости

$$\operatorname{Re}s=\operatorname{Re}(\sigma+it)>\sigma_0$$

комплексной плоскости **C** функция $\Delta(s)$ представима (обыкновенным) рядом Дирихле

$$\Delta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}; \tag{12}$$

б) функция $\Delta(s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость, причем в каждой полуплоскости $\operatorname{Re}s>\sigma$ имеет лишь конечное число полюсов;

в) для всех $\sigma\in\mathbf{R}$ функция Линделёфа конечна:

$$\mu_\Delta(\sigma)=\lim_{|t|\to\infty}\sup\frac{\ln\left|\Delta(\sigma+it)\right|}{\ln|t|}<+\infty\ .$$

Следуя [5,6], получим относительно эффективно проверяемый критерий принадлежности функций к классу Линделефа $\mathfrak{A}$.

Для данной комплексной последовательности $a(n)$ определим (интегральные) итерации $D_m(x)$ сумматорной функции $D_0(x)$ для последовательности $a(n)$ равенствами:

$$D_0(x)=\sum_{n\le x}a(n),\ D_{m+1}(x)=\int_1^x D_m(y)\,\mathrm{d}y,\ m=0,1,...$$

Теорема 2. Функция $\Delta(s)$, удовлетворяющая условию (а), принадлежит классу Линделёфа A тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$D_m(x)=R_m(x)+Q_m(x), \tag{13}$$

где $R_m(x)$ – полином, а для $Q_m(x)$ при $x\to\infty$ выполняются асимптотические соотношения:

$$Q_m(x)=O\left(x^{\gamma_m}\right)\text{ и }\lim_{m\to\infty}\left(\gamma_m-m\right)=-\infty.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $a(n)$ ограничена. Так как в полуплоскости абсолютной сходимости ряда Дирихле (при данном предположении в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1$) справедливо равенство (одна из форм преобразования Меллина [9])

$$\Delta(s) = s\int_1^\infty x^{-s-1}\mathrm{d}D_0(x),$$

то, интегрируя m раз по частям, получаем

$$\Delta(s) = s(s+1)...(s+m-1\int_1^\infty x^{-s-m-1}\mathrm{d}D_m(x). \qquad (14)$$

Так как из последнего равенства и равенства (13) следует, что функция

$$s(s+1)...(s+m-1\int_1^\infty x^{-s-m-1}\mathrm{d}R_m(x)$$

– рациональная функция, а функция

$$s(s+1)...(s+m-1\int_1^\infty x^{-s-m-1}\mathrm{d}Q_m(x)$$

регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}(s-\gamma_\mathrm{m}+m) > 1$.

Таким образом, соотношение (14) с растущим m определяет аналитическое продолжение функции (12) в произвольную полуплоскость $\mathrm{Re}(s-\gamma_\mathrm{m}+m) > 1$.

Обратно, из формулы Перрона [10,11] имеем

$$2\pi i D_0(x) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Delta(s)x^s\mathrm{d}s}{s}.$$

После m-кратного интегрирования получаем

$$2\pi i D_m(x) = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Delta(s)x^{s+m}\mathrm{d}s}{s(s+1)...(s+m)} = \int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Delta_m(s)x^{s+m}\mathrm{d}s,$$

где

$$\Delta_m(s) = \frac{\Delta(s)}{s(s+1)...(s+m)}.$$

Перенося контур интегрирования с прямой $\mathrm{Re}\, s = 2$ на прямую $\mathrm{Re}\, s = \sigma_m < 0$, где $m+1-\mu_\Delta(\sigma_m) > 1$, и учитывая вычеты подинтегральной функции в точках $s+s_j$, получаем

$$D_m(x) = \sum_{0\le \mathrm{Re}(s_j)\le\sigma_m} x^{m-k}\,\mathrm{Re}\, s\big|_{s=s_j}\Delta_m(s) +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_m-i\infty}^{\sigma_m+i\infty}\Delta_m(s)x^{s+m}\mathrm{d}s.$$

Что, как легко видеть, доказывает асимптотическое равенство (13). ■

Пример 3. Пусть функция, определенная соотношением (12), имеет периодические коэффициенты $a(n)$ с периодом T.

В этом случае из (12) следует

$$\Delta(s) = \sum_{n=1}^\infty a(n)n^{-s} = \sum_{m=0}^{T-1}\sum_{n=1}^\infty a(m)(m+nT)^{-s} =$$
$$= T^s\sum_{m=0}^{T-1}a(m)\sum_{n=1}^\infty\left({}^m\!/_T+n\right)^{-s} = T^s\sum_{m=0}^{T-1}a(m)\varsigma\left({}^m\!/_T;s\right),$$

где $\zeta(q;s)$ – дзета-функция Гурвица [12,13]:

$$\varsigma(q;s) = \sum_{n=0}^\infty (q+n)^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \mathrm{Re}(q) > 0.$$

Известно [12,13], что дзета-функция Гурвица допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции, определённой для всех комплексных s, при $s \ne 1$. В точке $s = 1$ она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Сумматорная функция для коэффициентов дзета-функции Гурвица отличается от сумматорной функции коэффициентов дзета-функции Римана, тождественно равных единице, только одним постоянным слагаемым $a(0)$. Поэтому с помощью рутинных выкладок, связанных с разложением функции $\{x\}$ на интервале (0, 1):

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n},$$

нетрудно убедиться не только в справедливости (13), но и в том, что соотношение (13) для итераций сумматорной функции $D_m(x)$ в случае $\zeta(q;s)$, (значит, и в случае любой функции (12) с периодическими коэффициентами $a(n)$), выполняется в форме

$$D_m(x) = P_m(x) + O(1). \;■ \qquad (15)$$

Иными словами, итерации сумматорной функции произвольной периодической последовательности *a*(*n*), «хорошо» (с точностью до $O(1)$) аппроксимируются полиномами. Подмножество класса $\mathfrak{A}$, для функций которого условия (13) выполняются в форме (15), далее будет обозначаться $\mathfrak{A}^*$.

Пример 4. Пусть в (3) справедливо равенство

$$F_\infty(z) = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)... = \sum_{n=0}^\infty \alpha(n)z^n. \qquad (16)$$

Иными словами, последовательность $a(n)$ строится рекурсивно следующим образом: начальный фрагмент последовательности $a(n)$, $n = 0, 1,\ldots,2^{k+1}-1$ повторяется при $n = 2^k, 2^{k+1},\ldots, 2^{k+1}-1$ с инверсией знака:

$$\text{знаки}\quad \alpha(n): +\text{'}-\text{'}-+\text{'}-++-\text{'}-++-+--+\text{'}... \qquad (17)$$

В [4] показано, что для этой *непериодической* последовательности справедливо асимптотическое равенство (13) именно в форме (15), что является характерным свойством периодических последовательностей.

Вид матрицы четырехточечного преобразования с базисом, порожденным рассмотренной функцией $a(n)$, приведен выше в Примере 1. ■

Строго говоря, ряды Дирихле имеют к задаче синтеза новых базисов ДОП весьма опосредованное отношение. В работе они привлекались исключительно для того, чтобы на основе факта мероморфной продолжимости производящего ряда (факта, к сожалению, реально непроверяемого непосредственно), получить («похожие на эффективно проверяемые») достаточные условия принадлежности последовательности к некоторому классу, включающему как периодические, так и некоторые непериодические функции, из фрагментов которых далее синтезируются базисы ДОП.

В качестве таких *псевдопроверяемых* условий в настоящей работе рассматриваются асимптотические соотношения для интегральных итераций чезаровских средних. Разумеется, если не ставить целью подчеркнуть связь этих асимптотик с рядами Дирихле и их тауберовыми свойствами, а оставаться только в рамках задач синтеза новых базисов ДОП, то асимптотики, субъективно достаточные для решения ряда таких задач, можно получить, рассматривая не интегральные итерации, а повторные суммы чезаровских средних.

Наверное, в качестве некоторой альтернативой рассматриваемому подходу к выбору принципа формирования базисов ДОП, опирающемуся на анализ асимптотик итераций чезаровских средних, мог бы рассматриваться подход, связанный с формированием базисов ДОП из последовательностей, относящихся к различным классам почти периодических функций. Упомянем один из таких подходов, хорошо зарекомендовавший себя при решении некоторых задач аналитической теории чисел.

Определение 2. Следуя [1], назовем последовательность $a(n)$ хорошо приближающейся периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется периодическая с периодом τ последовательность $a(n, \tau)$ такая, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} \left| a(n) - a(n,\tau) \right| \le \varepsilon . \qquad (18)$$

Класс функций, удовлетворяющий Определению 2, является вариантом класса почти периодических функций Безиковича.

Однако для выделения множества непериодических последовательностей, пригодных для синтеза новых базисов ДОП, функции, удовлетворяющие Определению 2, либо не подходят, либо установление факта принадлежности классу последовательностей, хорошо приближающихся периодическими, технически затруднительно. Кроме того, условие (18) все-таки недостаточно сильное требование для выделения класса последовательностей с признаками субъективно понимаемого «самоподобия».

Пример 5. Для последовательности Примера 4, определенной соотношениями (16)–(17), «наиболее естественными» аппроксимирующими периодическими функциями, на первый взгляд, являются периодические продолжения последовательностей коэффициентов периодических продолжений начальных отрезков ряда (16):

$$a(n,1) = \{+1', +1', \ldots\};$$

$$a(n,2) = \{+1, -1', +1, -1', \ldots\};$$

$$a(n,4) = \{+1, -1, -1, +1', +1, -1, -1, +1', \ldots\};$$

$$a(n,8) = \{+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1', \ldots\} \ldots$$

Но нетрудно показать, что в рассматриваемом случае вне зависимости от величины периода $\tau = 2^k$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} \left| a(n) - a(n,\tau) \right| = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

Заключение

Как уже отмечалось во введении, «универсального» формального определения самоподобия, похоже, не существует. Особенно это относится к дискретным, конечным объектам. В контексте развития теории ДОП можно все же констатировать, что имеются работы, посвященные исследованиям ДОП, определенных на самоподобных «предфрактальных» двумерных областях [14], но автору неизвестны работы, где исследовались бы нетрадиционные ДОП с условием некого «самоподобия» не области определения, а значений базисных функций преобразования. Несмотря на этот теоретический пробел, потребность в дискретном спектральном анализе с помощью преобразований с такими базисами представляется достаточно высокой в связи, например, с задачами анализа трафика в компьютерных сетях [15], [16], в связи с применением самоподобных моделей в финансовой математике [17], в комбинаторике. А известные теоретические работы, в которых ставятся и исследуются вопросы самоподобия в дискретных последовательностях, не затрагивают проблемы синтеза новых базисов ДОП [18, 19].

Что касается реальной полезности и практической применимости тех или иных инфинитных аналитических критериев принадлежности рассматриваемого объекта к определенному классу, то просто следует признать, что вообще проверка выполнения большинства критериальных требований обычно невозможна за конечное время. Тем не менее (и это обычная практика), функция, наблюдаемая лишь на конечном интервале, часто считается, например, периодически продолженной.

Аргументы:

а) «мне так удобнее» / «есть математический аппарат»;

б) «есть мнение…» / «опыт подсказывает…» и т.п.

Именно для формирования этого «мнения» и полезны, по мнению автора, инфинитные критерии.

Предложенная в работе цепочка связей:

→ *последовательности, потенциально перспективные для синтеза базисов ДОП* →

→ *производящие ряды Дирихле* →

→ *ряды Дирихле класса Линделёфа* →

→ *асимптотическое представление (13) чезаровских средних* →

→ *тауберовы свойства известных базисов ДОП* →

→ ***новые базисы ДОП,***

явно формулируется полностью, наверное, впервые, несмотря на достаточную изученность её отдельных звеньев. Следует также отметить, что новые базисы порождают и новые проблемы, связанные с их изучением и применением. Например, «волюнтаристское» решение о признании функции, наблюдаемой только на конечном интервале, периодической функцией приводит, например, к известным краевым эффектам (эффект Гиббса и т.п.). Точно так же решение о признании функции «самоподобной» должно привести к краевым эффектам в специфической форме.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «дискретные ортогональные преобразования (ДОП)» и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты РФФИ №16-41-630676_р_а, № 18-29-03135_ мк) в части «быстрые алгоритмы ДОП».

Литература

1. **Постников, А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников // М.: Наука, 1971. – 416 с.
2. **Бибербах, Л**. Аналитическое продолжение / Л. Бибербах. – М.: Наука, 1967. – 241 с.
3. **Wang, R.** Introduction to orthogonal transforms: With applications in data processing and analysis / R. Wang. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 590 p. – ISBN: 978-0-521-51688-4.
4. **Чернов, В.М.** Об одном классе рядов Дирихле с конечными функциями Линделёфа / В.М. Чернов // Исследования по теории чисел: Межвузовский научный сборник. – 1982. – № 8. – С. 92-95.
5. **Чудаков, Н.Г.** Аналитические критерии периодичности функций / Н.Г. Чудаков // Проблемы аналитической теории чисел и её применений: Тезисы Всесоюзной конференции. – 1974. – С. 302-303.
6. **Чудаков, Н.Г.** Об одном классе рядов Дирихле / Н.Г. Чудаков. – В кн.: Теория чисел. – Куйбышев, 1975. – С. 53-57.
7. **Chernov, V.M.** Some spectral properties of fractal curves / V.M. Chernov // Machine Graphics and Vision. – 1996. – Vol. 5, Nos. 1/2. – P. 413-422.
8. **Chernov, V.M.** Tauber theorems for Dirichlet series and fractals / V.M. Chernov // Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition. – 1996. – Vol. 2, Track B. – 656-661. – DOI: 10.1109/ICPR.1996.546905.
9. **Титчмарш, Э.Ч.** Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш // М., Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 418 с.
10. **Chandrasekharan, K**. Typical means / K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram. – Oxford: Oxford University Press, 1952. – 139 p.
11. **Чандрасекхаран, К**. Арифметические функции / К. Чандрасекхаран // М.: Наука, 1975. – 272 с.
12. **Hasse, H.** Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe / H. Hasse // Mathematische Zeitschrift. –1930. – Vol. 32, Issue 1. – P. 458-464. – DOI: 10.1007/BF01194645.
13. **Mező, I.** Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function / I. Mező, A. Dil // Journal of Number Theory. – 2010. – Vol. 130, Issue 2. – P. 360-369. – DOI: 10.1016/j.jnt.2009.08.005.
14. **Чернов, В.М.** Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях канонических систем счисления / В.М. Чернов, М.С. Каспарьян // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 484-487.
15. **Karagiannis, T.** A nonstationary poisson view of internet traffic / T. Karagiannis, M. Molle, M.A. Faloutsos, A. Broido // Proceedings of the 23-rd Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (IEEE INFOCOM 2004). – 2004. – Vol. 3, No 7-11. – P.1558-1569. – DOI: 10.1109/INFCOM.2004.1354569.
16. **Taqqu, M.** Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling / M. Taqqu, W. Willinger, R. Sherman // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 1997. – Vol. 27, Issue 2. – P. 5-23. – DOI: 10.1145/263876.263879.
17. **Hastings, K.J**. Introduction to financial mathematics / K.J. Hastings. – Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2015. – 421 p. – ISBN: 978-1-4987-2390-9.
18. **Hendriks, D.** Arithmetic self-similarity of infinite sequences / D. Hendriks, F.G.W. Dannenberg, J. Endrullis, M. Dow, J.W. Klop // arXiv:1201.3786.
19. **Odagaki ,T**. Self-similarity of binary quasiperiodic sequences / T. Odagaki, M. Kaneko // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1994. – Vol. 27, Issue 5. – P. 1683-1690. – DOI: 10.1088/0305-4470/27/5/030.

Сведения об авторе

Чернов Владимир Михайлович, 1949 года рождения, математик, доктор физико-математических наук. Главный научный сотрудник лаборатории математических методов обработки изображений Института систем обработки изображений РАН (филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН); профессор кафедры геоинформатики и информационной безопасности Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. Область научных интересов: алгебраические методы в цифровой обработке сигналов, криптография, машинная арифметика. E-mail: vche@smr.ru .

ГРНТИ: 27.41.41 .

Поступило в редакцию 15 августа 2018 г. Окончательный вариант – 16 сентября 2018 г.

DISCRETE ORTHOGONAL TRANSFORMS WITH BASES GENERATED BY SELF-SIMILAR SEQUENCES

V.M. Chernov [1,2]

[1] IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;
[2] Samara National Research University, Moskovskoye shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

New bases of discrete orthogonal transforms associated with some recursive processes and possessing a property of self-similarity are introduced and investigated in the paper. Sufficient conditions of orthogonality of a system of basic functions are proved. For transforms with the introduced bases, fast algorithms of the transforms are synthesized. The relationship between the considered bases and the analytic properties of generating Dirichlet series is discussed.

Keywords: discrete orthogonal transformations, self-similarity, generating Dirichlet series.

Citation: Chernov VM. Discrete orthogonal transforms with bases generated by self-similar sequences. Computer Optics 2018; 42(5) 904-911. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-904-911.

Acknowledgements: This work was partly funded by the RF Ministry of Science and Higher Education under the state contract of FSRC «Crystallography and Photonics» RAS ("Discrete orthogonal transforms (DOT)") and the Russian Foundation for Basic Research under grants 16-41-630676_p_a and 18-29-03135_ мк ("Fast algorithms of DOT").

References

[1] Postnikov AG. Introduction to analytic number theory. American Mathematical Society; 1988. ISBN: 0-8218-4521-7.

[2] Bieberbach L. Analytische forsetzung. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag; 1955.

[3] Wang R. Introduction to orthogonal transforms: With Applications in data processing and analysis. Cambridge: Cambridge University Press; 2012. ISBN: 978-0-521-51688-4.

[4] Chernov VM. On a class of Dirichlet series with finite Lindelef functions [In Russian]. Research on number theory 1982; 8: 92-95.

[5] Chudakov NG. Analytical criteria for the periodicity of the functions [In Russian]. Theses of the all-Union conference "Problems of analytical number theory and its applications" 1974: 302-303.

[6] Chudakov NG. On a certain class of Dirichlet series [In Russian]. In Book: Number theory, Kuibyshev, 1975. P. 53–57.

[7] Chernov VM. Some spectral properties of fractal curves. Machine Graphics and Vision 1996; 5(1/2): 413-422.

[8] Chernov VM. Tauber theorems for Dirichlet series and fractals. Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition 1996; 2(B): 656-661. DOI: 10.1109/ICPR.1996.546905.

[9] Titchmarsh TC. Introduction to the theory of Fourier's integrals. Oxford: Oxford University Press; 1937.

[10] Chandrasekharan K, Minakshisundaram S. Typical means. Oxford: Oxford University Press; 1952.

[11] Chandrasekharan K. Arithmetical functions. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970. ISBN: 978-3-642-50028-2.

[12] Hasse H. Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe. Mathematische Zeitschrift 1930; 32(1): 458-464. DOI: 10.1007/BF01194645.

[13] Mező I, Dil A. Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function. Journal of Number Theory 2010; 130(2): 360-369. DOI: 10.1016/j.jnt.2009.08.005.

[14] Chernov VM, Kasparyan MS. Discrete orthogonal transforms on fundamental domains of canonical number systems. Computer Optics 2013; 37(4): 484-487.

[15] Karagiannis T, Molle M, Faloutsos A, Broido A. A nonstationary poisson view of internet traffic. IEEE INFOCOM 2004; 3(7-11): 1558-1569. DOI: 10.1109/INFCOM.2004.1354569.

[16] Taqqu M,Willinger W, Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling. ACM SIGCOMM Computer Communication Review 1997; 27(2): 5-23. DOI: 10.1145/263876.263879.

[17] Hastings KJ. Introduction to financial mathematics. Boca Raton, London, New York: CRC Press; 2015. ISBN: 978-1-4987-2390-9.

[18] Hendriks D, Dannenberg FGW, Endrullis J, Dow M, Klop JW. Arithmetic self-similarity of infinite sequences. arXiv:1201.3786.

[19] Odagaki T, Kaneko M. Self-similarity of binary quasiperiodic sequences. Journal of Physics A: Mathematical and General 1994; 27(5): 1683-1690. DOI: 10.1088/0305-4470/27/5/030.

Author's information

Vladimir Mikhailovich Chernov (b. 1949) is mathematician, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Chief researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS (Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS) and a professor of Geo-Information Science and Information Security department at Samara National Research University (SSAU). Research interests are algebraic methods in digital signal processing, cryptography, computer arithmetic.

Received August 15, 2018. The final version – September 16, 2018.