

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПОЛЯ И РАСЧЁТ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ В ВОЛНОВОДЕ С ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКОЙ

С.И. Харитонов<sup>1,2</sup>, С.Г. Волоотовский<sup>1</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>, Н.Л. Казанский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе рассмотрен метод решения системы уравнений Максвелла в случае граничных условий, зависящих от времени на торце волновода со сверхпроводящими стенками. Получено явное аналитическое решение для квазигармонического сигнала, у которого ширина импульса в частотной области намного меньше, чем несущая частота. Рассмотрены численные примеры в случае распространения в круглом полом металлическом волноводе Гауссова импульса, представляющего собой совокупность мод. Рассмотрен расчёт динамических инвариантов коротких импульсов при распространении в волноводе с проводящей оболочкой произвольной формы. Описана процедура квантования электромагнитного поля в волноводе со сверхпроводящими стенками.

**Ключевые слова:** моды волновода, импульс поля, динамические инварианты, квантование электромагнитного поля.

**Цитирование:** Харитонов, С.И. Распространение импульсов поля и расчёт динамических инвариантов в волноводе с выпуклой оболочкой / С.И. Харитонов, С.Г. Волоотовский, С.Н. Хонина, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 6. – С. 947-958. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-947-958.

### Введение

Распространению электромагнитных волн в волокнах посвящено множество работ [1–5]. Однако большинство работ посвящено анализу расчёта поля от гармонических сигналов [6–10]. Следует отметить, что гармонический сигнал не несёт информации. Для того, чтобы электромагнитная волна несла информацию, её нужно модулировать полезным сигналом.

В данной работе рассматривается решение задачи о распространении импульсов поля внутри волновода со сверхпроводящей оболочкой произвольной формы с граничными условиями на срезе волокна, зависящими от времени. Решение проведено в рамках строгой электромагнитной теории. В случае квазигармонического сигнала, у которого ширина импульса в частотной области намного меньше, чем несущая частота, рассматривается аналитическое решение задачи.

Рассмотрены численные примеры в случае распространения в круглом полом волноводе импульса, представляющего собой совокупность мод, визуально продемонстрирована дисперсия мод при распространении в волноводе за счёт разности групповых скоростей.

Рассмотрен расчёт динамических инвариантов коротких импульсов при распространении в волноводе с проводящей оболочкой произвольной формы. Наличие сверхпроводящей оболочки приводит к дискретному спектру и ограниченности энергии, заключённой в моде. Это удобно для квантования электромагнитного поля [11–18].

Описана процедура квантования электромагнитного поля в волноводе со сверхпроводящими стенками. Полученные выражения в случае квантованных электромагнитных полей в дальнейшем можно ис-

пользовать для описания распространения неклассических состояний электромагнитного поля внутри волноводов.

### 1. Распространение электромагнитного поля в волноводах

#### 1.1. Моды при наличии неоднородного диэлектрика

Рассмотрим уравнение Максвелла для комплексных амплитуд в диэлектрике с неоднородным распределением показателя преломления в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E(r_{\perp}, \omega, z) &= ik_0 \mu(r_{\perp}, \omega) H(r_{\perp}, \omega, z), \\ \operatorname{rot} H(r_{\perp}, \omega, z) &= -ik_0 \varepsilon(r_{\perp}, \omega) E(r_{\perp}, \omega, z). \end{aligned} \quad (1)$$

Представим решение в виде

$$\begin{aligned} E(r_{\perp}, \omega, z) &= E_0(r_{\perp}, \omega) \exp(i\gamma z), \\ H(r_{\perp}, \omega, z) &= H_0(r_{\perp}, \omega) \exp(i\gamma z). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляем выражения (2) в (1) (опуская зависимость координат):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(E_0 \exp(i\gamma z)) &= ik_0 \mu H_0 \exp(i\gamma z), \\ \operatorname{rot}(H_0 \exp(i\gamma z)) &= -ik_0 \varepsilon E_0 \exp(i\gamma z). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя формулы векторного анализа, для электрического и магнитного поля можно записать:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(E_0 \exp(i\gamma z)) &= \\ &= i\gamma \exp(i\gamma z) \mathbf{e}_z \times E_0 + \exp(i\gamma z) \operatorname{rot}(E_0), \\ \operatorname{rot}(H_0 \exp(i\gamma z)) &= \\ &= i\gamma \exp(i\gamma z) \mathbf{e}_z \times H_0 + \exp(i\gamma z) \operatorname{rot}(H_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляем выражения (4) в уравнения (1) и получаем уравнения для поперечных распределений электромагнитного поля мод:

$$\begin{aligned} i\gamma \mathbf{e}_z \times E_0 + \text{rot}(E_0) &= ik_0 \mu H_0, \\ i\gamma \mathbf{e}_z \times H_0 + \text{rot}(H_0) &= -ik_0 \varepsilon E_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Введём криволинейные ортогональные поперечные координаты  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$ , такие, что внешняя поверхность волновода является координатной поверхностью  $u^1 = \text{const}$  (или  $u^2 = \text{const}$ ). Используя определение ротора и вектора в произвольных координатах, уравнения (5) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} i\gamma \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{e}_1}{G_2} (\partial_2 E_{03}) - \frac{\mathbf{e}_2}{G_1} (\partial_1 E_{03}) + \\ + \frac{\mathbf{e}_3}{G_1 G_2} (\partial_1 (E_{02} G_2) - \partial_2 (E_{01} G_1)) &= ik_0 \mu \mathbf{H}_0, \\ i\gamma \mathbf{e}_3 \times \mathbf{H}_0 + \frac{\mathbf{e}_1}{G_2} (\partial_2 H_{03}) - \frac{\mathbf{e}_2}{G_1} (\partial_1 H_{03}) + \\ + \frac{\mathbf{e}_3}{G_1 G_2} (\partial_1 (H_{02} G_2) - \partial_2 (H_{01} G_1)) &= -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{E}_0 = E_{01} \mathbf{e}_1 + E_{02} \mathbf{e}_2 + E_{03} \mathbf{e}_3$ , полагаем  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ ;  $G_1, G_2$  – коэффициенты Ламэ;  $\partial_j = \partial / \partial u^j$ .

Из двух уравнений (6) можно получить выражения для поперечных компонент электромагнитных полей через продольные:

$$\begin{aligned} E_{01} &= \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{i\gamma}{G_1} (\partial_1 E_{03}) + \frac{ik_0 \mu}{G_2} (\partial_2 H_{03}) \right), \\ E_{02} &= \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{i\gamma}{G_2} (\partial_2 E_{03}) - \frac{ik_0 \mu}{G_1} (\partial_1 H_{03}) \right), \\ H_{01} &= \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{-ik_0 \varepsilon}{G_2} (\partial_2 E_{03}) + \frac{i\gamma}{G_1} (\partial_1 H_{03}) \right), \\ H_{02} &= \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{ik_0 \varepsilon}{G_1} (\partial_1 E_{03}) + \frac{i\gamma}{G_2} (\partial_2 H_{03}) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

### 1.2. Поперечное магнитное поле (ТМ)

В этом случае  $H_{03} = 0$ , тогда выражения (7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{01} &= \frac{i\gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_1} \partial_1 E_{03}, \\ E_{02} &= \frac{i\gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_2} \partial_2 E_{03}, \\ H_{01} &= -\frac{ik_0 \varepsilon}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_2} \partial_2 E_{03}, \\ H_{02} &= \frac{ik_0 \varepsilon}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_1} \partial_1 E_{03}. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножая скалярно второе из уравнений (6) на  $\mathbf{e}_3$ , получим уравнение:

$$\frac{1}{G_1 G_2} (\partial_1 (H_{02} G_2) - \partial_2 (H_{01} G_1)) = -ik_0 \varepsilon E_{03}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) выражения (8), получим уравнение для продольной компоненты электрического поля

$$\begin{aligned} \left[ \partial_1 \left( \frac{\varepsilon}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{G_2}{G_1} (\partial_1 E_{03}) \right) \right) + \right. \\ \left. + \partial_2 \left( \frac{\varepsilon}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{G_1}{G_2} (\partial_2 E_{03}) \right) \right) \right] \frac{(k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2)}{\varepsilon} + \\ + (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) G_1 G_2 E_{03} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получено уравнение (10) для поиска мод и таких постоянных  $k_0^2$  и  $\gamma^2$ , чтобы функция  $E_{03}(r_\perp)$  удовлетворяла уравнению и граничным условиям на границе волновода.

В случае, если диэлектрическая и магнитная проницаемость являются постоянными величинами, следует найти такое  $\alpha = \sqrt{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2}$ , чтобы выполнялись оба вышеназванных условия. Следует отметить, что  $k_0^2$  и  $\gamma^2$  не являются независимыми. В случае, если мы фиксируем одну величину, другая становится от неё зависимой. Если мы фиксируем частоту, то  $\gamma(\omega)$  становится зависимой от частоты. В случае, если мы фиксируем  $\gamma$ , то частота  $\omega(\gamma)$  становится зависимой от  $\gamma$ . Обычно существует дискретный или счётный набор параметров.

### 1.3. Поперечное электрическое поле

В этом случае  $E_{03} = 0$ , тогда выражения (7) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{01} &= \frac{ik_0 \mu}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_2} (\partial_2 H_{03}), \\ E_{02} &= -\frac{ik_0 \mu}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_1} (\partial_1 H_{03}), \\ H_{01} &= \frac{i\gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_1} (\partial_1 H_{03}), \\ H_{02} &= \frac{i\gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \frac{1}{G_2} (\partial_2 H_{03}). \end{aligned} \quad (11)$$

Умножая скалярно первое из уравнений (6) на  $\mathbf{e}_3$ , получим уравнение:

$$\frac{1}{G_1 G_2} (\partial_1 (E_{02} G_2) - \partial_2 (E_{01} G_1)) = ik_0 \mu H_{03}. \quad (12)$$

Подставляя в (11) выражения (12), получим уравнение для продольной компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned} \left[ \partial_1 \left( \frac{\mu}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{G_2}{G_1} \partial_1 H_{03} \right) \right) + \right. \\ \left. + \partial_2 \left( \frac{\mu}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \left( \frac{G_1}{G_2} \partial_2 H_{03} \right) \right) \right] \frac{(k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2)}{\mu} + \\ + G_1 G_2 (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) H_{03} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично задача сводится к поиску таких постоянных  $k_0^2$  и  $\gamma^2$ , чтобы функция  $H_{03}(r_\perp)$  удовлетво-

рля уравнению и граничным условиям на границе волновода. В случае, если диэлектрическая и магнитная проницаемость являются постоянными величинами, следует найти такое  $\beta = \sqrt{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma^2}$ , чтобы выполнялись оба вышеназванных условия.

**2. Разложение поля по модам волновода**

**2.1. Разложение комплексных амплитуд**

Рассмотрим случай, когда диэлектрическая и магнитная проницаемость не зависят от координат и времени. Продольные составляющие электрического и магнитного поля  $E_{03}(r_{\perp}) \equiv E_{\alpha}$  и  $H_{03}(r_{\perp}) \equiv H_{\beta}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_1 \left[ \frac{G_2}{G_1} (\partial_1 E_{\alpha}) \right] + \partial_2 \left[ \frac{G_1}{G_2} (\partial_2 E_{\alpha}) \right] + (\alpha)^2 G_1 G_2 E_{\alpha} &= 0, \\ \partial_1 \left[ \frac{G_2}{G_1} (\partial_1 H_{\beta}) \right] + \partial_2 \left[ \frac{G_1}{G_2} (\partial_2 H_{\beta}) \right] + (\beta)^2 G_1 G_2 H_{\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\alpha = \sqrt{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{\alpha}^2}$ ,  $\beta = \sqrt{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{\beta}^2}$ .

Отметим, что  $\alpha$  определяется из условия  $E_{\alpha}(\mathbf{r}_{bound}) = 0$ ,  $\mathbf{r}_{bound}$  – радиус-вектор внешней поверхности волновода,  $\beta$  определяется из условия  $\partial_2 H_{\beta}(\mathbf{r}_{bound}) = 0$ .

Далее введём в рассмотрение вектора

$$\mathbf{e}_{\alpha,1,1} = \frac{i\gamma_{\alpha}}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} \partial_1 E_{\alpha} \\ \frac{1}{G_2} \partial_2 E_{\alpha} \\ \left( \frac{i\gamma_{\alpha}}{\alpha^2} \right)^{-1} E_{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbf{e}_{\alpha,2,1} = -\frac{ik_0 \epsilon}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{G_2} \partial_2 E_{\alpha} \\ \frac{1}{G_1} \partial_1 E_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_0^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[ (\alpha)^2 + \gamma_{\alpha}^2 \right],$$

$$\mathbf{e}_{\beta,1,2} = \frac{ik_0 \mu}{\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{G_2} (\partial_2 H_{\beta}) \\ \frac{1}{G_1} (\partial_1 H_{\beta}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{e}_{\beta,2,2} = \frac{i\gamma_{\beta}}{\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} (\partial_1 H_{\beta}) \\ \frac{1}{G_2} (\partial_2 H_{\beta}) \\ \left( \frac{i\gamma_{\beta}}{\beta^2} \right)^{-1} H_{\beta} \end{pmatrix}, \quad k_0^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[ (\beta)^2 + \gamma_{\beta}^2 \right].$$

Эти вектора связаны уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{e}_{\alpha,1,1}) &= ik_0 \mu \mathbf{e}_{\alpha,2,1}, \\ \text{rot}(\mathbf{e}_{\alpha,2,1}) &= -ik_0 \epsilon \mathbf{e}_{\alpha,1,1}, \\ \text{rot}(\mathbf{e}_{\alpha,1,2}) &= ik_0 \mu \mathbf{e}_{\alpha,2,2}, \\ \text{rot}(\mathbf{e}_{\alpha,2,2}) &= -ik_0 \epsilon \mathbf{e}_{\alpha,1,2}, \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\alpha = (\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_2)$ .

С учётом обозначений (15) и (16) и дискретного набора собственных значений разложение комплексных амплитуд поля имеет вид

$$E(\omega) = \sum_p a^{\alpha_p,1,1} \mathbf{e}_{\alpha_p,1,1} \exp(i\gamma_{\alpha_p} z) + \sum_q a^{\beta_q,1,2} \mathbf{e}_{\beta_q,1,2} \exp(i\gamma_{\beta_q} z), \tag{18}$$

$$H(\omega) = \sum_p a^{\alpha_p,2,1} \mathbf{e}_{\alpha_p,2,1} \exp(i\gamma_{\alpha_p} z) + \sum_q a^{\beta_q,2,2} \mathbf{e}_{\beta_q,2,2} \exp(i\gamma_{\beta_q} z). \tag{19}$$

Индексы суммирования  $p$  и  $q$  определяют номер моды.

**2.2. Соотношения ортогональности для мод**

В случае однородного диэлектрика имеются соотношения для продольных компонент полей

$$\int_D E_{p_1}(\mathbf{u}) E_{p_2}(\mathbf{u}) G_1(\mathbf{u}) G_2(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} = 0, \tag{20}$$

$$\int_D H_{q_1}(\mathbf{u}) H_{q_2}(\mathbf{u}) G_1(\mathbf{u}) G_2(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} = 0, \tag{21}$$

где  $D$  – поперечное сечение волновода.

Для векторов электрического поля для различных поляризаций:

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{e}_{p_1,1,1}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{p_2,1,1}(\mathbf{u}) G_1(\mathbf{u}) G_2(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \int_D \mathbf{e}_{q_1,1,2}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{q_2,1,2}(\mathbf{u}) G_1(\mathbf{u}) G_2(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \int_D \mathbf{e}_{p_1,1,1}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{q_1,1,2}(\mathbf{u}) G_1(\mathbf{u}) G_2(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Эти соотношения в дальнейшем будут использоваться для вычисления гамильтониана электромагнитного поля. В случае, если показатель преломления зависит от поперечной координаты, соотношения ортогональности не выполняются.

**2.3. Разложение электромагнитных полей, зависящих от времени**

Рассмотрим теперь представление электромагнитных полей, зависящих от времени.

Введём обозначение:

$$\begin{aligned} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) &= \exp(-i\omega_{pj} t + i\gamma z), \\ \omega_{pj} &= c \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon} \left[ (\alpha_{pj})^2 + \gamma^2 \right]}. \end{aligned} \tag{23}$$

Запишем электромагнитные поля в зависимости от времени (для сокращения записи будем опускать аргументы некоторых функций):

$$E(t) = \int \left( \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) + \text{complex conj} \right) d\gamma, \quad (24)$$

$$H(t) = \int \left( \sum_{p,j} a^{p,2,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,2,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) + \text{complex conj} \right) d\gamma. \quad (25)$$

Пусть при  $t=0$  известен вид волнового пакета электрического поля  $E(\mathbf{u}, z, t=0) = E_{t0}(\mathbf{u}, z)$ . Тогда из (24) с учётом (23) для аналитического сигнала получим:

$$E_{t0}(\mathbf{u}, z) = \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \gamma) \exp(i\gamma z) d\gamma. \quad (26)$$

Для вычисления коэффициентов разложения выполним стандартное преобразование:

$$\int E_{t0}(\mathbf{u}, z) \exp(-i\xi z) dz = \int \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \gamma) \exp(i(\gamma - \xi)z) dz d\gamma = (27)$$

$$= 2\pi \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \gamma) \delta(\gamma - \xi) d\gamma.$$

Обозначим преобразование Фурье:

$$F_{t0}(\mathbf{u}, \xi) = \int E_{t0}(\mathbf{u}, z) \exp(-i\xi z) dz. \quad (28)$$

Тогда

$$F_{t0}(\mathbf{u}, \xi) = 2\pi \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\xi) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \xi). \quad (29)$$

Далее,

$$\int \mathbf{e}^{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi) F_{t0}(\mathbf{u}, \xi) d^2\mathbf{u} = 2\pi \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\xi) \int \mathbf{e}^{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \xi) d^2\mathbf{u}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{e}^{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi)$  – эрмитово-сопряжённый вектор  $\mathbf{e}_{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi)$ .

Учитывая ортогональность векторов (15)–(16), окончательно получаем:

$$a^{q,1,s}(\xi) = \frac{\int \mathbf{e}^{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi) F_{t0}(\mathbf{u}, \xi) d^2\mathbf{u}}{2\pi \int (\mathbf{e}^{q,1,s} \mathbf{e}_{q,1,s}(\mathbf{u}, \xi)) d^2\mathbf{u}}. \quad (31)$$

#### 2.4. Случай квазигармонического пучка

Выражение для аналитического сигнала можно представить не только в виде интеграла по константе распространения (24), но и через интеграл по частоте:

$$E(t) = \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\omega) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \omega) \times \exp(-i\omega t + i\gamma_{p,j}(\omega)z) d\omega, \quad (32)$$

где  $\gamma_{p,j}(\omega) = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - (\alpha_{p,j})^2}$ .

В случае квазигармонического пучка  $\gamma_{p,j}(\omega)$  можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в области гармонической частоты  $\omega_0$ :

$$\gamma_{p,j}(\omega) = \gamma_{p,j}(\omega_0) + \gamma'_{p,j}(\omega_0)(\omega - \omega_0). \quad (33)$$

Тогда выражение (32) примет следующий вид:

$$E(\mathbf{u}, z, t) = \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\omega) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \omega) \times \exp(-i\omega t + i(\gamma_{p,j}(\omega_0) + \gamma'_{p,j}(\omega_0)(\omega - \omega_0))z) d\omega. \quad (34)$$

После замены переменных  $\xi = (\omega - \omega_0)$  и с учётом бесконечных пределов:

$$E(\mathbf{u}, t, z) = \exp(-i\omega_0 t) \times \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\xi + \omega_0) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \xi + \omega_0) \times \exp(i\gamma_{p,j}(\omega_0)z) \exp[-i\xi(t - \gamma'_{p,j}(\omega_0)z)] d\xi. \quad (35)$$

Рассмотрим поле при  $z=0$ :  $E(\mathbf{u}, z=0, t) = E_{z0}(\mathbf{u}, t)$ :

$$E_{z0}(\mathbf{u}, t) = \exp(-i\omega_0 t) \times \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\xi + \omega_0) \mathbf{e}_{p,1,j}(\mathbf{u}, \xi + \omega_0) \exp(-i\xi t) d\xi. \quad (36)$$

Выражение (36) неудобно для дальнейших выкладок, так как базисные вектора в этом случае зависят от  $\xi = (\omega - \omega_0)$ . Чтобы избавиться от этой зависимости, рассмотрим только поперечные компоненты:

$$\mathbf{e}_{p,1,1}^\perp(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_1} \partial_1 E_{\alpha_p} \\ \frac{1}{G_2} \partial_2 E_{\alpha_p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{q,1,2}^\perp(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_2} (\partial_2 H_{\beta_q}) \\ -\frac{1}{G_1} (\partial_1 H_{\beta_q}) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Тогда для поперечных компонент выражение (36) можно переписать:

$$E_\perp(\mathbf{u}, t, z) = \exp(-i\omega_0 t) \times \int \sum_{p,j} b^{p,1,j}(\eta) \mathbf{e}_{p,1,j}^\perp(\mathbf{u}) \exp(i\gamma_{p,j}(\omega_0)z) \times \exp[-i\eta(t - \gamma'_{p,j}(\omega_0)z)] d\eta. \quad (38)$$

При  $z=0$   $E_\perp(\mathbf{u}, z=0, t) = E_{\perp,z0}(\mathbf{u}, t)$  вместо (38) получим:

$$E_{\perp,z0}(\mathbf{u}, t) = \exp(-i\omega_0 t) \times \int \sum_{p,j} b^{p,1,j}(\eta) \mathbf{e}_{p,1,j}^\perp(\mathbf{u}) \exp(-i\eta t) d\eta. \quad (39)$$

Обращая преобразование Фурье, получаем:

$$F_{\perp,z0}(\mathbf{u}, \eta) = 2\pi \sum_{p,j} b^{p,1,j}(\eta) \mathbf{e}_{p,1,j}^\perp(\mathbf{u}), \quad (40)$$

где  $F_{\perp,z0}(\mathbf{u}, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp,z0}(\mathbf{u}, t) \exp(i\omega_0 t) \exp(i\eta t) dt$ . (41)

Учитывая ортогональность базисных векторов (37), получаем выражение для коэффициентов:

$$b^{q,1,s}(\eta) = \frac{1}{2\pi T_{qs}} \iint \mathbf{e}_\perp^{q,1,s}(\mathbf{u}) F_{\perp,z0}(\mathbf{u}, \eta) d^2\mathbf{u}, \quad (42)$$

где  $T_{qs} = \iint \mathbf{e}_\perp^{q,1,s}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{q,1,s}^\perp(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u}$  – норма.

#### 2.5. Решение для мод волновода в случае квазигармонического пучка

Если поле является модой волновода в пространственной части

$$E_{\perp,z=0}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{e}_{p,1,j}^{\perp}(\mathbf{u}) f(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (43)$$

где  $f(t)$  – функция, описывающая форму импульса.

Тогда

$$b^{q,1,s}(\eta) = \frac{1}{2\pi T_{qs}} \times \\ \times \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_{\perp}^{q,1,s}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{p,1,j}^{\perp}(\mathbf{u}) f(t) \exp(i\eta t) dt d^2\mathbf{u} = \quad (44) \\ = \frac{T_{pj}}{2\pi T_{qs}} \delta_p^q \delta_j^s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\eta t) dt = \frac{\delta_p^q \delta_j^s}{2\pi} F_t(\eta),$$

где  $F_t(\eta)$  – преобразование Фурье от формы импульса.

Подставляя выражения (44) для коэффициентов в поле (38), можно записать:

$$E_{\perp}(\mathbf{u}, t, z) = \\ = \exp(-i\omega_0 t) \int \sum_{p,j} \frac{\delta_p^q \delta_j^s}{2\pi} F_t(\eta) \mathbf{e}_{p,1,j}^{\perp}(\mathbf{u}) \times \quad (45) \\ \times \exp(i\gamma_{p,j}(\omega_0)z) \exp[-i\eta(t - \gamma'_{p,j}(\omega_0)z)] d\eta.$$

С учётом того, что  $F_t(\eta)$  – преобразование Фурье от формы импульса, выражение (45) можно упростить:

$$E_{\perp}(\mathbf{u}, t, z) = \exp[-i\omega_0 t + i\gamma_{q,s}(\omega_0)z] \times \\ \times f\left(t - \gamma'_{q,s}(\omega_0)z\right) \mathbf{e}_{q,1,s}^{\perp}(\mathbf{u}) = \quad (46) \\ = \exp[-i\omega_0 t + i\gamma_{q,s}(\omega_0)z] f\left(t - \frac{z}{v_{q,s}}\right) \mathbf{e}_{q,1,s}^{\perp}(\mathbf{u}).$$

где

$$v_{q,s} = \left(\frac{\mu\epsilon\omega}{c^2 \gamma_{q,s}}\right)^{-1} = \frac{c^2 \gamma_{q,s}}{\mu\epsilon\omega}$$

– групповая скорость распространения волнового пакета.

Очевидно, используя полученный выше результат для отдельной моды волновода, можно обобщить его для суперпозиции волноводных мод, имеющих общую временную зависимость:

$$E_{\perp}(\mathbf{u}, t, z) = \\ = \sum_{q,s} \exp[-i\omega_0 t + i\gamma_{q,s}(\omega_0)z] f\left(t - \frac{z}{v_{q,s}}\right) \mathbf{e}_{q,1,s}^{\perp}(\mathbf{u}). \quad (47)$$

### 2.6. Моделирование распространения суперпозиции мод круглого металлического волновода в случае квазигармонического пучка

Рассмотрим частный случай круглого полого металлического волновода [19, 20].

В этом случае

$$\mathbf{u} \Rightarrow (r, \varphi), \quad \mathbf{e}_{q,1,1}^{\perp}(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{F}_{mq}^{TM}(r, \varphi), \\ \mathbf{e}_{q,1,2}^{\perp}(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{F}_{mq}^{TE}(r, \varphi),$$

где

$$\mathbf{F}_{mp}^{TE}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} F_{mp,r}^{TE} \\ F_{mp,\varphi}^{TE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} J_m(\alpha_{mp} r) \\ i \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} r)}{\partial r} \end{pmatrix} \exp(im\varphi), \quad (48)$$

$$\mathbf{F}_{mq}^{TM}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} F_{mq,r}^{TM} \\ F_{mq,\varphi}^{TM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\partial J_m(\beta_{mq} r)}{\partial r} \\ -\frac{m}{r} J_m(\beta_{mq} r) \end{pmatrix} \exp(im\varphi).$$

Заметим, что собственные моды (48) содержат вихревую фазовую составляющую  $\exp(im\varphi)$  и могут быть использованы для уплотнения каналов передачи информации [21–27].

Тогда поперечное поле в круглом металлическом волноводе:

$$\mathbf{E}_{\perp}(r, \varphi, t, z) = \exp[-i\omega_0 t] \times \\ \times \sum_{m,p,q} \left\{ \exp[i\gamma_{mp,TE}(\omega_0)z] f\left(t - \frac{z}{v_{mp,TE}(\omega_0)}\right) \times \quad (49) \right. \\ \times \mathbf{F}_{mp}^{TE}(r, \varphi) + \exp[i\gamma_{mq,TM}(\omega_0)z] \times \\ \left. \times f\left(t - \frac{z}{v_{mq,TM}(\omega_0)}\right) \mathbf{F}_{mq}^{TM}(r, \varphi) \right\}.$$

Из выражения (49) видно, что дисперсия мод зависит от соотношения констант распространения. В случае отсутствия зависимости показателя преломления от частоты формула для групповых скоростей имеет вид (иначе они будут иметь более сложный вид):

$$v_{mp,TE}(\omega_0) = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_{mp} c}{\omega_0 n}\right)^2}, \quad (50) \\ v_{mq,TM}(\omega_0) = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_{mq} c}{\omega_0 n}\right)^2}.$$

Далее приведены результаты численного моделирования для квазимонохроматического импульсного излучения с базовой длиной волны  $\lambda_0 = 0,532$  мкм, распространяющегося в круглом металлическом волноводе радиусом  $5\lambda_0$  (внутри волновода – воздух). Импульс имеет Гауссову форму

$$f(t) = \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

длительностью  $\sigma = 0,1$  пикосекунда,  $t_0 = 1$  пс. В этом случае  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ , где скорость света в вакууме  $c = 299,79$  мкм/пс.

На рис. 1 показаны интенсивности двух ТЕ-мод волновода и их суперпозиции.

На рис. 2 показан вид импульсов для отдельных мод и их суперпозиции в различные моменты времени.

Как видно из рис. 2, две моды распространяются в волноводе с различной скоростью, поэтому сигнал, представляющий собой суперпозицию двух мод, будет постепенно «разваливаться» при распространении. Картина дисперсии мод в зависимости от расстояния показана на рис. 3. А процесс распада суперпозиции

двух мод на две составляющие при распространении в волноводе показан на рис. 4.

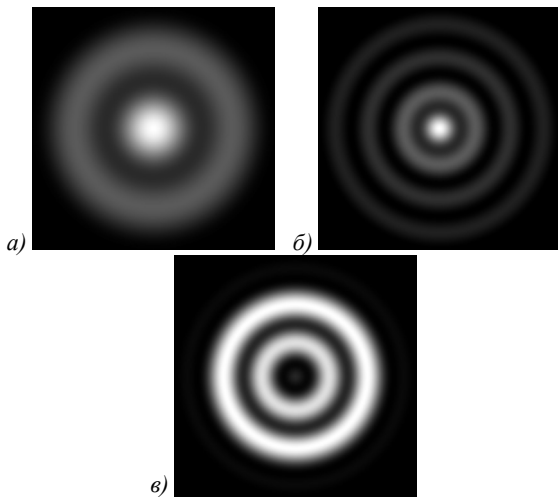


Рис. 1. Интенсивность TE-мод волновода  $(m, p) = (1, 1)$  (а),  $(m, p) = (1, 3)$  (б) и их суперпозиции с весами, одинаковыми по модулю и противоположными по знаку (в)

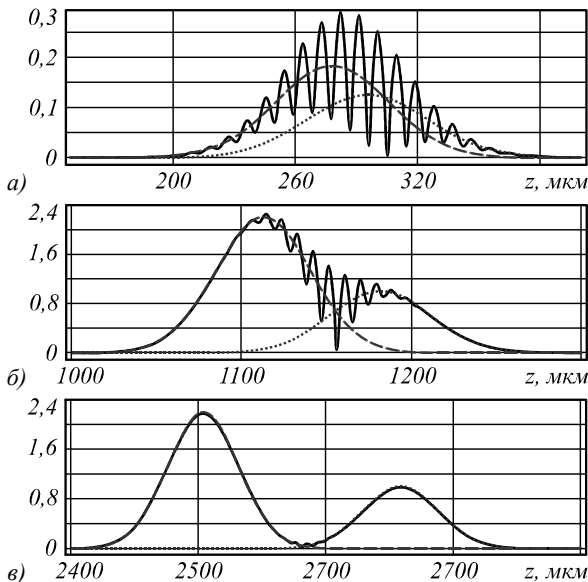


Рис. 2. Амплитуда импульсов для TE-мод волновода  $(1,1)$  (точечная линия),  $(1,3)$  (пунктирная линия) и их суперпозиции (сплошная линия) в различные моменты времени:  $t = 2$  нс (а),  $t = 5$  нс (б),  $t = 10$  нс (в)

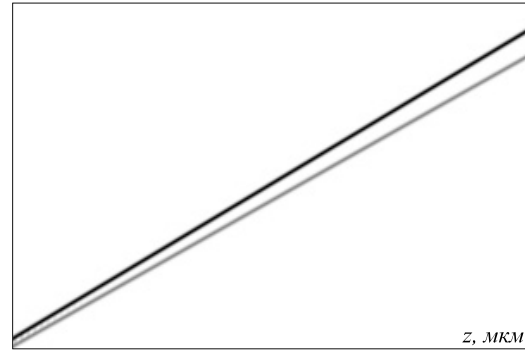


Рис. 3. Дисперсия суперпозиции мод на две составляющие в зависимости от расстояния ( $z$  от 1500 мкм до 5000 мкм) и времени (от 6 нс до 20 нс)

### 3. Вычисление динамических инвариантов электромагнитного поля

#### 3.1. Вычисление гамильтониана поля

Энергия электромагнитного поля имеет вид

$$W = \int (\epsilon E^2 + \mu H^2) dV. \quad (51)$$

Чтобы вычислить энергию, будем в выражении (51) использовать выражения (24), (25). Для удобства дальнейших вычислений перепишем их в виде:

$$E(\mathbf{u}, z, t) = \frac{1}{2} (\hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t)), \quad (52)$$

где

$$\hat{E}(\mathbf{u}, z, t) = \int \sum_{p,j} a^{p,1,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) d\gamma, \quad (53)$$

где

$$\Omega(\omega_{pj}, \gamma) = \exp(-i\omega_{pj}t + i\gamma z),$$

$$\omega_{pj} = c \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} \left[ (\alpha_{pj})^2 + \gamma^2 \right]}.$$

Для поля (52) запишем:

$$\begin{aligned} E^2(\mathbf{u}, z, t) &= \frac{1}{4} (\hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t)) \times \\ &\times (\hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t)) = \\ &= \frac{1}{4} [\hat{E}^2(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \\ &+ \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^{*2}(\mathbf{u}, z, t)]. \end{aligned} \quad (54)$$



Рис. 4. Распространение суперпозиции двух мод в волноводе длиной 18 мм, распределение амплитуды (негатив) в различные моменты времени: а)  $t = 5$  нс, б)  $t = 30$  нс, в)  $t = 60$  нс

Можно показать, что для полей вида (53) выполняется соотношение:

$$\int [\varepsilon \hat{E}^2(\mathbf{u}, z, t) + \mu \hat{H}^2(\mathbf{u}, z, t)] dV = 0.$$

Таким образом, для вычисления (51) понадобятся только члены, содержащие перекрестные произведения:

$$\begin{aligned} & \int \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) dV = \\ & = \int \left( \int \sum_{p_1, j_1} a^{p_1, 1, j_1}(\gamma_1) \mathbf{e}_{p_1, 1, j_1} \Omega(\omega_{p_1, j_1}, \gamma_1) d\gamma_1 \right)^* \left( \int \sum_{p_2, j_2} a^{p_2, 1, j_2}(\gamma_2) \mathbf{e}_{p_2, 1, j_2} \Omega(\omega_{p_2, j_2}, \gamma_2) d\gamma_2 \right) dV = \\ & = \sum_{p_1, j_1} \sum_{p_2, j_2} \int \int \int a^{*p_1, 1, j_1}(\gamma_1) a^{p_2, 1, j_2}(\gamma_2) \mathbf{e}^{p_1, 1, j_1}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{p_2, 1, j_2}(\mathbf{u}) \Omega^*(\omega_{p_1, j_1}, \gamma_1) \Omega(\omega_{p_2, j_2}, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 dV = \\ & = \sum_{p_1, j_1} \sum_{p_2, j_2} \int \int \int a^{*p_1, 1, j_1}(\gamma_1) a^{p_2, 1, j_2}(\gamma_2) \left( \int \Omega^*(\omega_{p_1, j_1}, \gamma_1) \Omega(\omega_{p_2, j_2}, \gamma_2) dz \right) \left( \int \mathbf{e}^{p_1, 1, j_1}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{p_2, 1, j_2}(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} \right) d\gamma_1 d\gamma_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Рассмотрим интеграл по  $z$ :

$$\begin{aligned} & \int \Omega^*(\omega_{p_1, j_1}, \gamma_1) \Omega(\omega_{p_2, j_2}, \gamma_2) dz = \\ & = \int \left( \exp(-i\omega_{p_1, j_1} t + i\gamma_1 z) \right)^* \times \\ & \quad \times \exp(-i\omega_{p_2, j_2} t + i\gamma_2 z) dz = \\ & = 2\pi \exp\left(i(\omega_{p_1, j_1} - \omega_{p_2, j_2}) t\right) \delta(\gamma_1 - \gamma_2). \end{aligned} \tag{57}$$

Также интеграл по поперечным переменным с учётом ортогональности базисных векторов:

$$\int \mathbf{e}^{p_1, 1, j_1}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{p_2, 1, j_2}(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} = T_{p_1, 1, j_1} \delta_{p_2}^{p_1} \delta_{j_2}^{j_1}. \tag{58}$$

С учётом (57) и (58) выражение (56) примет вид:

$$\begin{aligned} W = \int [\varepsilon E^2(\mathbf{u}, z, t) + \mu H^2(\mathbf{u}, z, t)] dV = \frac{2\pi\varepsilon}{4} \left( \sum_{p, j} T_{p, 1, j} \int (a^{*p, 1, j}(\gamma) a^{p, 1, j}(\gamma) + a^{p, 1, j}(\gamma) a^{*p, 1, j}(\gamma)) d\gamma \right) + \\ + \frac{2\pi\mu}{4} \left( \sum_{p, j} T_{p, 2, j} \int (a^{*p, 2, j}(\gamma) a^{p, 2, j}(\gamma) + a^{p, 2, j}(\gamma) a^{*p, 2, j}(\gamma)) d\gamma \right). \end{aligned} \tag{61}$$

Учитывая, что

$$a^{p, 1, j} = a^{p, 2, j},$$

получаем основной результат

$$\begin{aligned} W = \sum_{p, j} W_{p, j} \times \\ \times \int (a^{*p, j}(\gamma) a^{p, j}(\gamma) + a^{p, j}(\gamma) a^{*p, j}(\gamma)) d\gamma. \end{aligned} \tag{62}$$

### 3.2. Вычисление импульса поля

Импульс поля определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dV = \\ = \frac{1}{4} \int \left[ (\hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t)) \times \right. \\ \left. \times (\hat{H}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t)) \right] dV = \\ = \frac{1}{4} \int \left[ \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) \times \hat{H}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) \times \right. \\ \left. \times \hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \times \hat{H}(\mathbf{u}, z, t) + \right. \\ \left. + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \times \hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t) \right] dV. \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} W = \int [\varepsilon E^2(\mathbf{u}, z, t) + \mu H^2(\mathbf{u}, z, t)] dV = \\ = \frac{\varepsilon}{4} \int [\hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t)] dV + \\ + \frac{\mu}{4} \int [\hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{H}(\mathbf{u}, z, t) + \hat{H}(\mathbf{u}, z, t) \hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t)] dV. \end{aligned} \tag{55}$$

Рассмотрим первый член в (55)

$$\begin{aligned} \int \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) dV = \\ = 2\pi \sum_{p_1, j_1} \sum_{p_2, j_2} T_{p_1, 1, j_1} \int \int a^{*p_1, 1, j_1}(\gamma_1) a^{p_2, 1, j_2}(\gamma_2) \times \\ \times \exp\left(i(\omega_{p_1, j_1} - \omega_{p_2, j_2}) t\right) \delta(\gamma_1 - \gamma_2) \delta_{p_2}^{p_1} \delta_{j_2}^{j_1} d\gamma_1 d\gamma_2. \end{aligned} \tag{59}$$

С учётом свойств дельта-символов, вместо (59), получим:

$$\begin{aligned} \int \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) dV = \\ = 2\pi \sum_{p, j} T_{p, 1, j} \int a^{*p, 1, j}(\gamma) a^{p, 1, j}(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \tag{60}$$

Аналогичные выражения можно получить для остальных слагаемых. Таким образом,

Можно показать, что в (63) важны только перекрёстные члены, т.е.:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \frac{1}{4} \int \left[ \hat{E}(\mathbf{u}, z, t) \times \hat{H}^*(\mathbf{u}, z, t) + \right. \\ \left. + \hat{E}^*(\mathbf{u}, z, t) \times \hat{H}(\mathbf{u}, z, t) \right] dV. \end{aligned} \tag{64}$$

В данном случае отличной от нуля будет только продольная компонента импульса. Поперечные компоненты импульса будут равны нулю, так как энергия не распространяется в перпендикулярном направлении

$$\begin{aligned} P_z = \\ = \sum_{p, j} \sum_{q, s} \int \int \int (a^{p, 1, j}(\gamma_1) a^{*q, 2, s}(\gamma_2) [\mathbf{e}_{p, 1, j} \times \mathbf{e}_{q, 2, s}]_z) \times \\ \times \Omega(\omega_{p, j}, \gamma_1) \Omega^*(\omega_{q, s}, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 dV + \\ + \text{comp. conj.} \end{aligned} \tag{65}$$

В этой сумме отличными от нуля являются только следующие продольные проекции векторного произведения

$$[\mathbf{e}_{p,1,1} \times \mathbf{e}_{q,2,2}^*]_z = \frac{i\gamma_{p,1}}{\alpha_{p,1}^2} \left( -\frac{ik_0 \varepsilon}{\alpha_{q,1}^2} \right) (\mathbf{e}_{\perp}^{p,1,1} \mathbf{e}_{q,2,1}^*)^*, \quad (66)$$

$$[\mathbf{e}_{p,1,2} \times \mathbf{e}_{q,2,2}^*]_z = \frac{ik_0 \mu}{\alpha_{p,2}^2} \left( \frac{i\gamma_{q,2}}{\alpha_{q,2}^2} \right) (\mathbf{e}_{\perp}^{p,1,2} \mathbf{e}_{q,2,2}^{\perp})^*. \quad (67)$$

Учитывая ортогональность, получаем

$$P_z = 2\pi \sum_{p,j} \int \left( \int [\mathbf{e}_{p,1,j} \times \mathbf{e}_{p,2,j}^*]_z d^2u \right) \times \\ \times (a^{p,1,j}(\gamma_1) a^{*p,2,j}(\gamma_2) + \\ + a^{*p,2,j}(\gamma_1) a^{p,1,j}(\gamma_2)) d\gamma_1. \quad (68)$$

Далее, интегрируя по продольному импульсу и переменной  $z$ , получаем ещё один основной результат

$$P_z = \sum_{p,j} \int P_{p,j} (a^{p,j}(\gamma) a^{*p,j}(\gamma) + \\ + a^{*p,j}(\gamma) a^{p,j}(\gamma)) d\gamma. \quad (69)$$

#### 4. Квантование по модам металлического волновода

В предыдущих параграфах были получены формулы:

- для электрического и магнитного поля в волноводе (24), (25);
- гамильтониан электромагнитного поля в металлическом волноводе (62);
- выражение для продольной компоненты импульса в металлическом волноводе (69).

Далее переходим к квантованию электромагнитного поля в волноводе. Сначала переходим к другим величинам

$$a^{p,j}(\gamma) = B^{p,j} b^{p,j}(\gamma). \quad (70)$$

В этом случае выражения для аналитических сигналов полей принимают вид:

$$E(t) = \int \sum_{p,j} B^{p,j} b^{p,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) d\gamma, \quad (71)$$

$$H(t) = \int \sum_{p,j} B^{p,j} b^{p,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,2,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) d\gamma. \quad (72)$$

Выражение для энергии (гамильтониан электромагнитного поля) принимает вид

$$W = \sum_{p,j} W_{p,j} B^{p,j} B^{*p,j} \times \\ \times \int (b^{*p,j}(\gamma) b^{p,j}(\gamma) + b^{p,j}(\gamma) b^{*p,j}(\gamma)) d\gamma. \quad (73)$$

Выражение для продольной компоненты импульса принимает вид:

$$P_z = \sum_{p,j} \int B^{p,j} B^{*p,j} \times \\ \times P_{p,j} (b^{p,j}(\gamma) b^{*p,j}(\gamma) + b^{*p,j}(\gamma) b^{p,j}(\gamma)) d\gamma. \quad (74)$$

Далее полагаем, что величины  $\mathbf{b}^{p,j}(\gamma)$  становятся операторами, комплексно-сопряженные величины становятся сопряженными операторами  $(\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+$ , действующими в пространстве состояний электро-

магнитного поля. Именно эти состояния будут определять поле, а не аналитический сигнал. Величины  $B^{p,j}$  выбираем таким образом, чтобы операторы удовлетворяли уравнению, которое следует из уравнения Гейзенберга для произвольного оператора:

$$-i\omega_{p,j} \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) = \frac{i}{h} \{ \mathbf{W}, \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) \} = \\ = \frac{i}{h} (\mathbf{W} \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) - \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) \mathbf{W}), \quad (75) \\ i\omega_{p,j} (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ = \frac{i}{h} \{ \mathbf{W}, (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ \} = \\ = \frac{i}{h} (\mathbf{W} (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ - (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ \mathbf{W}).$$

Для того, чтобы удовлетворить этим уравнениям, необходимо положить, что коммутаторы этих операторов удовлетворяют выражениям

$$\{ \mathbf{b}^{p,j}(\gamma_1), (\mathbf{b}^{q,s}(\gamma_2))^+ \} = \delta_q^p \delta_s^j \delta(\gamma_1 - \gamma_2). \quad (76)$$

Остальные коммутаторы полагаем равными нулю. В этом случае выражения для операторов полей:

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \int \sum_{p,j} B^{p,j} \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) d\gamma, \quad (77)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = \int \sum_{p,j} B^{p,j} \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) \mathbf{e}_{p,2,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) d\gamma. \quad (78)$$

С учётом (76) выражения для оператора энергии и импульса принимают следующий вид:

$$\mathbf{W} = 2 \sum_{p,j} W_{p,j} B^{p,j} \int (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) d\gamma, \quad (79)$$

$$\mathbf{P}_z = 2 \sum_{p,j} \int B^{p,j} P_{p,j} (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+ \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) d\gamma.$$

Эти операторы действуют в пространстве состояний электромагнитного поля. Будем обозначать эти состояния  $|\alpha\rangle$ . Тогда наблюдаемые электрическое и магнитное поля, энергии и продольные компоненты импульсов будут определяться не аналитическими сигналами, а средними значениями операторов, соответствующих этим аналитическим сигналам

$$\mathbf{E}(t) = \langle \alpha | \tilde{\mathbf{E}} | \alpha \rangle, \\ \mathbf{H}(t) = \langle \alpha | \tilde{\mathbf{H}} | \alpha \rangle, \\ W = \langle \alpha | \mathbf{W} | \alpha \rangle, \\ P_z = \langle \alpha | \mathbf{P}_z | \alpha \rangle. \quad (80)$$

Следует отметить, что в этом случае нам необходимо ввести понятие скалярного произведения состояний  $\langle \beta | | \alpha \rangle$  и определить действия операторов  $\mathbf{b}^{p,j}(\gamma) | \alpha \rangle$ ,  $\langle \alpha | (\mathbf{b}^{p,j}(\gamma))^+$  на вектора состояния электромагнитного поля. Следует отметить, что в этом случае характеристики электромагнитных полей, вычисленные как средние значения операторов, будут отличны от соответствующих величин в классической теории поля. В этом случае будет наблюдаться зависимость от числа фотонов в каждой моде возбуждаемого электромагнитного поля.



Самым элементарным квантовым состоянием является когерентное состояние. Когерентное состояние электромагнитного поля определяется:

$$\mathbf{b}^{p,j}(\gamma)|\alpha\rangle = c^{p,j}|\alpha\rangle, \quad (81)$$

где  $c^{p,j}$  – обычные комплексные числа.

В этом случае действие оператора электромагнитного поля на когерентное состояние имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(t)|\alpha\rangle &= \\ &= \int \sum_{p,j} B^{pj} \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) \mathbf{b}^{p,j}(\gamma) |\alpha\rangle d\gamma = \\ &= \int \sum_{p,j} B^{pj} \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) c^{p,j}(\gamma) |\alpha\rangle d\gamma. \end{aligned} \quad (82)$$

Среднее значение оператора электромагнитного поля имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \tilde{\mathbf{E}} | \alpha \rangle &= \langle \alpha | |\alpha \rangle \times \\ &\times \int \sum_{p,j} B^{pj} \mathbf{e}_{p,1,j} \Omega(\omega_{pj}, \gamma) c^{p,j}(\gamma) d\gamma, \end{aligned} \quad (83)$$

$\langle \alpha | |\alpha \rangle$  – это обыкновенное действительное число.

Из выражения (83) следует, что среднее значение оператора электрического поля для когерентного случая описывается таким же выражением, что и электрическое поле. Следует отметить, что операторы электрического и магнитного полей удовлетворяют тем же уравнениям Максвелла (это нетрудно показать исходя из вида операторов).

В случае, если состояния электрического поля не являются когерентными и описываются более сложным образом, выражение для среднего значения поля не имеет простого вида. На практике состояния электромагнитного поля не описываются вектором состояний, а описываются матрицей плотности. В этом случае среднее значение любых операторов выражается в виде

$$\langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle = Sp(\rho \tilde{\mathbf{E}}), \quad (84)$$

где  $\langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle$  – среднее значение физической величины,  $\rho$  – матрица плотности состояния электромагнитного поля,  $\tilde{\mathbf{E}}$  – оператор физической величины.

В этом случае вычисление среднего значения физических величин в волноводе представляет непростою задачу, которая будет рассмотрена в дальнейшем.

### Заключение

В данной работе выполнено строгое решение задачи о распространении импульсов поля внутри волновода со сверхпроводящей оболочкой произвольной формы с граничными условиями на срезе волокна, зависящими от времени.

Удобное аналитическое решение задачи было получено в случае квазигармонического сигнала, у которого ширина импульса в частотной области намного меньше, чем несущая частота.

Результаты, полученные для волновода со сверхпроводящей оболочкой, можно перенести на случай волокна с произвольным поперечным распределением показателя преломления. Сверхпроводящая обо-

лочка была выбрана для удобства. В этом случае можно точно поставить граничные условия. На практике можно рассматривать волокна с произвольным профилем показателя преломления (градиентные и ступенчатые), поместив проводящую оболочку на достаточном удалении от волокна. В этом случае моды будут не ортогональны. Степень неортогональности будет зависеть от градиента показателя преломления. Для слабоградиентных волокон можно считать моды ортогональными.

Рассмотрен расчёт динамических инвариантов импульсов при распространении в волноводе с проводящей оболочкой произвольной формы.

Описана процедура квантования электромагнитного поля в волноводе со сверхпроводящими стенками. Полученные выражения в случае квантованных электромагнитных полей в дальнейшем можно использовать для описания распространения неклассических состояний электромагнитного поля внутри волноводов. Данный алгоритм квантования можно распространить на случай, если показатель преломления волокна зависит от поперечных координат. Однако в этом случае моды не будут строго ортогональны, поэтому процедура квантования будет приближённой.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грантам № 18-29-20045 мк и № 16-29-09528 офи-м) в части численного моделирования и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-Г3/Ч3363/26) в части теоретических выкладок.

### Литература

1. **Gloge, D.** Weakly guided fibers / D. Gloge // Applied Optics. – 1971. – Vol. 10, Issue 10. – P. 2252-2258. – DOI: 10.1364/AO.10.002252.
2. **Cherin, A.H.** An introduction to optical fibers / A.H. Cherin. – Singapore: McGraw-Hill College, 1983. – 326 p. – ISBN: 978-0-07-010703-8.
3. **Snyder, A.W.** Optical waveguide theory / A.W. Snyder, J.D. Love. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers; 1983. – 745 p. – ISBN: 978-0-412-09950-2.
4. **Yeh, C.** Handbook of fiber optics: Theory and applications / C. Yeh. – New York: Academic Press Inc., 1990. – 382 p. – ISBN: 978-0-12-770455-5.
5. **Agrawal, G.P.** Fiber-optic communication systems / G.P. Agrawal. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – ISBN: 978-0-471-21571-4.
6. **Marcatili, E.A.T.** Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers / E.A.T. Marcatili, R.A. Schmelzter // The Bell System Technical Journal. – 1964. – Vol. 43, Issue 4. – P. 1783-1809. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1964.tb04108.x.
7. **Miyagi, M.** Design theory of dielectric-coated circular metallic waveguides for infrared transmission / M. Miyagi, S. Kawakami // Journal of Lightwave Technology. – 1984. – Vol. 2, Issue 2. – P. 116-126. – DOI: 10.1109/JLT.1984.1073590.
8. **Kotlyar, V.V.** Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber / V.V. Kotlyar,

- V.A. Soifer, S.N. Khonina // Optics and Lasers in Engineering. – 1998. – Vol. 29, Issues 4-5. – P. 343-350. – DOI: 10.1016/S0143-8166(97)00121-8.
9. **Khonina, S.N.** Propagation of laser vortex beams in a parabolic optical fiber / S.N. Khonina, A.S. Striletz, A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // Proceedings of SPIE. – 2010. – Vol. 7523. – 75230B (12 p.). – DOI: 10.1117/12.854883.
  10. **Wang, C.Y.** Determination of TM and TE modes of the circular waveguide with a cross-shaped insert using eigenfunction expansions and domain matching / C.Y. Wang // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2016. – Vol. 30, Issue 10. – P. 1334-1344. – DOI: 10.1080/09205071.2016.1199331.
  11. **Jauch, J.M.** Phenomenological quantum-electrodynamics / J.M. Jauch, K.M. Watson // Physical Review. – 1948. – Vol. 74, Issue 8. – 950. – DOI: 10.1103/PhysRev.74.950.
  12. **Wu, T.T.** Quantization of the electromagnetic field / T.T. Wu // Physical Review. – 1963. – Vol. 129, Issue 3. – P. 1420-1423. – DOI: 10.1103/PhysRev.129.1420.
  13. **Carniglia, C.K.** Quantization of evanescent electromagnetic waves / C.K. Carniglia, L. Mandel // Physical Review D. – 1971. – Vol. 3, Issue 2. – 280. – DOI: 10.1103/PhysRevD.3.280.
  14. **von Foerster, T.** Quantum theory of light propagation in amplifying media / T. von Foerster, R.J. Glauber // Physical Review A. – 1971. – Vol. 3, Issue 4. – 3. – DOI: 10.1103/PhysRevA.3.1484.
  15. **Knöll, L.** Action of passive, lossless optical systems in quantum optics / L. Knöll, W. Vogel, D.-G. Welsch // Physical Review A. – 1987. – Vol. 36, Issue 8. – P. 3803-3818. – DOI: 10.1103/PhysRevA.36.3803.
  16. **Glauber, R.J.** Quantum optics of dielectric media / R.J. Glauber, M. Lewenstein // Physical Review A. – 1991. – Vol. 43, Issue 1. – P. 467-491. – DOI: 10.1103/PhysRevA.43.467.
  17. **Климов, В.В.** Вакуумное расщепление уровней энергии в системе атом-диэлектрическая микросфера / В.В. Климов, В.С. Летохов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1997. – Т. 111, вып. 1. – С. 44-51.
  18. **Matloop, R.** Electromagnetic field quantization in an absorbing medium / R. Matloop // Physical Review A. – 1999. – Vol. 60, Issue 1. – 50. – DOI: 10.1103/PhysRevA.60.50.
  19. **Харитонов, С.И.** Преобразование конической волны с круговой поляризацией в вихревой цилиндрически полярризованный пучок в металлическом волноводе / С.И. Харитонов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 197-211. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-197-211.
  20. **Харитонов, С.И.** Вычисление момента импульса электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 588-605. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
  21. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.
  22. **Khonina, S.N.** Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode self-imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer. – In: Recent progress in optical fiber research / ed. by M. Yasin, S.W. Harun, H. Arof, Rijeka, Croatia: InTech, 2012. – Chap. 15. – P. 327-352. – DOI: 10.5772/28067.
  23. **Ramachandran, S.** Optical vortices in fiber / S. Ramachandran, P. Kristensen // Nanophotonics. – 2013. – Vol. 2, Issues 5-6. – P. 455-474. – DOI: 10.1515/nanoph-2013-0047.
  24. **Bozinovic, N.** Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // Science. – 2013. – Vol. 340, Issue 6140. – P. 1545-1548. – DOI: 10.1126/science.1237861.
  25. **Kirilenko, M.S.** Information transmission using optical vortices / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2013. – Vol. 22, No. 2. – P. 81-89. – DOI: 10.3103/S1060992X13020069.
  26. **Berglind, E.** Humblet's decomposition of the electromagnetic angular moment in metallic waveguides / E. Berglind, G. Bjork // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2014. – Vol. 2. – P. 779-788. – DOI: 10.1109/TMTT.2014.2308891.
  27. **Kirilenko, M.S.** Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Optics Communications. – 2018. – Vol. 410. – P. 153-159. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.

#### Сведения об авторах

**Харитонов Сергей Иванович**, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры наноинженерии, ведущий научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

**Казанский Николай Львович** в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Заведующий базовой кафедрой высокопроизводительных вычислений Самарского университета в ИСОИ РАН. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанопотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm> . E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru) .

ГРНТИ: 29.31.15, 29.33.43.

Поступила в редакцию 30 октября 2018 г. Окончательный вариант – 20 ноября 2018 г.

## PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC PULSES AND CALCULATION OF DYNAMIC INVARIANTS IN A WAVEGUIDE WITH A CONVEX SHELL

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>1</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye shosse 34

### Abstract

In this paper, we consider a method for solving a system of Maxwell's equations in the case of time-dependent boundary conditions at the end of a waveguide with superconducting walls. An explicit analytical solution is obtained for a quasi-harmonic signal whose pulse width in the frequency domain is much smaller than the carrier frequency. Numerical examples are calculated in the case of a Gaussian pulse as a superposition of modes propagating in a circular hollow metal waveguide. The calculation of dynamic invariants of short pulses propagating in a waveguide with an arbitrarily-shaped conducting shell is considered. A procedure for quantizing an electromagnetic field in a waveguide with superconducting walls is described.

**Keywords:** waveguide modes, field pulse, dynamic invariants, electromagnetic field quantization.

**Citation:** Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN, Kazanskiy NL. Propagation of electromagnetic pulses and calculation of dynamic invariants in a waveguide with a convex shell. *Computer Optics* 2018, 42(6): 947-958. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-947-958.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grants No. 18-29-20045-mk and 16-29-09528 ofi-m (numerical calculations) and the RF Ministry of Science and Higher Education under the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS' state project 007-GZ/Ch3363/26 (theoretical results).

### References

- [1] Gloge D. Weakly guided fibers. *Appl Opt* 1971; 10(10): 2252-2258. DOI: 10.1364/AO.10.002252.
- [2] Cherin AH. An introduction to optical fibers. Singapore: McGraw-Hill College; 1983. ISBN: 978-0-07-010703-8.
- [3] Snyder AW, Love JD. *Optical waveguide theory*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers; 1983. ISBN: 978-0-412-09950-2.
- [4] Yeh C. *Handbook of fiber optics: Theory and applications*. New York: Academic Press Inc; 1990. ISBN: 978-0-12-770455-5.
- [5] Agrawal GP. *Fiber-optic communication systems*. 3<sup>rd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons Inc; 2002. ISBN: 978-0-471-21571-4.
- [6] Marcatili EAT, Schmeltzer RA. Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers. *The Bell System Technical Journal* 1964; 43(4): 1783-1809. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1964.tb04108.x.
- [7] Miyagi M, Kawakami S. Design theory of dielectric-coated circular metallic waveguides for infrared transmission. *J Lightw Technol* 1984; 2(2): 116-126. DOI: 10.1109/JLT.1984.1073590.
- [8] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber. *Opt Las Eng* 1998; 29(4-5): 343-350. DOI: 10.1016/S0143-8166(97)00121-8.
- [9] Khonina SN, Striletz AS, Kovalev AA, Kotlyar VV. Propagation of laser vortex beams in a parabolic optical fiber. *Proc SPIE* 2010; 7523: 75230B. DOI: 10.1117/12.854883.
- [10] Wang CY. Determination of TM and TE modes of the circular waveguide with a cross-shaped insert using eigenfunction expansions and domain matching. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 2016; 30(10): 1334-1344. DOI: 10.1080/09205071.2016.1199331
- [11] Jauch JM, Watson KM. Phenomenological quantum-electrodynamics. *Phys Rev* 1948; 74(8): 950. DOI: 10.1103/PhysRev.74.950.
- [12] Wu TT. Quantization of the electromagnetic field. *Phys Rev* 1963; 129(3): 1420-1423. DOI: 10.1103/PhysRev.129.1420.
- [13] Carniglia CK, Mandel L. Quantization of evanescent electromagnetic waves. *Phys Rev D* 1971; 3(2): 280. DOI: 10.1103/PhysRevD.3.280.
- [14] von Foerster T, Glauber RJ. Quantum theory of light propagation in amplifying media. *Phys Rev A* 1971; 3(4): 3. DOI: 10.1103/PhysRevA.3.1484.
- [15] Knoll L, Vogel W, Welsch D-G. Action of passive, lossless optical systems in quantum optics. *Phys Rev A* 1987; 36(8): 3803-3818. DOI: 10.1103/PhysRevA.36.3803.

- [16] Glauber RJ, Lewenstein M. Quantum optics of dielectric media. *Phys Rev A* 1991; 43(1): 467-491. DOI: 10.1103/PhysRevA.43.467.
- [17] Klimov VV, Letokhov VS. Vacuum splitting of the energy levels of a system consisting of an atom and a dielectric microsphere. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 1997; 84(1): 24-28. DOI: 10.1134/1.558148.
- [18] Matloop R. Electromagnetic field quantization in an absorbing medium. *Phys Rev A* 1999; 60(1): 50. DOI: 10.1103/PhysRevA.60.50.
- [19] Kharitonov SI, Khonina SN. Conversion of a conical wave with circular polarization into a vortex cylindrically polarized beam in a metal waveguide [In Russian]. *Computer Optics* 2018; 42(2): 197-211. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-197-211.
- [20] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls [In Russian]. *Computer Optics* 2018; 42(4): 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
- [21] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
- [22] Khonina SN, Kazanskiy NL, Soifer VA. Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode self-imaging. In Book: Yasin M, Harun SW, Arof H, eds. *Recent progress in optical fiber research*. Ch 15. Rijeka, Croatia: InTech; 2012: 327-352. DOI: 10.5772/28067.
- [23] Ramachandran S, Kristensen P. Optical vortices in fiber, *Nanophotonics* 2013; 2(5-6): 455-474. DOI: 10.1515/nanoph-2013-0047.
- [24] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, Tur M, Kristensen P, Huang H, Willner AE, Ramachandran S. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science* 2013; 340(6140): 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [25] Kirilenko MS, Khonina SN. Information transmission using optical vortices. *Optical Memory and Neural Networks* 2013; 22(2): 81-89. DOI: 10.3103/S1060992X13020069.
- [26] Berglind E, Bjork G. Humblet's decomposition of the electromagnetic angular moment in metallic waveguides, *IEEE Trans Micro Theory Tech* 2014; 2: 779-788. DOI: 10.1109/TMTT.2014.2308891.
- [27] Kirilenko MS, Khonina SN. Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system, *Opt Commun* 2018; 410: 153-159. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.

#### Authors' information

**Sergey Ivanovich Kharitonov** (b. 1961) leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University (presently, Samara National Research University). 1993 – defended his dissertation “Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser”. 2010 – defended his doctoral thesis on “Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements”. Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of S.I. Kharitonov scientific papers includes 87 articles, 5 patents. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Sergey Gennadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

**Nikolay Lvovich Kazanskiy** graduated with honors (1981) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”, also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”. He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

*Received October 20, 2018. The final version – November 30, 2018.*