

Формирование заданных распределений на основе разложения по вихревым собственным функциям ограниченного непараксиального оператора распространения

С.Н. Хонина^{1,2}, С.Г. Волоотовский¹, М.С. Кириленко²

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрено решение задачи преодоления дифракционного предела на основе представления оптического сигнала в виде суперпозиции коммуникационных мод, согласованных с вихревыми собственными функциями ограниченного (в пространственной и спектральной областях) непараксиального оператора распространения в свободном пространстве. Непараксиальное распространение лазерных пучков описано с помощью разложения по коническим волнам на основе преобразования Фурье–Ханкеля m -го порядка. Собственные функции такого оператора, имеющие собственные значения, близкие к единице, определяют число степеней свободы и характеристики оптического сигнала, передаваемого без искажения на заданное расстояние. На основе рассмотренного подхода разработан параметрический метод решения обратной задачи дифракции, включая преодоление дифракционного предела.

Ключевые слова: ближняя зона дифракции; ограниченный оператор распространения; вихревые собственные функции; аппроксимация сигнала; решение обратной задачи.

Цитирование: Хонина, С.Н. Формирование заданных распределений на основе разложения по вихревым собственным функциям ограниченного непараксиального оператора распространения / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский, М.С. Кириленко // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 184-192. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-184-192.

Введение

Основные проблемы оптической передачи информации связаны ограничением пространственного спектра и дифракционным пределом. Преодоление дифракционного предела, определённого в соответствии с теорией Эбби и критерием Рэлея [1], является темой множества фундаментальных и прикладных исследований в современной оптике. Высокий интерес связан с тем, что область применения сверхразрешения вовсе не ограничивается улучшением качества изображений. Уже показана эффективность в уплотнении записи на оптических носителях информации, в литографии и наноструктурировании, оптическом манипулировании вплоть до атомных размеров и многих других областях.

В последнее время было предпринято множество попыток по преодолению дифракционного предела, что могло бы обеспечить визуализацию деталей, размеры которых меньше половины длины волны. Одно из направлений в преодолении дифракционного предела основано на использовании затухающих волн [2, 3], распространяющихся на расстояние менее длины волны. Однако такой метод основан на увеличении интервала пространственных частот, обеспечивающих сохранение затухающих компонент поля источника, ориентирован на оптику ближнего поля [4–8] и не подходит для оптических систем, предназначенных передавать информацию на значительные расстояния.

Другим подходом к решению задачи сверхразрешения является метод суперосцилляций [9–11], обеспечивающий уменьшение размера светового пятна за

пределами зоны ближнего поля. Однако в этом случае платой за преодоление дифракционного предела является значительный рост боковых лепестков и потеря энергии.

Таким образом, каждый подход обладает своими достоинствами и недостатками, которые следуют из пространственных ограничений используемой оптической системы. Для оценки разрешающей способности оптической системы можно использовать понятие коммуникационных мод [12–14]. С точки зрения математики коммуникационные моды представляют собой собственные функции некоторого оптического оператора распространения. Известные моды лазерного излучения являются собственными функциями неограниченных (либо в объектной, либо в спектральной области) оптических систем и могут использоваться для приближённого моделирования. Для более точного описания реальных оптических систем, имеющих ограничения как на входную апертуру, так и по пространственным частотам, необходимо численно рассчитывать набор собственных функций (коммуникационных мод) системы, который будет меняться при изменении ограничений.

Хорошо известным примером коммуникационных мод в декартовой системе координат для ограниченного преобразования Фурье являются вытянутые сфероидальные функции [15, 16]. Коммуникационными модами для ограниченного преобразования Ханкеля являются круговые [17] и обобщённые [18] сфероидальные функции.

В работах [19, 20] демонстрируется возможность аппроксимации одномерных и двумерных ограничен-

ных сигналов с помощью собственных функций, проходящих через линзовую систему без искажений. Однако сигналы с вихревой фазовой составляющей в ближней зоне дифракции не рассматривались.

Вихревые оптические пучки с фазовой сингулярностью [21, 22] привлекают повышенное внимание исследователей в связи с обширной областью применения таких пучков, включая уплотнение каналов связи на основе орбитального углового момента [23, 24], повышение разрешения [25], оптическое микроманипулирование [26], лазерная обработка и структурирование [27–29]. Во многих этих приложениях желательно формирование полей со сверхразрешением, в том числе за пределами зоны затухающих волн.

В данной работе рассматривается решение задачи преодоления дифракционного предела на основе представления оптического сигнала в виде суперпозиции коммуникационных мод, согласованных с вихревыми собственным функциям ограниченного (в пространственной и спектральной областях) непараксиального оператора распространения в свободном пространстве. Рассматриваемый оператор распространения основан на разложении поля по коническим волнам с использованием преобразования Фурье–Ханкеля m -го порядка. На основе разложения поля по рассчитанным вихревым собственным функциям разработан параметрический метод решения обратной задачи дифракции, включая преодоление дифракционного предела.

1. Теоретические основы

Скалярный непараксиальный оператор распространения с использованием разложения по плоским волнам записывается следующим образом [30]:

$$E(u, v, z) = \iint_{\Sigma_s} F(\xi, \eta) \exp(ikz\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}) \times \exp[ik(\xi u + \eta v)] d\xi d\eta, \tag{1}$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \exp[-ik(\xi x + \eta y)] dx dy,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны излучения, $F(\xi, \eta)$ – пространственный спектр разложения входного поля по плоским волнам, Σ_s : $\sigma_1 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \sigma_2$ – область учитываемых пространственных частот. При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ рассматриваются только распространяющиеся волны, а при $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 > 1$ – только затухающие волны.

В случае, когда входное поле является вихревым с порядком вихря m :

$$E_0(x, y) = E_0(r, \varphi) = E_0(r) \exp(im\varphi), \tag{2}$$

выражение (1) можно упростить [31]:

$$E(\rho, \theta, z) = k^2 \exp(im\theta) \times \int_0^{\sigma_0} \int_0^{\eta} E_0(r) J_m(k\sigma r) r dr \times \exp(ikz\sqrt{1-\sigma^2}) J_m(k\sigma\rho) \sigma d\sigma, \tag{3}$$

где r_0 – радиус входного поля, ρ – радиальная координата в выходной плоскости, σ – радиальная координата в частотной плоскости, σ_0 – радиус учитываемых пространственных частот, θ – угловая координата в выходной плоскости.

Запишем оператор (3) в виде:

$$E(\rho, \theta, z) = \int_0^{\eta} E_0(r) K_m(r, \rho, \theta, z) r dr, \tag{4}$$

где

$$K_m(r, \rho, \theta, z) = k^2 \exp(im\theta) \int_0^{\sigma_0} \exp(ikz\sqrt{1-\sigma^2}) \times J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma\rho\right) J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma r\right) \sigma d\sigma. \tag{5}$$

Выделим радиальную часть ядра оператора:

$$K_{m,L}(r, \rho) = k^2 \int_0^{\sigma_0} \exp(ikL\sqrt{1-\sigma^2}) \times J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma\rho\right) J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma r\right) \sigma d\sigma. \tag{6}$$

Тогда задача вычисления радиальной части вихревых собственных функций в ближней зоне дифракции сводится к поиску собственных функций ограниченного оператора (6) в следующем виде:

$$b_{n,m,L} \Psi_{n,m,L}(\rho) = \int_0^{\eta} \Psi_{n,m,L}(r) K_{m,L}(r, \rho) r dr, \tag{7}$$

где L – расстояние, $b_{n,m,L}$ – собственные значения, $\Psi_{n,m,L}(\rho)$ – радиальная часть собственных функций, $\Psi_{n,m,L}(\rho, \theta) = \Psi_{n,m,L}(\rho) \exp(im\theta)$ – собственные функции.

Очевидно, характеристики собственных функций будут зависеть не только от расстояния распространения L и порядка m , но и от ограничений, наложенных на поле в объектной и спектральной областях, т.е. от значений r_0 и σ_0 соответственно.

Имея набор собственных векторов, можно получить на их основе аппроксимацию некоторого заданного сигнала $F_L(\rho)$ на расстоянии L :

$$F_L(\rho) \approx F_{L,m}(\rho) = \sum_{n=0}^N c_{n,m,L} \Psi_{n,m,L}(\rho), \tag{8}$$

$$\text{где } c_{n,m,L} = \int_0^{\rho_0} F_L(\rho) \Psi_{n,m,L}^*(\rho) \rho d\rho. \tag{9}$$

Решение обратной задачи дифракции в этом случае, т.е. входное распределение, формирующее заданный сигнал (8), будет выглядеть следующим образом:

$$G_{L,m}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \frac{c_{n,m,L}}{b_{n,m,L}} \Psi_{n,m,L}(r, \varphi). \tag{10}$$

Из (10) очевидно, что использование в аппроксимации собственных функций с собственными значениями, близкими к нулю, нецелесообразно.

Как следует из (3), формирование осесимметричного сигнала $F_L(\rho)$ можно выполнить на основе вихревых функций различного порядка, так как фазовая

составляющая $\exp(im\theta)$ при детектировании интенсивности поля не проявляется.

2. Решение обратной задачи в области затухающих волн

Сначала рассмотрим применение разработанного метода в области затухающих волн.

Расчёт собственных значений и собственных функций был выполнен для различных значений параметров при тестовой длине волны лазерного излучения $\lambda = 1$ мкм.

Рассмотрим расчёт собственных функций в области затухающих волн, т.е. на расстоянии менее длины волны $L = 0,5\lambda$ при $\sigma_0 = 5$, радиус входной области выбран равным $r_0 = 10\lambda$.

На рис. 1 показан вид матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) для $m = 0, 1, 5, 9$. Как видно, с увеличением номера m область нулевых значений в нижней левой части матрицы увеличивается. Это связано со структурой функций Бесселя высокого порядка.

На рис. 2 показаны графики модулей собственных значений $b_{n,m,L}$. Модули собственных чисел определяют «выживаемость» соответствующей собственной моды на данном расстоянии. Если собственное число близко к единице, то мода будет распространяться без искажений и потери энергии [32]. Таким образом, число собственных чисел, близких к единице, определяет количество степеней свободы рассматриваемой оптической системы и возможности её разрешающей способности.

Как следует из рис. 2, число степеней свободы уменьшается при увеличении m .

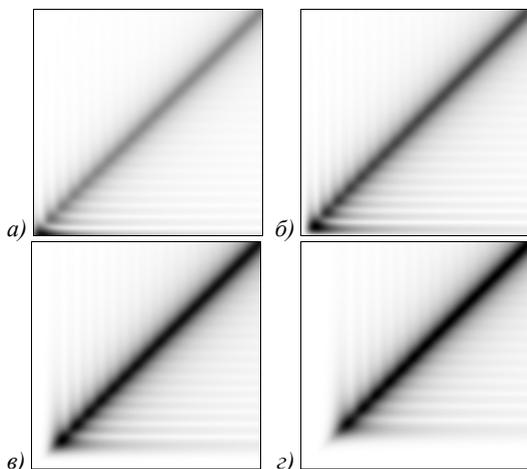


Рис. 1. Амплитуда (негатив) матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) при $L = 0,5\lambda$, $\sigma_0 = 5$, $r_0 = 10\lambda$ для $m = 0$ (а), $m = 1$ (б), $m = 5$ (в), $m = 9$ (д)

В табл. 1 показаны примеры полученных собственных функций $\Psi_{n,m,L}(\rho, \theta)$, их пространственные спектры и результаты распространения в свободном пространстве.

Как видно из приведённых картин, при увеличении индекса n , который соответствует количеству колец в распределении функции, размер колец сужает-

ся, и это соответствует уменьшению деталей оптического сигнала, которые можно прописать с помощью соответствующих собственных функций (второй столбец табл. 1). При фиксированном значении индекса n увеличение номера вихревой составляющей m приводит к формированию в центральной части области нулевых значений, при этом также уменьшается ширина периферийных колец.

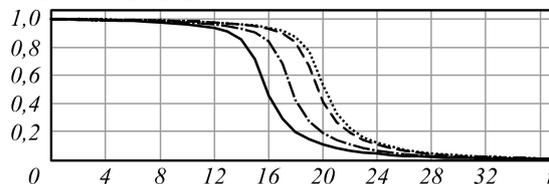


Рис. 2. График модулей собственных значений $b_{n,m,L}$ при $L = 0,5\lambda$, $\sigma_0 = 5$, $r_0 = 10\lambda$ для $m = 0$ (точечная линия), $m = 1$ (штриховая линия), $m = 5$ (штрихпунктирная линия), $m = 9$ (сплошная линия)

Очевидно, уменьшение размера колец при росте индексов n и m соответствует смещению пространственного спектра (третий столбец табл. 1) в область более высоких пространственных частот. Чем большая часть энергии пространственного спектра оказывается в области затухающих волн ($\sigma > 1$), тем сильнее искажается собственная функция при распространении в свободном пространстве. Оценить долю энергии, сосредоточенную в области распространяющихся волн ($0 < \sigma < 1$), можно по величине собственного числа. Если оно равно единице, то весь спектр пространственных частот находится в области распространяющихся волн, и собственная функция не будет меняться при распространении вплоть до расстояния $z = L$. Заметим, что, хотя собственные функции, показанные в табл. 1, рассчитывались для $L = 0,5\lambda$, они сохраняют свой вид значительно дольше (вплоть до $z = 10\lambda$, четвёртый и пятый столбцы табл. 1), если их собственные числа близки к единице (первый столбец табл. 1). Заметим, однако, что для собственной функции $(n, m) = (8, 5)$ распределение интенсивности на большом расстоянии ($L = 10\lambda$) сохранилось только в центральной части, хотя собственное число близко к единице (равно 0,98). Это произошло именно потому, что собственное число рассчитано для близкого расстояния ($L = 0,5\lambda$).

Результаты аппроксимации заданных сигналов по вихревым функциям показаны на рис. 3. Расчёт аппроксимации выполнялся по формулам (6), (7) при $N = 51$. Как видно из результатов, предложенный метод позволяет с хорошей точностью аппроксимировать заданный сигнал, если его размер более длины волны (рис. 3а), если же сигнал содержит детали существенно субволнового размера ($\Delta = 0,1\lambda$), то погрешность увеличивается. Снизить погрешность аппроксимации возможно за счёт увеличения числа собственных функций N , участвующих в аппроксимации, однако это приведёт к значительному усложнению входного поля, формирующего такой сигнал [19].

Табл. 1. Вид и характеристики собственных функций $\Psi_{n,m,L}(\rho, \theta)$ для $L = 0,5\lambda$, $\sigma_0 = 5$, $r_0 = 10\lambda$

(n, m)	Собственная функция $\Psi_{n,m,L}(\rho, \theta)$ (амплитуда и фаза)	График пространственного спектра	Распространение собственной функции $z \in [0, 1\lambda, 10\lambda]$	Собственная функция на расстоянии $z = 10\lambda$
$(3, 0)$ $b_{3,0,L} = 1$				
$(8, 0)$ $b_{8,0,L} = 0,99$				
$(8, 5)$ $b_{8,5,L} = 0,98$				
$(15, 5)$ $b_{15,5,L} = 0,90$				
$(15, 9)$ $b_{15,9,L} = 0,90$				

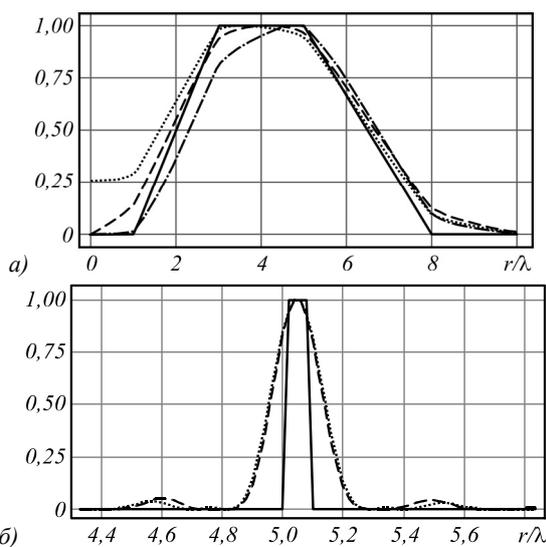


Рис. 3. Аппроксимация вихревыми собственными функциями заданного сигнала (сплошная линия): $m = 0 - 9,6\%$ (точечная линия), $m = 1 - 3,7\%$ (пунктирная линия), $m = 5 - 4,3\%$ (штрихпунктирная линия) (а); и сигнала существенно субволнового размера $-\Delta = 0,1\lambda$ (сплошная линия): $m = 0 - \Delta = 0,19\lambda$, $21,7\%$ (точечная линия), $m = 9 - \Delta = 0,18\lambda$, $22,3\%$ (пунктирная линия) (б)

В табл. 2 показаны результаты формирования кольца субволнового размера в области затухающих волн с помощью входного поля, определяемого по формуле (8). Моделирование выполнялось на основе разложения по коническим волнам (3). Как видно из результатов моделирования, предложенный метод позволяет формировать заданное поле с хорошей

точностью даже при меньшем числе аппроксимирующих функций.

Результаты формирования кольца субволнового размера при $m = 0$ оказались предсказуемо несколько хуже ($\Delta = 0,19\lambda$), чем при $m = 9$ ($\Delta = 0,18\lambda$), т.к. при увеличении вихревой составляющей пространственный спектр смещается в сторону высоких частот (второй столбец табл. 2).

Таким образом, достигнуто существенное уменьшение дифракционного предела.

Распространение поля, приведенное в третьем столбце табл. 2, показывает, что входное поле очень быстро рассеивается и теряет энергию, однако на заданном расстоянии формируется заданное распределение, которое достаточно быстро затем расплывается.

3. Решение обратной задачи в области распространяющихся волн

Теперь рассмотрим применение разработанного метода в области распространяющихся волн.

Рассмотрим расчет собственных функций в области распространяющихся волн, т.е. на расстоянии более длины волны $L = 20\lambda$ при $\sigma_0 = 1$, радиус входной области выбран равным $r_0 = 30\lambda$ и $r_0 = 50\lambda$.

На рис. 4 показан вид матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) для $m = 0$ и 9, а также графики соответствующих собственных чисел. Как видно, с увеличением размера входной области r_0 увеличивается число степеней свободы оптической системы. Вид собственных функций примерно такой же, как в предыдущем параграфе.

Табл. 2. Формирование кольца субволнового размера в области затухающих волн для $L = 0,5\lambda$, $\sigma_0 = 5$, $r_0 = 10\lambda$, $N = 51$ (при $t = 0$ – верхняя строка и $t = 9$ – нижняя строка)

Радиальная часть входного распределения (амплитуда и фаза)	График пространственного спектра	Распространение (интенсивность и топология) $z \in [0, 1\lambda, 10\lambda]$, негатив	Распределение на расстоянии $z = 0,5$ (интенсивность и фаза)

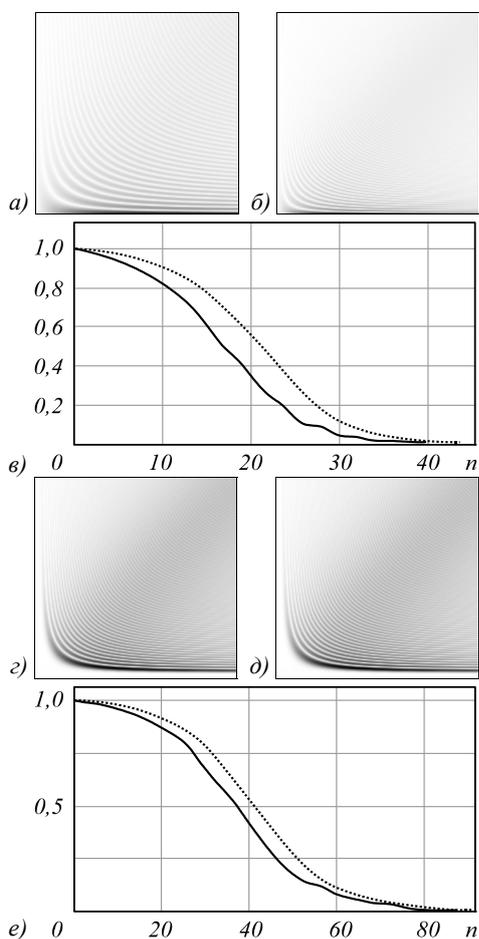


Рис. 4. Амплитуда (негатив) матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) при $L = 20\lambda$, $\sigma_0 = 1$, $r_0 = 30\lambda$ (верхняя строка) для $t = 0$ (а), $t = 9$ (б) и $r_0 = 50\lambda$ (нижняя строка) $t = 0$ (в), $t = 9$ (д), а также графики (в), (е) соответствующих собственных чисел (для $t = 0$ – точечная линия, $t = 9$ – сплошная линия)

Результаты аппроксимации кольца субволнового размера ($\Delta = 0,1\lambda$) по вихревым собственным функциям вне зоны затухающих волн показаны на рис. 5. Как видно из результатов, в этом случае не удастся сформировать сигнал существенно субволнового размера

за счет распространяющихся волн. Хотя приближенно кольцо формируется, но его размер немного меньше длины волны, причем увеличение степеней свободы за счет увеличения входной области не приводит к улучшению ситуации с преодолением дифракционного предела, но позволяет сформировать более выраженное кольцо. Таким образом, в этом случае метод можно применить для приближенного формирования заданного поля. Причем использование вихревой составляющей $t \neq 0$ позволяет сформировать более «чистое» распределение.

В табл. 3 показаны результаты решения обратной задачи формирования кольца субволнового размера вне области затухающих волн. Видно, что увеличение размера объектной области позволяет улучшить решение задачи.

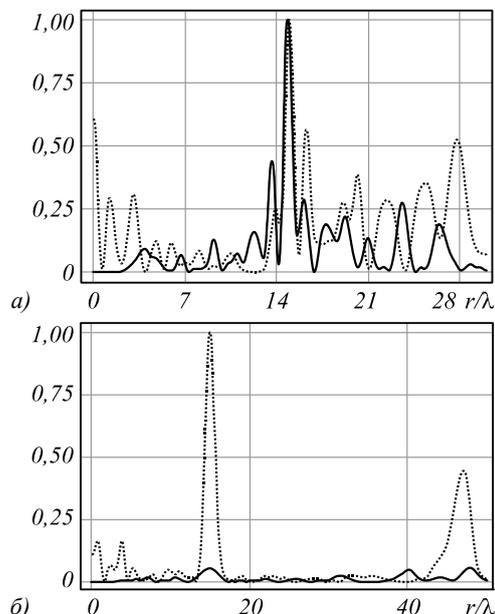


Рис. 5. Аппроксимация кольца субволнового размера ($\Delta = 0,1\lambda$) вихревыми собственными функциями при (а) $r_0 = 30\lambda$, $N = 51$: $t = 0 - \Delta = 0,75\lambda$ (точечная линия), $t = 9 - \Delta = 0,71\lambda$ (сплошная линия); (б) $r_0 = 50\lambda$, $N = 61$: $t = 0 - \Delta = 1,42\lambda$ (точечная линия), $t = 9 - \Delta = 1,59\lambda$ (сплошная линия)

Заключение

В работе предложен параметрический метод расчета вихревых собственных мод свободного пространства в ближней зоне дифракции при ограничении области пространственных частот. При этом расстояние распространения пучка (порядка нескольких длин волн) и область ограничения пространственных частот являются параметрами системы и существенно меняют набор собственных чисел и мод, определяя количество степеней свободы для аппроксимации заданного поля. Выполнен расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции. Показано, что число собственных функций с собственными числами, близкими к единице, т.е. количество степеней свободы оптической системы и возможности ее разрешающей способности, уменьша-

ется с ростом порядка вихревой сингулярности. Однако одновременно с увеличением m уменьшается ширина колец в периферийной области собственной функции, что соответствует уменьшению деталей оптического сигнала, которые можно прописать с помощью собственных функций.

Очевидно, чем больше используется собственных функций при аппроксимации заданного поля, тем эта аппроксимация точнее. Однако при решении обратной задачи, а именно, при расчете исходного поля, формирующего эту аппроксимацию, эффективность использования собственных функций с высокими номерами падает в соответствии с их собственными значениями. Поэтому приходится идти на определенный компромисс. В рассмотренных примерах использовались собственные функции, собственные числа которых были более 0,1.

Табл. 3. Формирование кольца вне области затухающих волн при $m = 0$ для $L = 20\lambda$, $\sigma_0 = 1$, $r_0 = 30\lambda$, $N = 31$ (верхняя строка) и $r_0 = 50\lambda$, $N = 61$ (нижняя строка)

Радиальная часть входного распределения (амплитуда и фаза)	График пространственного спектра	Распространение (интенсивность) $z \in [10\lambda, 30\lambda]$, негатив	Распределение на расстоянии $z = 20\lambda$ (интенсивность и фаза)

Выполнен расчет входных сигналов, обеспечивающих формирование заданных распределений на различных расстояниях. Показана эффективность предложенного алгоритма решения обратной задачи дифракции для сигналов, не содержащих субволновых деталей. При необходимости сфокусировать излучение в пятно, размер которого в несколько раз меньше дифракционного предела, задача решается только в области затухающих волн.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-37-00056) в части теоретических выкладок и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части численного моделирования.

Литература

1. **Lord Rayleigh**. On the theory of optical images with special reference to the optical microscope / Lord Rayleigh // Philosophical Magazine. – 1896. – Vol. 5, Issue 42. – P. 167-195.
2. **Kowarz, M.W.** Homogeneous and evanescent contributions in scalar near-field diffraction / M.W. Kowarz // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 17. – P. 3055-3063. – DOI: 10.1364/AO.34.003055.
3. **Katrich, A.B.** Do evanescent waves really exist in free space? / A.B. Katrich // Optics Communications. – 2005. – Vol. 255, Issues 4-6. – P. 169-174. – DOI: 10.1016/j.optcom.2005.06.012.
4. **Betzig, E.** Breaking the diffraction barrier: Optical microscopy on a nanometric scale / E. Betzig, J.K. Trautman, T.D. Harris, J.S. Weiner, R.L. Kostelak // Science. – 1991. – Vol. 251, Issue 5000. – P. 1468-1470. – DOI: 10.1126/science.251.5000.1468.
5. **Betzig, E.** Near-field optics: microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit / E. Betzig, J.K. Trautman // Science. – 1992. – Vol. 257, Issue 5067. – P. 189-195. – DOI: 10.1126/science.257.5067.189.
6. **Heinzelmann, H.** Scanning near-field optical microscopy / H. Heinzelmann, D.W. Pohl // Applied Physics A. – 1994. – Vol. 59, Issue 2. – P. 89-101. – DOI: 10.1007/BF00332200.
7. **Girard, C.** Near-field optics theories / C. Girard, A. Dereux // Reports on Progress in Physics. – 1996. – Vol. 59, Issue 5. – P. 657-699. – DOI: 10.1088/0034-4885/59/5/002.
8. **Khonina, S.N.** Very compact focal spot in the near-field of the fractional axicon / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // Optics

- Communications. – 2017. – Vol. 391. – P. 24-29. – DOI: 10.1016/j.optcom.2016.12.034.
9. **Di Francia, G.T.** Super-gain antennas and optical resolving power / G.T. Di Francia // *Il Nuovo Cimento*. – 1952. – Vol. 9, Supplement 3. – P. 426-438. – DOI: 10.1007/BF02903413.
 10. **Berry, M.V.** Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves / M.V. Berry, S. Popescu // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 2006. – Vol. 39, Issue 22. – P. 6965-6977. – DOI: 10.1088/0305-4470/39/22/011.
 11. **Huang, F.M.** Super-resolution without evanescent waves / F.M. Huang, N.I. Zheludev // *Nano Letters*. – 2009. – Vol. 9(3). – P. 1249-1254. – DOI: 10.1021/nl9002014.
 12. **Miller, D.A.B.** Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strengths / D.A.B. Miller // *Applied Optics*. – 2000. – Vol. 39, Issue 11. – P. 1681-1699. – DOI: 10.1364/AO.39.001681.
 13. **Gallager, R.G.** Information theory and reliable communication / R.G. Gallager. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968. – ISBN: 978-0-471-29048-3.
 14. **Di Francia, G.T.** Degrees of freedom of an image / G.T. di Francia // *Journal of the Optical Society of America*. – 1969. – Vol. 59, Issue 7. – P. 799-804. – DOI: 10.1364/JOSA.59.000799.
 15. **Slepian, D.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // *The Bell System Technical Journal*. – 1961. – Vol. 40, Issue 1. – P. 43-63. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x.
 16. **Landau, H.J.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II / H.J. Landau, H.O. Pollak // *The Bell System Technical Journal*. – 1961. – Vol. 40, Issue 1. – P. 65-84. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03977.x.
 17. **Karoui, A.** Spectral analysis of the finite Hankel transform and circular prolate spheroidal wave functions / A. Karoui, T. Moumni // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2009. – Vol. 233, Issue 2. – P. 315-333. – DOI: 10.1016/j.cam.2009.07.037.
 18. **Yoshinobu, I.** Evaluation of aberrations using the generalized prolate spheroidal wavefunctions / I. Yoshinobu // *Journal of the Optical Society of America*. – 1970. – Vol. 60, Issue 1. – P. 10-14. – DOI: 10.1364/JOSA.60.000010.
 19. **Khonina, S.N.** Defined distribution forming in the near diffraction zone based on expansion of finite propagation operator eigenfunctions / S.N. Khonina, M.S. Kirilenko, S.G. Volotovskiy // *Procedia Engineering*. – 2017. – Vol. 201. – P. 53-60. – DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.659.
 20. **Kirilenko, M.S.** Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Optics Communications*. – 2018. – Vol. 410. – P. 153-159. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.
 21. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1974. – Vol. 336, Issue 1605. – P. 165-190. – DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
 22. **Bazhenov, V.Yu.** Screw dislocations in light wavefronts / V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Journal of Modern Optics*. – 1992. – Vol. 39, Issue 5. – P. 985-990. – DOI: 10.1080/09500349214551011.
 23. **Gibson, G.** Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum / G. Gibson, J. Courtial, M.J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pasko, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold // *Optics Express*. – 2004. – Vol. 12, Issue 22. – P. 5448-5456. – DOI: 10.1364/OPEX.12.005448.
 24. **Wang, J.** Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6, Issue 7. – P. 488-496. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
 25. **Khonina, S.N.** How low can STED go? Comparison of different write-erase beam combinations for stimulated emission depletion microscopy / S.N. Khonina, I. Golub // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29, Issue 10. – P. 2242-2246. – DOI: 10.1364/JOSAA.29.002242.
 26. **Paterson, L.** Controlled rotation of optically trapped microscopic particles / L. Paterson, M.P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P.E. Bryant, K. Dholakia // *Science*. – 2001. – Vol. 292, Issue 5518. – P. 912-914. – DOI: 10.1126/science.1058591.
 27. **Šiler, M.** Optical forces induced behavior of a particle in a nondiffracting vortex beam / M. Šiler, P. Jákł, O. Brzobohatý, P. Zemánek // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 22. – P. 24304-24319. – DOI: 10.1364/OE.20.024304.
 28. **Hamazaki, J.** Optical-vortex laser ablation / J. Hamazaki, R. Morita, K. Chujo, Y. Kobayashi, S. Tanda, T. Omatsu // *Optics Express*. – 2010. – Vol. 18, Issue 3. – P. 2144-2151. – DOI: 10.1364/OE.18.002144.
 29. **Syubaev, S.** Direct laser printing of chiral plasmonic nanojets by vortex beams / S. Syubaev, A. Zhizhchenko, A. Kuchmizhak, A. Porfirev, E. Pustovalov, O. Vitrik, Yu. Kulchin, S. Khonina, S. Kudryashov // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 9. – P. 10214-10223. – DOI: 10.1364/OE.25.010214.
 30. **Виноградова, М.Б.** Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
 31. **Khonina, S.N.** Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalyov, S.G. Volotovskiy // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2014. – Vol. 23, Issue 2. – P. 50-73. – DOI: 10.3103/S1060992X14020027.
 32. **Хонина, С.Н.** Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соيفер // *Доклады Академии наук*. – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-33.

Сведения об авторах

Информацию об авторах **Хонина Светлана Николаевна** и **Волотовский Сергей Геннадьевич** см. стр 165 этого номера.

Кириленко Михаил Сергеевич, 1990 года рождения, в 2013 году окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета по специальности «Прикладная математика и информатика». В 2018 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Оптика». В настоящее время работает в Самарском университете старшим преподавателем кафедры технической кибернетики. Область научных ин-

тересов: дифракционная оптика, оптические операторы распространения, программирование.
E-mail: areatangent@gmail.com.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 28 января 2019 г. Окончательный вариант – 11 марта 2019 г.

Formation of required distributions on the basis of decomposition by vortex eigen functions of a bounded non-paraxial propagation operator

S.N. Khonina^{1,2}, S.G. Volotovskiy¹, M.S. Kirilenko²

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;

²Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

The solution of the problem of overcoming the diffraction limit based on the representation of an optical signal in the form of a superposition of communication modes matched with the vortex eigenfunctions of a bounded (in the object and spectral regions) nonparaxial propagation operator in free space is considered. Nonparaxial propagation of laser beams is described using an expansion in terms of conic waves based on the m -th order Fourier-Hankel transform. The eigenfunctions of such an operator, which have near-unity eigenvalues, determine the number of degrees of freedom and characteristics of an optical signal transmitted without distortion over a given distance. Based on the considered approach, a parametric method was developed for solving the inverse diffraction problem, including overcoming the diffraction limit.

Keywords: near-field diffraction zone; bounded propagation operator; vortex eigenfunctions; signal approximation; solution of the inverse problem.

Citation: Khonina SN, Volotovskiy SG, Kirilenko MS. Formation of required distributions on the basis of decomposition by vortex eigen functions of a bounded non-paraxial propagation operator. *Computer Optics* 2019; 43(2): 184-192. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-184-192.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 18-37-00056 (numerical calculations) and the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment to the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS No. 007-GZ/Ch3363/26 (theoretical results).

References

- [1] Lord Rayleigh. On the theory of optical images with special reference to the optical microscope. *Phil Mag* 1896; 5(42): 167-195.
- [2] Kowarz MW. Homogeneous and evanescent contributions in scalar near-field diffraction. *Appl Opt* 1995; 34(17): 3055-3063. DOI: 10.1364/AO.34.003055.
- [3] Katrich AB. Do evanescent waves really exist in free space? *Opt Commun* 2005; 255(4-6): 169-174. DOI: 10.1016/j.optcom.2005.06.012.
- [4] Betzig E, Trautman JK, Harris TD, Weiner JS, Kostelak RL. Breaking the diffraction barrier: Optical microscopy on a nanometric scale. *Science* 1991; 251(5000): 1468-1470. DOI: 10.1126/science.251.5000.1468.
- [5] Betzig E, Trautman JK. Near-field optics: microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit. *Science* 1992; 257(5067): 189-195. DOI: 10.1126/science.257.5067.189.
- [6] Heinzelmann H, Pohl D. Scanning near-field optical microscopy. *Appl Phys A* 1994; 59(2): 89-101. DOI: 10.1007/BF00332200.
- [7] Girard C, Dereux A. Near-field optics theories. *Rep Prog Phys* 1996; 59(5): 657-699. DOI: 10.1088/0034-4885/59/5/002.
- [8] Khonina SN, Ustinov AV. Very compact focal spot in the near-field of the fractional axicon. *Opt Commun* 2017; 391: 24-29. DOI: 10.1016/j.optcom.2016.12.034.
- [9] Di Francia GT. Super-gain antennas and optical resolving power. *Il Nuovo Cimento* 1952; 9(3): 426-438. DOI: 10.1007/BF02903413.
- [10] Berry MV, Popescu S. Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves. *J Phys A* 2006; 39(22): 6965-6977. DOI: 10.1088/0305-4470/39/22/011.
- [11] Huang FM, Zheludev NI. Super-resolution without evanescent waves. *Nano Lett* 2009; 9(3): 1249-1254. DOI: 10.1021/nl9002014.
- [12] Miller DAB. Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strengths. *Appl Opt* 2000; 39(11): 1681-1699. DOI: 10.1364/AO.39.001681.
- [13] Gallager RG. *Information theory and reliable communication*. New York: John Wiley & Sons, Inc; 1968. ISBN: 978-0-471-29048-3.
- [14] Di Francia GT. Degrees of freedom of an image. *J Opt Soc Am* 1969; 59(7): 799-804. DOI: 10.1364/JOSA.59.000799.
- [15] Slepian D, Pollak HO. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I. *Bell Syst Technol J* 1961; 40(1): 43-63. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x.
- [16] Landau HJ, Pollak HO. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II. *Bell Syst Technol J* 1961; 40(1): 65-84. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03977.x.

- [17] Karoui A, Moumni T. Spectral analysis of the finite Hankel transform and circular prolate spheroidal wave functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2009; 233(2): 315-333. DOI: 10.1016/j.cam.2009.07.037.
- [18] Yoshinobu I. Evaluation of aberrations using the generalized prolate spheroidal wavefunctions. *J Opt Soc Am* 1970; 60(1): 10-14. DOI: 10.1364/JOSA.60.000010.
- [19] Khonina SN, Kirilenko MS, Volotovskiy SG. Defined distribution forming in the near diffraction zone based on expansion of finite propagation operator eigenfunctions. *Procedia Engineering* 2017; 201: 53-60. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.659.
- [20] Kirilenko MS, Khonina SN. Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system. *Opt Commun* 2018; 410: 153-159. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.
- [21] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proceedings of the Royal Society A* 1974; 336(1605): 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
- [22] Bazhenov VYu, Soskin MS, Vasnetsov MV. Screw dislocations in light wavefronts. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 985-990. DOI: 10.1080/09500349214551011.
- [23] Gibson G, Courtial J, Padgett MJ, Vasnetsov M, Pasko V, Barnett SM, Franke-Arnold S. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Opt Express* 2004; 12(22): 5448-5456. DOI: 10.1364/OPEX.12.005448.
- [24] Wang J, Yang J, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat Photonics* 2012; 6(7): 488-496. DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
- [25] Khonina SN and Golub I. How low can STED go? Comparison of different write-erase beam combinations for stimulated emission depletion microscopy. *J Opt Soc Am A* 2012; 29(10): 2242-2246. DOI: 10.1364/JOSAA.29.002242.
- [26] Paterson L, MacDonald MP, Arlt J, Sibbett W, Bryant PE, Dholakia K. Controlled rotation of optically trapped microscopic particles. *Science* 2001; 292(5518): 912-914. DOI: 10.1126/science.1058591.
- [27] Šiler M, Jákł P, Brzobohatý O, Zemánek P. Optical forces induced behavior of a particle in a nondiffracting vortex beam. *Opt Express* 2012; 20(22): 24304-24319. DOI: 10.1364/OE.20.024304.
- [28] Hamazaki J, Morita R, Chujo K, Kobayashi Y, Tada S, Omatsu T. Optical-vortex laser ablation. *Opt Express* 2010; 18(3): 2144-2151. DOI: 10.1364/OE.18.002144.
- [29] Syubaev S, Zhizhchenko A, Kuchmizhak A, Porfirev A, Pustovalov E, Vitrik O, Kulchin Yu, Khonina S, Kudryashov S. Direct laser printing of chiral plasmonic nanojets by vortex beams. *Opt Express* 2017; 25(9): 10214-10223. DOI: 10.1364/OE.25.010214.
- [30] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP. Wave theory [In Russian]. 2nd ed. Moscow: "Nauka" Publisher; 1979.
- [31] Khonina SN, Ustinov AV, Kovalyov AA, Volotovskiy SG. Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms. *Opt Mem Neural Networks* 2014; 23(2): 50-73. DOI: 10.3103/S1060992X14020027.
- [32] Khonina SN, Volotovskij SG, Sojfer VA. A method of eigenvalue calculation of zero-order prolate spheroidal functions [In Russian]. *Doklady Akademii Nauk* 2001; 63(1): 30-33.

Authors' information

The information about authors **Svetlana Nikolaevna Khonina** and **Sergey Gennadjevich Volotovskiy** you can find on page 167 of this issue.

Mikhail Sergeevich Kirilenko, born in 1990, in 2013 he graduated from Samara State Aerospace University, majoring in Applied Mathematics and Computer Science. He defended his thesis on the specialty "Optics" in 2018. Research interests: diffractive optics, optical propagation operators, programming.

Received January 28, 2019. The final version – March 11, 2019.