

Алгоритм восстановления комплексных коэффициентов мод Лагерра–Гаусса по распределению интенсивности при их когерентном сложении

С.Г. Волотовский¹, С.В. Карпеев^{1,2}, С.Н. Хонина^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В данной работе рассмотрена задача восстановления комплексных коэффициентов суперпозиции мод Лагерра–Гаусса по интенсивности поля в некоторой плоскости, перпендикулярной оси распространения на заданном расстоянии с использованием алгоритма Левенберга–Марквардта и Брента. Показана эффективность применения поэтапной оптимизации для восстановления комплексных коэффициентов суперпозиции не только на модельных, но и на экспериментальных распределениях интенсивности. Алгоритм можно использовать при оптической передаче информации через турбулентную атмосферу для обработки принимаемых распределений интенсивности оптического сигнала.

Ключевые слова: оптическая передача информации, моды Лагерра–Гаусса, оптимизация аппроксимации суперпозицией мод, восстановление комплексных коэффициентов, алгоритм Левенберга–Марквардта, алгоритм Брента.

Цитирование: Волотовский, С.Г. Алгоритм восстановления комплексных коэффициентов мод Лагерра–Гаусса по распределению интенсивности при их когерентном сложении / С.Г. Волотовский, С.В. Карпеев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 3. – С. 352–362. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-727.

Citation: Volotovskiy SG, Karpeev SV, Khonina SN. Algorithm for reconstructing the complex coefficients of the Laguerre–Gauss modes from the intensity distribution for their coherent superposition. Computer Optics 2020; 44(3): 352–362. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-727.

Введение

Модой называется световое поле, демонстрирующее инвариантность при распространении в соответствующей среде. Среди мод свободного пространства можно назвать плоские волны и функции Бесселя [1, 2]. Гауссовы функции (Лагерра–Гаусса и Эрмита–Гаусса) являются модами оптического волокна с квадратичной зависимостью показателя преломления [3]. Однако Гауссовы моды сохраняют свою структуру и в свободном пространстве, изменяясь лишь масштабно. Инвариантность Гауссовых пучков к прохождению через оптические линзовые системы востребована во многих приложениях, среди которых захват и оптическое манипулирование микрочастицами [4, 5], лазерное структурирование поверхностей [6–8] и уплотнение каналов передачи информации как в оптических волокнах, так и в свободном пространстве [9–11]. В первых двух приложениях важно качественное формирование заданного распределения интенсивности, которое может искажаться из-за погрешностей юстировки оптической системы, а также импульсного характера лазерного пучка [12, 13].

При оптической передаче информации в оптических волокнах уплотнение каналов связи может осуществляться за счет суперпозиции нескольких пространственных мод с заданными весами, несущими

информацию в одном пучке на входе передающей системы. Следует отметить, что при распространении в световодах моды сохраняют свой масштаб, поэтому можно применять достаточно простые оптические системы, позволяющие определять модули коэффициентов. При распространении в атмосфере моды инвариантны лишь с точностью до масштаба, поэтому при оптической передаче информации через турбулентную атмосферу возникают дополнительные проблемы [14–17]. В этом случае на выходе системы требуется распознавание (детектирование) набора мод, содержащегося в пучке, инвариантное к масштабированию, смещению, а также в некоторой степени и к зашумлению [18–25]. Если проблема формирования заданной суперпозиции мод, причем с произвольными комплексными коэффициентами, достаточно легко решается средствами дифракционной оптики с привлечением различных методов кодирования [26–32], то для анализа многомодовых пучков требуются более сложные системы, которые могут содержать множество элементов и подразумевать последующую цифровую обработку [19, 21, 24, 33–44].

В данной работе рассмотрена задача восстановления комплексных коэффициентов суперпозиции мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) по интенсивности поля в некоторой плоскости (исходной, фокальной или перпен-

дикулярной оси распространения на заданном расстоянии) в точках некоторой сетки (полярной или декартовой).

В данной работе проведено сравнение эффективности процедур оптимизации с использованием алгоритма Левенберга–Марквардта [45] и Брента [46]. Рассмотрена как обычная оптимизация сразу нескольких параметров, так и поэтапная. Возможности предлагаемых алгоритмов восстановления комплексных коэффициентов суперпозиции рассмотрены не только на модельных, но и на экспериментальных распределениях интенсивности.

1. Теоретические сведения

Рассмотрим задачу аппроксимации поперечной интенсивности пучка $I_0(r, \varphi)$ набором некоторых функций $\{\psi_{nm}(r, \varphi)_{n,m \in \Omega}\}$, где Ω – определенное множество индексов.

Эту задачу можно формализовать как минимизацию следующего функционала:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} [I_\Omega(r, \varphi) - I_0(r, \varphi)]^2 r dr d\varphi \rightarrow \min, \tag{1}$$

где $I_\Omega(r, \varphi) = \left| \sum_{n,m \in \Omega} c_{nm} \psi_{nm}(r, \varphi) \right|^2$. (2)

Для решения этой задачи лучше всего подходит алгоритм Левенберга–Марквардта [45], который минимизирует сумму квадратов M нелинейных функций N аргументов. Для его работы необходимо вычислять значения интенсивности и её якобиана в каждой точке.

Для вычисления частных производных используем формулу:

$$\begin{aligned} I'_p &= (\psi \cdot \psi^*)'_p = \\ &= \psi'_p \cdot \psi^* + \psi \cdot (\psi^*)'_p = \psi'_p \cdot \psi^* + \psi \cdot (\psi'_p)^* = \\ &= \psi'_p \cdot \psi^* + (\psi'_p \cdot \psi^*)^* = 2 \operatorname{Re}[\psi'_p \cdot \psi^*]. \end{aligned} \tag{3}$$

Оптимизация начинается с заданной начальной точки (начальных значений оптимизируемых параметров). В результате оптимизации находится некоторый локальный минимум оптимизируемого функционала (1). Алгоритм оптимизации не гарантирует, что это будет глобальный минимум. Поэтому обычно приходится многократно решать задачу поиска минимума для разных начальных значений оптимизируемых параметров. Это существенно увеличивает время расчета.

В данной задаче легко отличить локальный экстремум от глобального, т.к. значение глобального минимума равно 0 (что, конечно, относится к случаю, когда априорно известен модовый состав пучка).

Пусть найдено глобальное решение задачи ψ . Можно выделить следующие свойства решения задачи (1):

- 1) $\hat{\psi} = e^{i\varphi} \cdot \psi$ тоже будет решением задачи (1).

- 2) Если в суперпозиции ψ изменить знаки индексов m на противоположные, то полученная суперпозиция тоже будет решением задачи (1).
- 3) Пусть a – действительное число, тогда $\hat{\psi} = a \cdot \psi$ имеет интенсивность в a^2 больше и такое же изображение интенсивности (т.к. при формировании изображения выполняется нормирование по максимальному значению изображения).

Поэтому можно говорить о семействе решений. Наличие семейства решений вместо точечного решения, безусловно, способствует решению поставленной задачи. Третье свойство полезно при распознавании суперпозиции по реальному изображению.

Рассмотрим аппроксимацию заданной интенсивности пучка $I_0(r, \varphi)$ модами Лагерра–Гаусса (ЛГ) [47, 48]:

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \varphi) &= \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2n!}{\pi(n+|m|)!}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma_0}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp(im\varphi), \end{aligned} \tag{4}$$

где σ_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, $L_n^{|m|}(\cdot)$ – присоединенный полином Лагерра, n – целое положительное, m – целое.

Выражение (4) описывает моды ЛГ для входной плоскости ($z=0$). Тогда функции $\psi_{nm}(r, \varphi)$, участвующие в выражении (2), в зависимости от рассматриваемой оптической системы описываются одной из следующих формул.

1) При распространении в свободном пространстве на расстояние z :

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \varphi, z) &= \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{i\pi r^2}{\lambda R(z)} - \frac{r^2}{\sigma^2(z)}\right] \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma(z)}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\sigma^2(z)}\right) \exp[-i\beta_{nm}(z) + im\varphi], \end{aligned} \tag{5}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\beta_{nm}(z) = (2n + |m| + 1) \arctg(z/z_0)$, $\varphi = \arctg(y/x)$; $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$ – радиус кривизны параболического фронта светового поля; $\sigma^2(z) = \sigma_0^2(1 + z^2/z_0^2)$ – эффективный радиус пучка на расстоянии z ; $z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda$ – конфокальный параметр.

2) При фокусировке линзой с фокусным расстоянием f :

$$\begin{aligned} GL_{nm}^f(r, \varphi) &= (-1)^n i^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_f^2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma_f}\right)^{|m|} \times \\ &\times L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\sigma_f^2}\right) \exp(im\varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\sigma_f = \lambda f / (\pi\sigma_0)$ – эффективный радиус пучка в фокальной плоскости.

2. Вычисление комплексных коэффициентов на основе аппроксимации многомодовой суперпозиции ЛГ

Следует отметить, что, хотя отдельные моды при распространении сохраняют распределение интенсивности с точностью до масштаба, распределение интенсивности суперпозиции мод существенно изменяется при распространении [49].

Для упрощения задачи будем оптимизировать параметры наперёд заданного набора мод.

Время расчёта сильно увеличивается с ростом числа переменных. Поэтому был выбран поэтапный расчёт:

- на первом этапе решаем задачу для одиночных мод, сохраняя полученные композиции мод и их СКО;
- на втором этапе выбираем лучшее решение по СКО среди найденных композиций, новые композиции мод формируются на основе выбранной добавлением одной моды, решаем задачу оптимизации для сформированных композиций;
- повторяем второй этап для 3 мод и т.д., пока не получим удовлетворительное решение или не сформируется композиция, содержащая все моды заданного набора.

При достаточно большом числе мод оптимизация более половины числа мод на одном этапе становится трудоемкой. В этом случае можно использовать поэтапный расчёт для поиска начального решения с последующей полной оптимизацией. Поэтому суть поэтапной оптимизации можно сформулировать как поиск решений с минимальным числом мод.

Цель поэтапной оптимизации – заменить длительную обычную оптимизацию по всему набору параметров сразу на ряд оптимизаций с небольшим набором оптимизируемых параметров.

Следует отметить следующие особенности, которые сокращают число этапов:

- 1) моды $\psi_{n,m}$ и $\psi_{n,-m}$ всегда оптимизируются совместно, как одна «парная» мода;
- 2) начальное решение коэффициентов для одиночных мод $0,0001 + i * 0,0001$, т.е. псевдонуль (дело в том, что для выбранного алгоритма оптимизации в случае, если все оптимизируемые параметры точно равны нулю, то все частные производные тоже равны нулю и невозможно выбрать направление оптимизации);
- 3) при добавлении мод к суперпозиции (лучшей на предыдущем этапе) моды добавляются со значениями коэффициентов, найденных на предыдущем этапе.

Для расчета тестовых распределений интенсивности выполнено моделирование распространения многомодовых пучков ЛГ по формуле (6). Параметры расчета: $\lambda = 0,0006$ мм, $\sigma = 0,5$ мм, $f = 100$ мм. Размер

области визуализации в фокальной плоскости – $0,15 \times 0,15$ мм.

В табл. 1 приведены результаты аппроксимации. Первый столбец табл. 1 содержит изображения распознаваемых суперпозиций. Второй столбец – результаты обычной оптимизации параметров всех мод из заданного набора из «нулевой» начальной точки. В третьем столбце – результаты поэтапной оптимизации. Заданный набор мод включал все моды, для которых $n \leq 8$, $-8 \leq m \leq 8$, т.е. 153 моды (с учетом парных мод – 81). Время расчета выдается в формате "<минуты>:<секунды>.<доли секунды>", т.е. 4:25.60 – это 4 минуты 25,6 секунд.

В столбце с обычной оптимизацией показаны только коэффициенты с самой большой нормированной интенсивностью (квадраты модулей коэффициентов всех рассматриваемых мод равны единице).

Анализируя результаты, приведенные в табл. 1, следует отметить, что, хотя СКО при обычной оптимизации существенно уступают поэтапному методу, выглядят найденные решения неплохо. В то же время коэффициенты найденных решений далеки от исходных, т.е. задача восстановления комплексных коэффициентов в этом случае не решена. Причина заключается в выборе начальной точки. В данном случае начальные коэффициенты мод были одинаковы и равны $0,001 + 0,001 * i$, т.е. практически 0. Выбор удачной начальной точки – это основная проблема полной оптимизации. Иногда используется генерация начальных точек с последующей оптимизацией. Но это требует больших временных затрат.

Таким образом, подтверждается известный факт, что заданную картину интенсивности можно аппроксимировать различным набором мод (или функций) [49, 50]. В общем случае решить задачу однозначного восстановления комплексных коэффициентов по одной картине интенсивности невозможно. Однако известны различные подходы, когда с учетом некоторой априорной информации одного измерения интенсивности оказывается достаточно [51, 52].

В то же время поэтапный метод находит коэффициенты, которые принадлежат к тому же семейству решений (с точностью до комплексной константы или поворота), что и исходные коэффициенты, причем за очень короткое время (около минуты на обычном персональном компьютере). Метод поэтапной оптимизации намного устойчивей обычной оптимизации параметров всех мод. Дело в том, что из решения, найденного на предыдущем этапе, выполняется оптимизация в разных направлениях и из разных точек. Направления определяются набором оптимизируемых параметров, а они различны. Смещение начальной точки достигается за счет добавления мод с найденными на предыдущем этапе значениями коэффициентов. Но наибольший эффект по сокращению числа этапов достигается за счет выделения «парных» мод.

Табл. 1. Результаты аппроксимации тестовых распределений интенсивности (негативные изображения)

	Исходное поле (на входе и в фокальной плоскости)		Обычная оптимизация (на входе и в фокальной плоскости)		Поэтапная оптимизация (на входе и в фокальной плоскости)	
1						
	$c_{3,-2} = 1, c_{2,2} = 1$		$ c_{0,-7} ^2 = 0,051, c_{0,7} ^2 = 0,051$ rms = 0,067; time 11:02		2 этапа: $c_{3,-2} = \exp(i\pi), c_{2,-2} = 1$ rms = 1,0909e-06; time :57.03	
2						
	$c_{3,1} = 1, c_{2,2} = -1, c_{1,-2} = i$		$ c_{0,-8} ^2 = 0,097, c_{1,-4} ^2 = 0,096,$ $ c_{2,-4} ^2 = 0,094$ rms = 0,033; time 11:59		3 этапа: $c_{3,1} = \exp(-i0,5\pi),$ $c_{2,2} = \exp(-i1,5\pi), c_{1,-2} = 1$ rms = 1,198e-06; time 1:42.07	
3						
	$c_{3,1} = 1, c_{2,2} = 1$		$ c_{1,4} ^2 = 0,140, c_{2,4} ^2 = 0,104,$ $ c_{1,3} ^2 = 0,103$ rms = 0,038; time 24:30		2 этапа: $c_{3,-1} = \exp(i\pi), c_{2,-2} = 1$ rms = 1,88e-06; time :54.23	
4						
	$c_{1,3} = 1, c_{3,-2} = 2$		$ c_{1,8} ^2 = 0,188, c_{0,8} ^2 = 0,111$ rms = 0,069; time 11:38		2 этапа: $c_{1,3} = 1, c_{3,-2} = 2$ rms = 8,89e-07; time :51.80	
5						
	$c_{1,3} = 1, c_{2,-1} = i, c_{1,-3} = i$		$ c_{0,1} ^2 = 0,113,$ rms = 0,017; time 9:43		2 этапа: $c_{1,3} = \exp(-i0,5\pi),$ $c_{2,1} = 1, c_{1,-3} = 1$ rms = 9,679e-07; time 1:11.20	
6						
	$c_{1,1} = 3, c_{2,2} = 2, c_{3,3} = 1$		$ c_{0,-8} ^2 = 0,292, c_{1,-8} ^2 = 0,102$ rms = 0,047; time 40:54		3 этапа: $c_{1,-1} = 3,$ $c_{2,-2} = 2\exp(i\pi), c_{3,-3} = 1$ rms = 2,254e-07; time 1:12.03	

(Поле на входе выделено чёрной рамкой, в фокальной плоскости – серой рамкой)

3. Анализ методов оптимизации

Метод поэтапной оптимизации может использовать алгоритм оптимизации многих переменных. Ал-

горитм Левенберга–Марквардта [45] был выбран из-за его эффективности. Другим распространенным алгоритмом оптимизации является алгоритм Брента [46].

Для примера возьмем суперпозицию $\psi_{3,-2} - \psi_{2,2}$ (первая строка табл. 1). В табл. 2 приведены результаты сравнения двух алгоритмов оптимизации. Хорошо видно, что алгоритм Левенберга–Марквардта намного эффективней, причем с ростом числа оптимизируемых параметров его выигрыш возрастает. Но для алгоритма Брента не требуется вычисление якобиана. При поэтапной оптимизации для суперпозиции трех мод требуется не менее трех этапов, которых в большинстве случаев достаточно. Однако изредка появляются ситуации, когда лучшее решение первого этапа не содержит моды из требуемой композиции.

Табл. 2. Сравнение результатов для алгоритмов оптимизации Брента и Левенберга–Марквардта

	Алгоритм Брента	Алгоритм Левенберга–Марквардта
Этап 1	rms = 0,579; time 1:44	rms = 0,579; time :33.24
Этап 2	rms = 0,187; time 6:28	rms = 0,187; time :20.74
Этап 3	rms = 2,37e-07; time 16:26	rms = 2,25e-07; time :18.25

Рассмотрим в качестве примера суперпозицию двух мод $\psi_{0,2} + i \cdot \psi_{0,4}$. На рис. 1 показаны результаты формирования интенсивности в фокальной плоскости (рис. 1а) и ее аппроксимации при обычной оптимизации. Видно, что аппроксимация интенсивности выполнена успешно, но коэффициенты разложения определены неверно.

В табл. 3 приведены 15 лучших СКО для одиночных мод (с учетом парных мод), полученных после первого этапа. Для парных мод указана одна мода, если она имела существенно больший вес, указаны две моды, если их вес соизмерим.

Когда первая в списке мода не содержит одну из мод распознаваемой композиции, то обычно моды композиции добавляются на последующих этапах. После чего требуется еще два-три этапа для уточнения коэффициентов мод, кроме случая, когда $n=0$. Если первые места занимают моды с индексами $(n, m) = (0, m)$, то на втором этапе следует за базовую брать не только первую из списка моды.

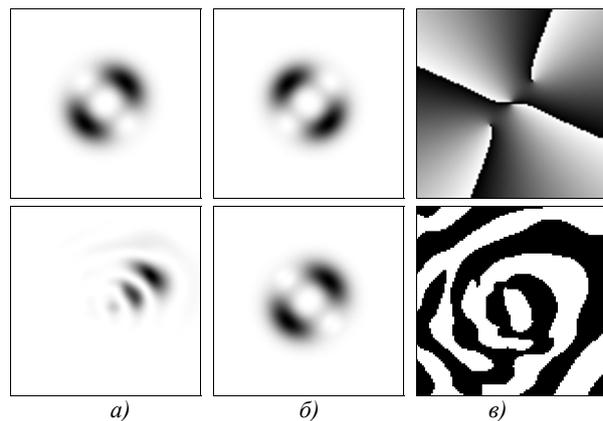


Рис. 1. Пример для суперпозиции $\psi_{0,2} + i \cdot \psi_{0,4}$: а) интенсивность и б) фаза в объектной плоскости, в) интенсивность в фокальной плоскости (для заданного поля – верхняя строка и для обычной аппроксимации, rms = 0,0079 – нижняя строка)

Табл. 3. Результаты первого этапа поэтапной оптимизации $\psi_{0,2} + i \cdot \psi_{0,4}$

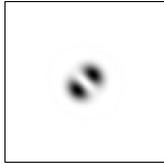
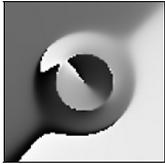
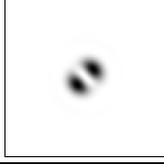
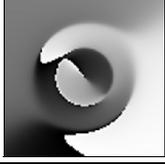
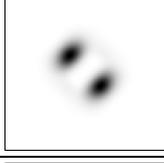
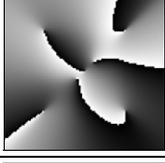
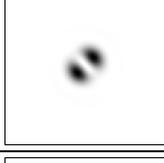
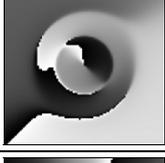
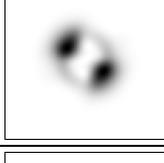
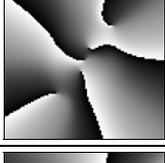
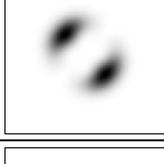
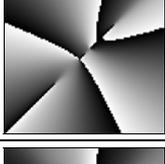
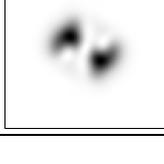
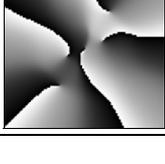
	Моды	RMS после первого этапа	RMS поэтапной оптимизации начиная с этой моды после дополнительных 4 этапов	Коэффициенты удачных решений
1	$\psi_{0,-3}$	0,554316	0,010259	
2	$\psi_{0,2}$	0,612875	1,138885e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,-4} ^2 = 0,5$
3	$\psi_{0,-4}$	0,63667	1,138885e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,-4} ^2 = 0,5$
4	$\psi_{0,-1}, \psi_{0,1}$	0,725163	0,006648	
5	$\psi_{0,-5}$	0,754298	0,030692	
6	$\psi_{1,-1}, \psi_{1,1}$	0,773244	0,006648	
7	$\psi_{1,-4}$	0,808526	1,138885e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,4} ^2 = 0,5$
8	$\psi_{1,-5}$	0,810992	0,049819	
9	$\psi_{1,-3}$	0,822462	0,052567	
10	$\psi_{1,-6}$	0,833514	1,140646e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,-4} ^2 = 0,5$
11	$\psi_{1,2}$	0,837837	1,140023e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,-4} ^2 = 0,5$
12	$\psi_{2,5}$	0,844711	0,051376	
13	$\psi_{2,-6}$	0,845419	1,139988e-06	$ c_{0,-2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,-4} ^2 = 0,5$
14	$\psi_{1,0}$	0,850239	1,140117e-06	$ c_{0,2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,4} ^2 = 0,5$
15	$\psi_{0,-6}$	0,850656	0,029212	$ c_{0,2} ^2 = 0,5$ $ c_{0,4} ^2 = 0,5$

Сходимость поэтапной оптимизации в зависимости от стартовой моды показана на рис. 2. Для распознавания суперпозиции из двух мод надо не менее двух этапов (сплошная линия на рис. 2), т.е. когда на первом этапе выбираем одну из мод требуемой суперпозиции. Если первая мода не входит в требуемую суперпозицию, то моды требуемой суперпозиции могут добавиться позднее (пунктирная линия на рис. 1). Как только сформировано удачное решение, СКО опускается до машинного нуля. Добавление новых

мод улучшить СКО уже не может. Если же моды требуемой композиции не выбираются (точечная линия на рис. 2), то СКО планомерно снижается, но не до машинного нуля.

В табл. 4 показано, к каким решениям сходятся неудачные решения. При этом визуализированы суперпозиции мод в объектной плоскости. В третьем столбце приведены наибольшие нормированные интенсивности коэффициентов, полученных после дополнительных 4 этапов.

Табл. 4. Интенсивность в фокальной плоскости, а также интенсивность и фаза в объектной плоскости для неудачных случаев оптимизации из табл. 3

		Ведущие коэффициенты	Интенсивность в объектной плоскости	Фаза в объектной плоскости
1	$\Psi_{0,-3}$ rms = 0,010259	$ c_{0,-1} ^2 = 0,539669$ $ c_{1,-1} ^2 = 0,165052$ $ c_{0,1} ^2 = 0,166167$ $ c_{1,1} ^2 = 0,110935$		
4	$\Psi_{0,-1}, \Psi_{0,1}$ rms = 0,006648	$ c_{0,-1} ^2 = 0,529411$ $ c_{0,1} ^2 = 0,172099$ $ c_{1,-1} ^2 = 0,165169$ $ c_{1,1} ^2 = 0,111328$		
5	$\Psi_{0,-5}$ rms = 0,030692	$ c_{0,-3} ^2 = 0,689461$ $ c_{0,-1} ^2 = 0,198209$ $ c_{0,-5} ^2 = 0,072903$		
6	$\Psi_{1,-1}, \Psi_{1,1}$ rms = 0,006648	$ c_{0,-1} ^2 = 0,529412$ $ c_{0,1} ^2 = 0,172099$ $ c_{1,-1} ^2 = 0,165169$ $ c_{1,1} ^2 = 0,111328$		
8	$\Psi_{1,-5}$ rms = 0,049819	$ c_{0,-3} ^2 = 0,733683$ $ c_{0,-1} ^2 = 0,125840$ $ c_{0,-5} ^2 = 0,078115$		
9	$\Psi_{1,-3}$ rms = 0,052567	$ c_{0,-3} ^2 = 0,579842$ $ c_{0,-5} ^2 = 0,347810$		
12	$\Psi_{2,5}$ rms = 0,051376	$ c_{0,-3} ^2 = 0,584712$ $ c_{0,-1} ^2 = 0,191269$ $ c_{0,-5} ^2 = 0,136131$		

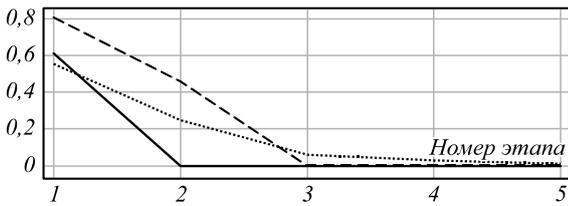


Рис. 2. Графики СКО для 5 этапов:

точечная линия – начиная с $\psi_{0,-3}$ (первая строка табл. 3),
сплошная линия – $\psi_{0,2}$ (вторая строка табл. 3),
пунктирная линия – $\psi_{1,-4}$ (седьмая строка табл. 3)

4. Применение метода к экспериментальным картинам интенсивности

В предыдущих параграфах распознавание выполнялось в идеальных условиях, когда точно известны параметры оптической схемы (фокус, длина волны, размеры фокальной области, радиус перетяжки Гауссова пучка). В реальности это не так. Кроме того, изображение может быть искажено, смещено и зашумлено. С учетом этих неопределенностей изменится постановка задачи. В этом случае удобнее перейти в декартовы координаты:

$$v_0 + \int_{-R}^R \int_{-R}^R [I_{\Omega}(x-x_0, y-y_0) - I_0(x, y)]^2 dx dy \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $I_{\Omega}(x-x_0, y-y_0) = \sum_{n,m \in \Omega} c_{nm} \Psi_{nm}(x-x_0, y-y_0)$. (8)

При этом к оптимизируемым параметрам добавляются параметры x_0, y_0, v_0, σ_0 , которые позволяют частично нивелировать погрешности формирования экспериментальных распределений. Длину волны можно выбрать произвольно, например $\lambda = 0,0006$ мм. Размер фокальной области определим по размерам изображения, положив шаг дискретизации 0,002 мм. В табл. 5 приведены результаты восстановления экспериментальных распределений интенсивности.

На рис. 3 и 4 показана сходимость процесса оптимизации для рассмотренных экспериментальных распределений. На рис. 3 видно, что на первых этапах СКО снижается, а потом стабилизируется. Т.е. добавление мод в композицию не уменьшает СКО. Далее требуется расширить список допустимых мод. На рис. 4 видно, что борьба с шумами существенно искажает коэффициенты требуемых мод.

На рис. 4 видно, что для суперпозиции $\psi_{5,1} + \psi_{5,-1} + 2 \cdot \psi_{4,3} + 2 \cdot \psi_{4,-3}$ найдено неудачное решение. Но даже в этом случае СКО понижается с каждым этапом. Кроме этого, надо отметить, что в этом случае моды, участвующие в суперпозиции, не используются. При попытке оптимизировать коэффициенты только требуемых мод было достигнуто СКО=0,717, что соизмеримо с результатом первого этапа (0,732). Если же продолжить оптимизацию, начиная с найденного решения, то коэффициенты требуемых мод сбрасываются до 0. Это говорит о том, что искажения настолько

велики, что предложенное изображение ближе к другой композиции мод.

При этом выдаются нормы нормированных коэффициентов мод. Коэффициенты нормируются по сумме норм всех коэффициентов. Это допустимо, т.к. умножение всех коэффициентов на одно и то же число изменит интенсивность каждой точки, но не изменит изображение. В то же время нормирование коэффициентов существенно упрощает анализ коэффициентов.

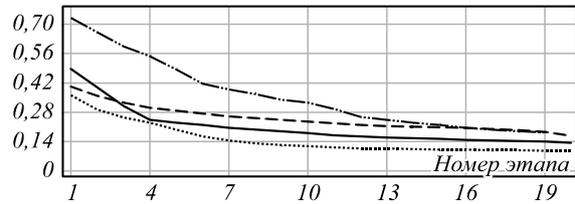


Рис. 3. Графики СКО для тестовых распределений интенсивности на разных этапах (ось абсцисс)

для $\psi_{1,1} + \psi_{1,-1}$ – точечная линия, $\psi_{2,2} + \psi_{2,-2}$ – сплошная линия, $\psi_{4,0}$ – пунктирная линия, $\psi_{5,1} + \psi_{5,-1} + 2 \cdot \psi_{4,3} + 2 \cdot \psi_{4,-3}$ – штрихпунктирная линия

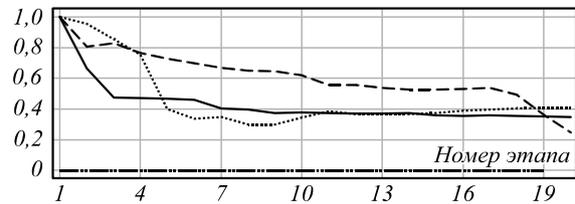


Рис. 4. Графики суммы нормализованных интенсивностей коэффициентов требуемых мод на разных этапах (ось абсцисс);

для $\psi_{1,1} + \psi_{1,-1}$ – точечная линия, $\psi_{2,2} + \psi_{2,-2}$ – сплошная линия, $\psi_{4,0}$ – пунктирная линия, $\psi_{5,1} + \psi_{5,-1} + 2 \cdot \psi_{4,3} + 2 \cdot \psi_{4,-3}$ – штрихпунктирная линия

Более детально динамика сходимости коэффициентов для удачных решений показана на рис. 5 (строка 1 в табл. 5) и рис. 6 (строка 2 в табл. 5).

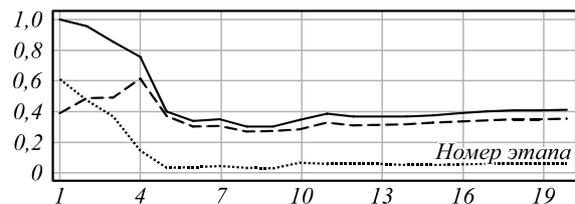


Рис. 5. Графики интенсивностей коэффициентов мод

$\psi_{1,1} + \psi_{1,-1}$ на разных этапах (ось абсцисс). Графики: сплошная линия – для суммы интенсивностей, пунктирная линия – для $\psi_{1,1}$, точечная линия – для $\psi_{1,-1}$

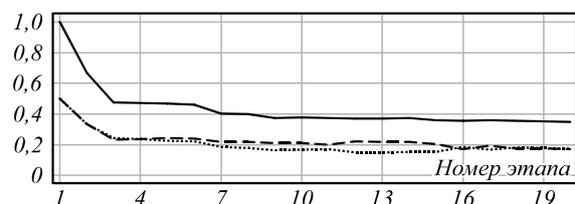


Рис. 6. Графики интенсивностей коэффициентов мод

$\psi_{2,2} + \psi_{2,-2}$ на разных этапах (ось абсцисс). Графики: сплошная линия – для суммы интенсивностей, пунктирная линия – для $\psi_{2,2}$, точечная линия – для $\psi_{2,-2}$

Для $\psi_{4,0}$ подробный график не приводится, т.к. в композиции одна мода. Для $\psi_{5,1} + \psi_{5,-1} + 2 \cdot \psi_{4,3} + 2 \cdot \psi_{4,-3}$

подробный график не приводится, т.к. все коэффициенты равны 0.

Табл. 5. Результаты распознавания экспериментальных распределений интенсивности (негативные изображения)

		Эксперимент	Точное решение	Этап 1	Этап 5	Этап 19
1	$\psi_{1,1} + \psi_{1,-1}$			 rms = 0,36229	 rms = 0,198254	 rms = 0,097075
2	$\psi_{2,2} + \psi_{2,-2}$			 rms = 0,488757	 rms = 0,230821	 rms = 0,139284
3	$\psi_{4,0}$			 rms = 0,403362	 rms = 0,288362	 rms = 0,187264
4	$\psi_{5,1} + \psi_{5,-1} + 2 \cdot \psi_{4,3} + 2 \cdot \psi_{4,-3}$			 rms = 0,731994	 rms = 0,485017	 rms = 0,183213

Учитывая, что «парные» моды рассматриваются как одна мода, все моды хорошо распознаются на первом этапе. Дальнейшая оптимизация компенсирует шум и недостатки качества исходных изображений. При этом коэффициенты распознаваемых мод искажаются, но изображение получаемых суперпозиций больше похоже на заданное изображение интенсивности.

Графики СКО для разных этапов аппроксимации экспериментальных изображений (рис. 7) качественно отличаются от аппроксимации для тестовых изображений. Для тестов достижение глобального минимума видно по нулевому СКО. Здесь график СКО быстро достигает некоторого минимума, далее практически не снижаясь. Для уменьшения СКО требуется добавление мод более высокого порядка.

Заключение

В данной работе предложена эффективная поэтапная оптимизационная процедура на основе алгоритма Левенберга–Марквардта в задаче восстановления комплексных коэффициентов суперпозиции мод Лагерра–Гаусса по интенсивности поля в фокальной плоскости. Исследования показали, что сходимость поэтапной оптимизации лучше, чем при обычной оптимизации па-

раметров всех мод. При реализации предложенной процедуры выделение «парных» мод сокращает число этапов и улучшает сходимость. При аппроксимации экспериментальных распределений интенсивности наличие искажений в изображении интенсивности приводит к увеличению числа паразитных мод и искажению коэффициентов основных мод.

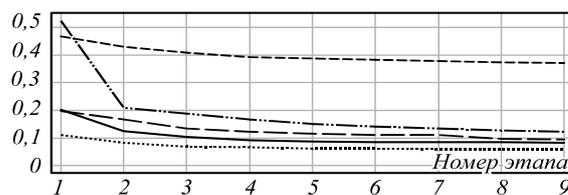


Рис. 7. Графики СКО для экспериментальных распределений интенсивности на разных этапах для $\psi_{1,0}$ (сплошная линия), $\psi_{1,1}$ (точечная линия), $\psi_{3,6}$ (штриховая линия, короткий штрих), $\psi_{2,4}$ (штриховая линия, длинный штрих), $\psi_{0,5} + \psi_{5,0}$ (штрихпунктирная линия)

Одним из применений предложенной процедуры может быть оптическая связь. Для обработки принимаемых распределений интенсивности мультиплексированного оптического сигнала, прошедшего через турбулентную атмосферу, должна быть предусмотрена процедура создания таблиц типовых распределений интенсивности, возникающих в оптическом трак-

те. После восстановления коэффициентов мод предложенной оптимизационной процедурой каждому распределению интенсивности из таблицы ставится в соответствие набор коэффициентов, и в дальнейшем система распознавания может функционировать по одному из известных алгоритмов корреляционного анализа.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в теоретической части и гранта РФФИ (№18-29-20045-мк) в части численных и экспериментальных исследований.

Литература

1. **Durnin, J.** Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1987. – Vol. 4, Issue 4. – P. 651-654.
2. **McGloin, D.** Bessel beams: diffraction in a new light / D. McGloin, K. Dholakia // *Contemporary Physics*. – 2005. – Vol. 46, Issue 1. – P. 15-28.
3. **Adams, M.J.** An introduction to optical waveguides / M.J. Adams. – Chichester: John Wiley & Sons, 1981.
4. **Dienerowitz, M.** Optical manipulation of nanoparticles: a review / M. Dienerowitz, M. Mazilu, K. Dholakia // *Journal of Nanophotonics*. – 2008. – Vol. 2, Issue 1. – 021875. – DOI: 10.1117/1.2992045.
5. **Ustinov, A.V.** Local characteristics of paraxial Laguerre-Gaussian vortex beams with a zero total angular momentum, / A.V. Ustinov, V.G. Niziev, S.N. Khonina, S.V. Karpeev // *Journal of Modern Optics*. – 2019. – Vol. 66, Issue 20. – P. 1961-1972. – DOI: 10.1080/09500340.2019.1686183.
6. **Ion, J.C.** Laser processing of engineering materials: Principles, procedure and industrial applications / J.C. Ion. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
7. **Cheng, J.** A review of ultrafast laser materials micromachining / J. Cheng, C. Liu, S. Shang, D. Liu, W. Perrie, G. Dearden, K. Watkins // *Optics and Laser Technology*. – 2013. – Vol. 46. – P. 88-102.
8. **Podlipnov, V.V.** Nonlinear effects in photoinduced nanomovement of carbazole-based azo-polymers / V.V. Podlipnov, N.A. Ivliev, S.N. Khonina, D.V. Nesterenko, C. Loşmanschii, A. Meshalkin, E. Achimova, V. Abaskin // *Proceedings of SPIE*. – 2019. – Vol. 11146. – 111460P. – DOI: 10.1117/12.2527431.
9. **Berdagué, S.** Mode division multiplexing in optical fibers. / S. Berdagué, P. Facq // *Applied Optics*. – 1982. – Vol. 21, Issue 11. – P. 1950-1955. – DOI: 10.1364/AO.21.001950.
10. **Khonina, S.N.** Recognition of polarization and phase states of light based on the interaction of nonuniformly polarized laser beams with singular phase structures / S.N. Khonina, A.P. Porfirev, S.V. Karpeev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 13. – P. 18484-18492. – DOI: 10.1364/OE.27.018484.
11. **Čelechovský, R.** Optical implementation of the vortex information channel / R. Čelechovský, Z. Bouchal // *New Journal of Physics*. – 2007. – Vol. 9, Issue 9. – 328. – DOI: 10.1088/1367-2630/9/9/328.
12. **Ларькин, А.С.** Формирование мод Эрмита-Гаусса пучка мощного фемтосекундного лазерного излучения с помощью бинарно-фазовых дифракционных оптических элементов / А.С. Ларькин, Д.В. Пушкарев, С.А. Дегтярев, С.Н. Хонина, А.Б. Савельев // *Квантовая электроника*. – 2016. – Т. 46, № 8. – С. 733-737.
13. **Буслеев, Н.И.** Симметричное нанотекстурирование и плазмонное возбуждение наноструктур золота пучками Лагерра-Гаусса фемтосекундного лазерного излучения / Н.И. Буслеев, С.И. Кудряшов, П.А. Данилов, А.П. Порфирьев, И.Н. Сараева, А.А. Руденко, С.Ф. Уманская, Д.А. Заярный, А.А. Ионин, С.Н. Хонина // *Квантовая электроника*. – 2019. – Т. 49, № 7. – С. 666-671.
14. **Malik, M.** Influence of atmospheric turbulence on optical communications using orbital angular momentum for encoding / M. Malik, M. O'Sullivan, B. Rodenburg, M. Mirhosseini, J. Leach, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, R.W. Boyd // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 12. – P. 13195-13200. – DOI: 10.1364/OE.20.013195.
15. **Zhou, Y.** Propagation properties of Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam in non-Kolmogorov turbulence / Y. Zhou, Y. Yuan, J. Qu, W. Huang // *Optics Express*. – 2016. – Vol. 24, Issue 10. – P. 10682-10693. – DOI: 10.1364/OE.24.010682.
16. **Cang, J.** Propagation of Laguerre-Gaussian and Bessel-Gaussian Schell-model beams through paraxial optical systems in turbulent atmosphere / J. Cang, P. Xiu, X. Liu // *Optics and Laser Technology*. – 2013. – Vol. 54, Issue 30. – P. 35-41. – DOI: 10.1016/j.optlastec.2013.05.002.
17. **Porfirev, A.P.** Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 11. – P. E8-E15. – DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
18. **Khonina, S.N.** Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, P. Laakkonen, J. Turunen, Y. Wang // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2000. – Vol. 9, Issue 1. – P. 69-74.
19. **Jassemnejad, B.** Mode sorter and detector based on photon orbital angular momentum / B. Jassemnejad, A. Bohannan, J. Lekki, K. Weiland // *Optical Engineering*. – 2008. – Vol. 47, Issue 5. – 053001.
20. **Kaiser, T.** Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters / T. Kaiser, D. Flamm, S. Schröter, M. Duparré // *Optics Express*. – 2009. – Vol. 17, Issue 11. – P. 9347-9356.
21. **Berkhout, G.C.G.** Efficient sorting of orbital angular momentum states of light / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, J. Courtial, M.W. Beijersbergen, M.J. Padgett // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105. – 153601.
22. **Wang, Z.** High-volume optical vortex multiplexing and demultiplexing for free-space optical communication / Z. Wang, N. Zhang, X. Yuan // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19. – P. 482-492.
23. **Bozinovic, N.** Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // *Science*. – 2013. – Vol. 340, Issue 6140. – P. 1545-1548. – DOI: 10.1126/science.1237861.
24. **Huang, H.** Mode division multiplexing using an orbital angular momentum mode sorter and MIMO-DSP over a graded-index few-mode optical fibre / H. Huang, G. Milione, M.P.J. Lavery, G. Xie, Y. Ren, Y. Cao, N. Ahmed, T.A. Nguyen, D.A. Nolan, M.-J. Li, M. Tur, R.R. Alfano, A.E. Willner // *Scientific Reports*. – 2015. – Vol. 5. – 14931. – DOI: 10.1038/srep14931.

25. **Khonina, S.N.** A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre–Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, V.D. Paraniin // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 105. – P. 68-74. – DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
26. **Turnbull, G.A.** The generation of free-space Laguerre–Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate / G.A. Turnbull, D.A. Robertson, G.M. Smith, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1996. – Vol. 127. – P. 183-188.
27. **Котляр, В.В.** Вращение световых многомодовых пучков Гаусса–Лагерра в свободном пространстве / В.В. Котляр, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // *Письма в ЖТФ*. – 1997. – Vol. 23, Issue 17. – P. 1-6.
28. **Хонина, С.Н.** Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса–Лагерра / С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер // *Оптика и спектроскопия*. – 1998. – Т. 85, № 4. – С. 695-703.
29. **Khonina, S.N.** Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of a diffractive phase element / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, P. Laakkonen, J. Turunen // *Optics Communications*. – 2000. – Vol. 175, Issues 4-6. – P. 301-308. – DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00472-7.
30. **Carpentier, A.V.** Making optical vortices with computer-generated holograms / A.V. Carpentier, H. Michinel, R.S. José, [et al.] // *American Journal of Physics*. – 2008. – Vol. 76, Issue 10. – P. 916-921.
31. **Matsumoto, N.** Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators / N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, T. Hara // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25. – P. 1642-1651.
32. **Li, S.** Generation of optical vortex based on computer-generated holographic gratings by photolithography / S. Li, Z. Wang // *Applied Physics Letters*. – 2013. – Vol. 103, Issue 14. – 141110.
33. **Berezny, A.E.** Computer-generated holographic optical elements produced by photolithography / A.E. Berezny, S.V. Karpeev, G.V. Uspleniev // *Optics and Lasers in Engineering*. – 1991. – Vol. 15, Issue 5. – P. 331-340. – DOI: 10.1016/0143-8166(91)90020-T.
34. **Golub, M.A.** Spatial filter investigation of the distribution of power between transverse modes in a fiber waveguide / M.A. Golub, S.V. Karpeev, S.G. Krivoshlykov, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. – 1984. – Vol. 14, Issue 9. – P. 1255-1256. – DOI: 10.1070/QE1984v014n09ABEH006201.
35. **Khonina, S.N.** Design of multi-channel phase spatial filter for selection of Gauss-Laguerre laser modes / S.N. Khonina, A.A. Almazov // *Proceedings of SPIE*. – 2002. – Vol. 4705. – P. 30-39.
36. **Golub, M.A.** Spatial phase filters matched to transverse modes / M.A. Golub, S.V. Karpeev, N.L. Kazanskii, A.V. Mirzov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer, G.V. Uvarov // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. – 1988. – Vol. 18, No. 3. – P. 392-393. – DOI: 10.1070/QE1988v018n03ABEH011528.
37. **Leach, J.** Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon / J. Leach, J. Courtial, K. Skeldon, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold, M.J. Padgett // *Physical Review Letters*. – 2004. – Vol. 92. – 013601.
38. **Berkhout, G.C.G.** Measuring orbital angular momentum superpositions of light by mode transformation / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, M.W. Beijersbergen // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36. – P. 1863-1865.
39. **Lavery, M.P.J.** Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation / M.P.J. Lavery, G.C.G. Berkhout, J. Courtial, M.J. Padgett // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13. – 064006.
40. **D’errico, A.** Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of structured light beams / A. D’errico, R. D’amelio, B. Piccirillo, F. Cardano, L. Marrucci // *Optica*. – 2017. – Vol. 4. – P. 1350-1357. – DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
41. **Gu, X.** Gouy phase radial mode sorter for light: concepts and experiments / X. Gu, M. Krenn, M. Erhard, A. Zeilinger // *Physical Review Letters*. – 2018. – Vol. 120. – 103601.
42. **Fu, D.** Realization of a scalable Laguerre–Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter / D. Fu, Y. Zhou, R. Qi, S. Oliver, Y. Wang, S.M.H. Rafsanjani, J. Zhao, M. Mirhosseini, Z. Shi, P. Zhang, R.W. Boyd // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 25. – P. 33057-33065. – DOI: 10.1364/OE.26.033057.
43. **Volyar, A.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 22. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
44. **Fontaine, N.K.** Laguerre-Gaussian mode sorter / N.K. Fontaine, R. Ryf, H. Chen, D.T. Neilson, K. Kim, J. Carpenter // *Nature Communications*. – 2019. – Vol. 10. – 1865. – DOI: 10.1038/s41467-019-09840-4.
45. **More, J.J.** The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory / J.J. More. – In: *Numerical analysis* / ed. by G.A. Watson. – New York: Springer-Verlag, 1978. – P. 105-116.
46. **Brent, R.P.** Algorithms for minimization without derivatives / R.P. Brent. – Prentice-Hall, 1973. – 195 p.
47. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // *Applied Optics*. – 1966. – Vol. 5, Issue 10. – P. 1550-1567.
48. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman // Universe Science Books, 1986. – P. 642-652.
49. **Павельев, В.С.** Анализ поперечных мод лазерного излучения / В.С. Павельев, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер. В кн.: *Дифракционная компьютерная оптика* / под ред. В.А. Сойфера. – Глава 8. – М.: Физматлит, 2007. – С. 432-558.
50. **Павельев, В.С.** Быстрый итерационный расчёт фазовых формирователей мод Гаусса–Лагерра / В.С. Павельев, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 1997. – Вып. 17. – С. 15-20.
51. **Hickson, P.** Wave-front curvature sensing from a single defocused image / P. Hickson // *Journal of the Optical Society of America A* – 1994. – Vol. 11, Issue 5. – P. 1667-1673. – DOI: 10.1364/JOSAA.11.001667.
52. **Tokovinin, A.** DONUT: measuring optical aberrations from a single extrafocal image / A. Tokovinin, S. Heathcote // *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. – 2006. – Vol. 118, Issue 846. – P. 1165-1175. – DOI: 10.1086/506972.

Сведения об авторах

Волотовский Сергей Геннадьевич, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает старшим научным сотрудником в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: sv@ipsiras.ru.

Карпеев Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Института систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, модовые и поляризационные преобразования, волоконная оптика, оптическая обработка изображений. E-mail: karp@ipsiras.ru.

Сведения об авторе **Хонина Светлана Николаевна** – см. стр. 318 этого номера..

ГРНТИ: 29.31.29

Поступила в редакцию 27 марта 2020 г. Окончательный вариант – 24 апреля 2020 г.

Algorithm for reconstructing complex coefficients of Laguerre–Gaussian modes from the intensity distribution of their coherent superposition

S.G. Volotovskiy¹, S.V. Karpeev^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

In this paper, we consider a problem of reconstructing complex coefficients of the coherent superposition of Laguerre–Gaussian modes from the field intensity in a plane perpendicular to the propagation axis at a given distance using the Levenberg–Marquardt and Brent algorithm. The efficiency of using stage-by-stage optimization to restore complex coefficients of a superposition is demonstrated not only on model, but also on experimental intensity distributions. The algorithm can be used in optical information transmission through a turbulent atmosphere to process the received intensity distribution of the optical signal.

Keywords: optical information transmission, Laguerre–Gaussian modes, optimization of approximation by a modes’ superposition, reconstruction of complex coefficients, Levenberg–Marquardt algorithm, Brent algorithm.

Citation: Volotovskiy SG, Karpeev SV, Khonina SN. Algorithm for reconstructing complex coefficients of Laguerre–Gaussian modes from the intensity distribution of their coherent superposition. *Computer Optics* 2020; 44(3): 352-362. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-727.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Ministry of Science and Higher Education within the government project of FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-GZ/Ch3363/26 (theoretical part) and the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 18-29-20045-mk (numerical calculations).

References

- [1] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J Opt Soc Am A* 1987; 4(4): 651-654.
- [2] McGloin D, Dholakia K. Bessel beams: diffraction in a new light. *Contemporary Physics* 2005; 46(1): 15-28.
- [3] Adams MJ. An introduction to optical waveguides. Chichester: John Wiley & Sons; 1981.
- [4] Dienerowitz M, Mazilu M, Dholakia K. Optical manipulation of nanoparticles: a review. *J Nanophoton* 2008; 2(1): 021875. DOI: 10.1117/1.2992045.
- [5] Ustinov AV, Niziev VG, Khonina SN, Karpeev SV. Local characteristics of paraxial Laguerre–Gaussian vortex beams with a zero total angular momentum. *J Mod Opt* 2019; 66(20): 1961-1972. DOI: 10.1080/09500340.2019.1686183.
- [6] Ion JC. Laser processing of engineering materials: Principles, procedure and industrial applications. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann; 2005.
- [7] Cheng J, Liu C, Shang S, Liu D, Perrie W, Dearden G, Watkins K. A review of ultrafast laser materials micromachining. *Opt Laser Technol* 2013; 46: 88-102.
- [8] Podlipnov VV, Ivliev NA, Khonina SN, Nesterenko DV, Loşmanshii C, Meshalkin A, Achimova E, Abaskin V. Nonlinear effects in photoinduced nanomovement of carbazole-based azo-polymers. *Proc SPIE* 2019; 11146: 111460P. DOI: 10.1117/12.2527431.
- [9] Berdagué S, Facq P. Mode division multiplexing in optical fibers. *Appl Opt* 1982; 21(11): 1950-1955. DOI: 10.1364/AO.21.001950.
- [10] Khonina SN, Porfirev AP, Karpeev SV. Recognition of polarization and phase states of light based on the interaction of nonuniformly polarized laser beams with singular phase structures. *Opt Express* 2019; 27(13): 18484-18492. DOI: 10.1364/OE.27.018484.
- [11] Čelechovský R, Bouchal Z. Optical implementation of the vortex information channel. *New J Phys* 2007; 9(9): 328. DOI: 10.1088/1367-2630/9/9/328.
- [12] Larkin AS, Pushkarev DV, Degtyarev SA, Khonina SN, Savel’ev AB. Generation of Hermite – Gaussian modes of high-power femtosecond laser radiation using binary-phase diffractive optical elements. *Quantum Electron* 2016; 46(8): 733-737. DOI: 10.1070/QEL16114.
- [13] Busleev NI, Kudryashov SI, Danilov PA, Porfir’ev AP, Saraeva IN, Rudenko AA, Umanskaya SF, Zayarnyi DA, Ionin AA, Khonina SN. Symmetric nanostructuring and plasmonic excitation of gold nanostructures by femtosecond Laguerre – Gaussian laser beams. *Quantum Electron* 2019; 49(7): 666-671. DOI: 10.1070/QEL16888
- [14] Malik M, O’Sullivan M, Rodenburg B, Mirhosseini M, Leach J, Lavery MPJ, Padgett MJ, Boyd RW. Influence of atmospheric turbulence on optical communications using orbital angular momentum for encoding. *Opt Express* 2012; 20(12): 13195-13200. DOI: 10.1364/OE.20.013195.
- [15] Zhou Y, Yuan Y, Qu J, Huang W. Propagation properties of Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam in non-Kolmogorov turbulence. *Opt Express* 2016; 24(10): 10682-10693. DOI: 10.1364/OE.24.010682.
- [16] Cang J, Xiu P, Liu X. Propagation of Laguerre-Gaussian and Bessel-Gaussian Schell-model beams through paraxial optical systems in turbulent atmosphere. *Opt Laser Technol* 2013; 54(30): 35-41. DOI: 10.1016/j.optlastec.2013.05.002.
- [17] Porfirev AP, Kirilenko MS, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium. *Appl Opt* 2017; 56(11): E8-E15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
- [18] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J, Wang Y., Experimental selec-

- tion of spatial Gauss-Laguerre modes. *Optical Memory and Neural Networks* 2000; 9(1): 69-74.
- [19] Jassemnejad B, Bohannan A, Lekki J, Weiland K. Mode sorter and detector based on photon orbital angular momentum. *Opt Eng* 2008; 47(5): 053001.
- [20] Kaiser T, Flamm D, Schröter S, Duparré M. Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters. *Opt Express* 2009; 17(11): 9347-9356.
- [21] Berkhout GCG, Lavery MPJ, Courtial J, Beijersbergen MW, Padgett MJ. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 153601.
- [22] Wang Z, Zhang N, Yuan X. High-volume optical vortex multiplexing and de-multiplexing for free-space optical communication. *Opt Express* 2011; 19: 482-492.
- [23] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, Tur M, Kristensen P, Huang H, Willner AE, Ramachandran S. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science* 2013; 340(6140): 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [24] Huang H, Milione G, Lavery MPJ, Xie G, Ren Y, Cao Y, Ahmed N, Nguyen TA, Nolan DA, Li M-J, Tur M, Alfano RR, Willner AE. Mode division multiplexing using an orbital angular momentum mode sorter and MIMO-DSP over a graded-index few-mode optical fibre. *Sci Rep* 2015; 5: 14931. DOI: 10.1038/srep14931.
- [25] Khonina SN, Karpeev SV, Parandin VD. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre-Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles. *Opt Las Eng* 2018; 105: 68-74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
- [26] Turnbull GA, Robertson DA, Smith GM, Allen L, Padgett MJ. The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate. *Opt Commun* 1996; 127: 183-188.
- [27] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. Rotation of Gauss-Laguerre multimodal light beams in free space. *Tech Phys Lett* 1997; 23(9): 657-658.
- [28] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes. *Optics and Spectroscopy* 1998; 85(4): 636-644.
- [29] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J. Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of a diffractive phase element. *Opt Commun* 2000; 175(4-6): 301-308. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00472-7.
- [30] Carpentier AV, Michinel H, José RS, et al. Making optical vortices with computer-generated holograms. *Am J Phys* 2008; 76(10): 916-921.
- [31] Matsumoto N, Ando T, Inoue T, Ohtake Y, Fukuchi N, Hara T. Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators. *J Opt Soc Am A* 2008; 25: 1642-1651.
- [32] Li S, Wang Z. Generation of optical vortex based on computer-generated holographic gratings by photolithography. *Appl Phys Lett* 2013; 103(14): 141110.
- [33] Berezny AE, Karpeev SV, Uspleniev GV. Computer-generated holographic optical elements produced by photolithography. *Opt Lasers Eng* 1991; 15(5): 331-340. DOI: 10.1016/0143-8166(91)90020-T.
- [34] Golub MA, Karpeev SV, Krivoslykov SG, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Spatial filter investigation of the distribution of power between transverse modes in a fiber waveguide. *Sov J Quantum Electron* 1984; 14(9): 1255-1256. – DOI: 10.1070/QE1984v014n09ABEH006201.
- [35] Khonina SN, Almazov AA. Design of multi-channel phase spatial filter for selection of Gauss-Laguerre laser modes. *Proc SPIE* 2002; 4705: 30-39.
- [36] Golub MA, Karpeev SV, Kazanskiĭ NL, Mirzov AV, Sisakyan IN, Soifer VA, Uvarov GV. Spatial phase filters matched to transverse modes. *Sov J Quantum Electron* 1988; 18(3): 392-393. DOI: 10.1070/QE1988v018n03ABEH011528.
- [37] Leach J, Courtial J, Skeldon K, Barnett SM, Franke-Arnold S, Padgett MJ. Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon. *Phys Rev Lett* 2004; 92: 013601.
- [38] Berkhout GCG, Lavery MPJ, Padgett MJ, Beijersbergen MW. Measuring orbital angular momentum superpositions of light by mode transformation. *Opt Lett* 2011; 36: 1863-1865.
- [39] Lavery MPJ, Berkhout GCG, Courtial J, Padgett MJ. Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation. *J Opt* 2011; 13: 064006.
- [40] D'errico A, D'amelio R, Piccirillo B, Cardano F, Marrucci L. Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of structured light beams. *Optica* 2017; 4: 1350-1357. DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
- [41] Gu X, Krenn M, Erhard M, Zeilinger A. Gouy phase radial mode sorter for light: concepts and experiments. *Phys Rev Lett* 2018; 120: 103601.
- [42] Fu D, Zhou Y, Qi R, Oliver S, Wang Y, Rafsanjani SM., Zhao J, Mirhosseini M, Shi Z, Zhang P, Boyd RW. Realization of a scalable Laguerre-Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter. *Opt Express* 2018; 26(25): 33057-33065. DOI: 10.1364/OE.26.033057.
- [43] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
- [44] Fontaine NK, Ryf R, Chen H, Neilson DT, Kim K, Carpenter J. Laguerre-Gaussian mode sorter. *Nat Commun* 2019; 10: 1865. DOI: 10.1038/s41467-019-09840-4.
- [45] More JJ. The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory. In Book: Watson GA, ed. *Numerical analysis*. New York: Springer-Verlag; 1978: 105-116.
- [46] Brent RP. *Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall; 1973.
- [47] Kogelnik H, Li T. *Laser beams and resonators*. *Appl Opt* 1966; 5(10): 1550-1567.
- [48] Siegman AE. *Lasers*. Universe Science Books; 1986: 642-652.
- [49] Pavelyev VS, Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Analysis of transverse modes of laser radiation. In Book: Soifer VA, ed. *Computer design of diffractive optics*. Ch 8. Cambridge: Woodhead Publishing and Cambridge International Science Publishing; 2012: 515-670.
- [50] Pavelyev VS, Khonina SN. Fast iterative calculation of phase formers of Gauss-Laguerre modes. *Computer Optics* 1997; 17: 15-20.
- [51] Hickson P. Wave-front curvature sensing from a single defocused image. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(5): 1667-1673. DOI: 10.1364/JOSAA.11.001667.
- [52] Tokovinin A, Heathcote S. DONUT: measuring optical aberrations from a single extrafocal image. *Publ Astron Soc Pac* 2006; 118(846): 1165-1175. DOI: 10.1086/506972.

Authors' information

Sergey Gennadjevich Volotovskiy (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the Senior Researcher in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: sv@ipsiras.ru.

Sergei Vladimirovich Karpeev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: karp@smr.ru.

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@ipsiras.ru.

Received March 27, 2020. The final version – April 24, 2020.
