

## Дизайн и изготовление зеркала с поверхностью свободной формы для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области

Е.С. Андреев<sup>1,2</sup>, Е.В. Бызов<sup>1</sup>, Д.А. Быков<sup>1,2</sup>, М.А. Моисеев<sup>1</sup>, Н.Л. Казанский<sup>1,2</sup>, Л.Л. Досколович<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Представлены результаты расчёта зеркала с поверхностью свободной формы для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области с угловыми размерами  $30^\circ \times 15^\circ$ . Метод расчёта основан на формулировке задачи расчёта «лучевого отображения» как задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс и её сведении к решению линейной задачи о назначениях. Приведены описание процесса изготовления зеркала методом фрезерования и результаты экспериментальных измерений формируемого зеркалом светового распределения. Результаты экспериментальных исследований находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования и подтверждают «технологичность» использованного метода расчёта.

**Ключевые слова:** обратная задача, зеркало с поверхностью свободной формы, освещённость, метод фрезеровки.

**Цитирование:** Андреев, Е.С. Дизайн и изготовление зеркала с поверхностью свободной формы для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области / Е.С. Андреев, Е.В. Бызов, Д.А. Быков, М.А. Моисеев, Н.Л. Казанский, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 4. – С. 540-546. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-738.

**Citation:** Andreev ES, Byzov EV, Bykov DA, Moiseev MA, Kazanskiy NL, Doslolovich LL. Design and fabrication of a freeform mirror generating a uniform illuminance distribution in a rectangular region. Computer Optics 2020; 44(4): 540-546. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-738.

### Введение

Задача расчёта преломляющей или отражающей оптической поверхности из условия формирования заданного распределения освещённости в некоторой области относится к классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне сложной. В большинстве случаев данная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения (НДУ) эллиптического типа (обобщённого уравнения Монжа–Ампера) [1–7]. Решение этого НДУ является сложной теоретической и вычислительной задачей.

Формулировка обратной задачи расчёта оптической поверхности как задачи решения НДУ предполагает, что рассчитываемая поверхность является гладкой. Это накладывает ряд ограничений на класс распределений освещённости, которые могут быть сформированы этой поверхностью. Например, гладкая оптическая поверхность не позволяет сформировать распределение освещённости, определённое в несвязной области, состоящей из непересекающихся подобластей. Ограничения также возникают и при формировании многосвязных областей и областей со сложными негладкими границами.

Ряд обратных задач расчёта оптических поверхностей может быть сформулирован в виде задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс (ЗПМ) со специальной функцией стоимости [8–19]. Данная ЗПМ

описывает задачу расчёта лучевого отображения (т.е. отображения, связывающего координаты падающих на оптическую поверхность лучей и координаты преломлённых (отражённых) лучей в освещаемой области), которое обеспечивает формирование заданного распределения освещённости. При этом восстановление оптической поверхности по лучевому отображению эквивалентно задаче восстановления функции по её полному дифференциалу. «ЗПМ-формулировка» задачи имеет ряд преимуществ и, например, в отличие от задачи решения НДУ позволяет рассчитывать непрерывные кусочно-гладкие оптические поверхности, формирующие требуемые распределения освещённости в несвязных областях и в областях со сложными и негладкими границами [16–19].

В работах ряда авторов данной статьи было предложено осуществлять расчёт лучевого отображения непосредственно через решение ЗПМ [15–19]. Для этого ЗПМ записывается в дискретной форме как линейная задача о назначениях (ЛЗН) [20]. Хорошие рабочие характеристики такого «ЛЗН-подхода» были продемонстрированы для различных задач расчёта оптических элементов. Тем не менее, в известных работах не было представлено результатов экспериментальной верификации ЛЗН-подхода.

В настоящей работе представлены первые экспериментальные результаты по изготовлению и исследованию зеркала свободной формы, рассчитанного в

рамках ЛЗН-подхода и предназначенного для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области. Результаты экспериментальных исследований находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования и подтверждают «технологичность» использованного метода расчёта.

### 1. Метод расчёта зеркал на основе решения линейной задачи о назначениях

Геометрия задачи расчёта зеркала для формирования заданного распределения освещённости показана на рис. 1. Излучение от точечного (компактного) источника  $O$  падает на зеркало. Задача состоит в расчёте поверхности зеркала, обеспечивающего формирование в области  $D$  в плоскости  $x=f_0$  заданного распределения освещённости  $E$ . Под освещённостью понимается световой поток, падающий на единицу площади.

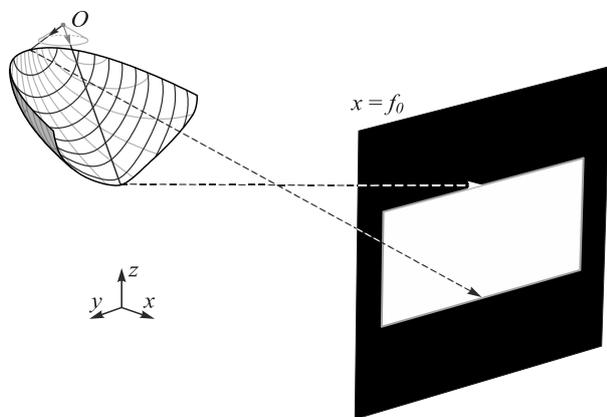


Рис. 1. Геометрия задачи расчёта зеркала

В рассматриваемой задаче считается выполненным условие дальней зоны. Это условие означает, что размерами зеркала, по сравнению с расстоянием до плоскости  $x=f_0$ , можно пренебречь. В этом случае зеркало можно рассматривать как точечный источник  $O'$ , т.е. считать все отражённые от зеркала лучи выходящими из одной точки. Будем считать, что излучение точечного источника  $O$  описывается функцией интенсивности  $I$ , заданной в некоторой области  $G$  на единичной сфере. На рис. 1 источник излучает в пределах некоторого конуса. Под интенсивностью понимается световой поток, излученный источником в единицу телесного угла.

Преобразование светового потока от источника излучения  $O$ , происходящее при отражении падающих лучей от поверхности зеркала, можно описывать как отображение области  $G$  в область  $D$ . Причём это «лучевое отображение» (т.е. отображение, определяющее координаты точек пересечения отражённых лучей с плоскостью  $x=f_0$  через координаты падающих лучей из области  $G$ ) удовлетворяет закону сохранения светового потока. В базовых теоретических работах [8, 9] показано, что в рассматриваемой задаче расчёта зеркала расчёт лучевого отображения может

быть сведён к решению задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс (ЗПМ) с неквадратичной функцией стоимости. Под исходным и финальным распределениями масс в данной ЗПМ понимаются распределение интенсивности  $I$  точечного источника, заданное в области  $G$  на единичной сфере, и требуемое распределение освещённости  $E$ , заданное в области  $D$ . Функция стоимости «перевозки» единицы массы (единицы светового потока) из области  $G$  в область  $D$  является известной [8, 9].

В работах ряда авторов данной статьи предложено осуществлять расчёт лучевого отображения непосредственно через решение ЗПМ [15–19]. Для решения ЗПМ она записывается в дискретной форме как линейная задача о назначениях (ЛЗН). При этом используется следующий подход. Области  $G$  и  $D$  аппроксимируются  $N$  ячейками с одинаковой «массой» (с одинаковым световым потоком). В этом случае все отображения  $G \rightarrow D$ , сохраняющие световой поток, можно описать перестановками из  $N$  чисел, которые определяют, в какие ячейки области  $D$  отображаются ячейки области  $G$ . В рамках ЛЗН отображение ячейки области  $D$  с номером  $i$  в ячейку области  $G$  с номером  $j$  можно интерпретировать как выполнение  $i$ -м работником  $j$ -й работы. При этом стоимость выполнения работы определяется известной функцией стоимости «перевозки» [8, 9]. Отметим, что для решения ЛЗН известны различные эффективные алгоритмы (венгерский алгоритм, алгоритм Джонкера–Волгенанта, алгоритм аукциона), решающие задачу за полиномиальное время.

В рамках используемого «ЛЗН-метода» поверхность зеркала рассчитывается через лучевое отображение, которое находится из решения ЛЗН. Для этого поверхность зеркала записывается в виде огибающей двухпараметрического семейства параболоидов вращения, у которых положения фокусов совпадают с точечным источником  $O$ , а направления осей задаются радиус-векторами точек области  $D$ . При таком представлении поверхности зеркала отражённые от зеркала лучи будут приходить в область  $D$ . При выбранном представлении поверхность зеркала определяется через «фокальную функцию», равную фокусным расстояниям параболоидов семейства. Данная функция определяет формируемое зеркалом распределение интенсивности в области  $D$ . Для расчёта фокальной функции используются уравнения огибающей поверхности, сводящие расчёт фокальной функции к задаче восстановления функции по её полному дифференциалу.

С использованием описанного ЛЗН-метода было рассчитано зеркало для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области с угловыми размерами  $30^\circ \times 15^\circ$ , расположенной в удалённой плоскости  $x=f_0$ . Расчёт производился для источника, излучающего по закону Ламберта в пределах кругового конуса с углом при вершине  $160^\circ$  (данный конус схематично показан на рис. 1). Рассчитанное зеркало

показано на рис. 2а и имеет размеры 38,2×41,4×26,8 мм<sup>3</sup>. Отметим, в случае дальней зоны зеркало может быть промасштабировано требуемым образом, т.е. радиус-векторы точек поверхности зеркала относительно точки положения источника могут быть умножены на некоторый коэффициент для получения требуемых габаритных размеров. На рис. 2б показано распределение освещённости, формируемое зеркалом в удалённой плоскости  $x=3000$  мм. Данное распределение было рассчитано созданными авторами статьи программными средствами, реализующими метод трассировки лучей. При расчёте распределения использовались 1 000 000 лучей. Рис. 2б показывает формирование фактически постоянной освещённости в области заданных размеров. Для верификации выполненных расчётов работа зеркала также была промоделирована в коммерческой программе для светотехнических расчётов TracePro [21]. Результаты моделирования приведены на рис. 3 и также показывают формирование равномерного прямоугольного распределения.

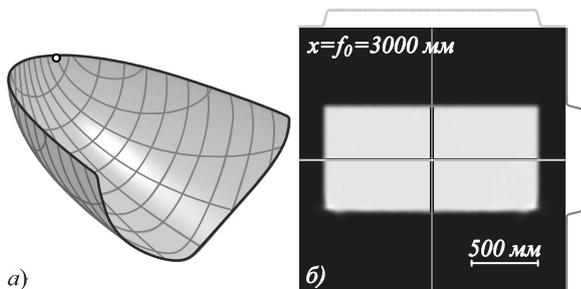


Рис. 2. Зеркало для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области с угловыми размерами  $30^\circ \times 15^\circ$  в удалённой плоскости (точкой отмечено положение источника) (а); рассчитанное распределение освещённости, формируемое зеркалом в плоскости  $x=3000$  мм (б)

## 2. Изготовление зеркала методом фрезеровки

Рассчитанное зеркало (рис. 2а) было изготовлено методом фрезерования на обрабатывающем центре Haas Minimill [22]. Для изготовления зеркала в системе автоматизированного проектирования Rhinoceros 3D [23] была создана CAD-модель зеркала (рис. 4). Отметим, что «глубина» зеркала (габаритный размер зеркала по оси  $z$ ) составляет 26,8 мм. Имеющиеся в распоряжении авторов статьи инструменты для фрезеровки (наборы цилиндрических и сферических фрез) позволяют изготавливать поверхности с такой «глубиной», только если эти поверхности имеют радиус кривизны более 3 мм. Здесь и далее под радиусом кривизны понимается величина, обратная к абсолютной величине максимальной нормальной кривизны. Данные ограничения не учитывались при расчёте зеркала, и минимальный радиус кривизны рассчитанного зеркала (рис. 2а) составлял 0,26 мм (данное значение достигается в самой нижней точке зеркала по координате  $z$ ). Поэтому на этапе формирования CAD-

модели было произведено дополнительное сглаживание поверхности зеркала (аппроксимация рациональными B-сплайнами с точностью 0,015 мм), чтобы выполнить технологические требования. Для полученной CAD-модели на рис. 4 минимальный радиус нормальной кривизны составляет 3,18 мм. Отметим, что сглаживание поверхности приводит к ухудшению качества формируемого зеркалом распределения освещённости (нормированное среднеквадратическое отклонение формируемого распределения освещённости увеличивается с 5 % (рис. 2б) до 9 %).

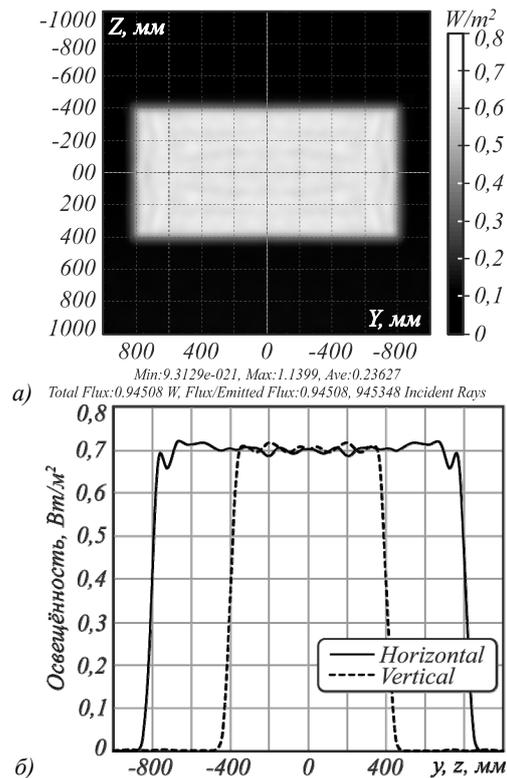


Рис. 3. Рассчитанное в программе TracePro распределение освещённости, формируемое зеркалом при точечном ламбертовском источнике (излучаемый поток 1 Вт) в удалённой плоскости  $x=3000$  мм (а); центральные сечения рассчитанного распределения (б)

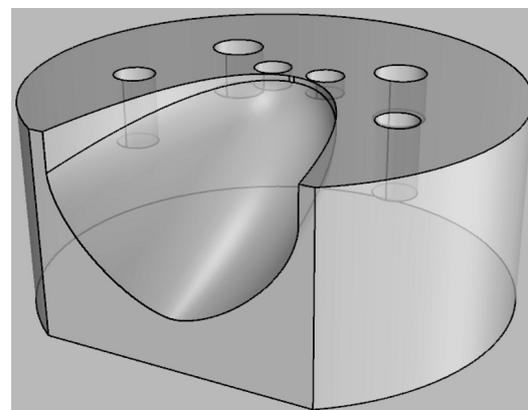


Рис. 4. CAD-модель зеркала

В последующих экспериментальных исследованиях зеркало, рассчитанное для точечного источника

излучения, будет использоваться с реальным протяженным источником излучения в виде светодиода. Поэтому в программе TracePro было выполнено моделирование работы сглаженного зеркала при размерном источнике в виде светодиода Cree XP-C, имеющего размер  $3,45 \times 3,45 \text{ мм}^2$  и приблизительно ламбертовскую диаграмму излучения. Результаты моделирования показаны на рис. 5. Распределение на рис. 5, по сравнению с распределением на рис. 3, является более неравномерным. Эта неравномерность, в частности, обусловлена размерами светодиода. В рассматриваемом примере минимальное расстояние от светодиода (размер  $3,45 \times 3,45 \text{ мм}^2$ ) до поверхности зеркала составляет всего 5,6 мм. Поэтому в данном случае светодиод нельзя считать точечным источником. Несмотря на это, формируемое зеркалом распределение является достаточно хорошим и подтверждает «устойчивость» рассчитанного зеркала к вариациям размера источника и диаграмме излучения, которая лишь приблизительно соответствует ламбертовскому закону излучения.

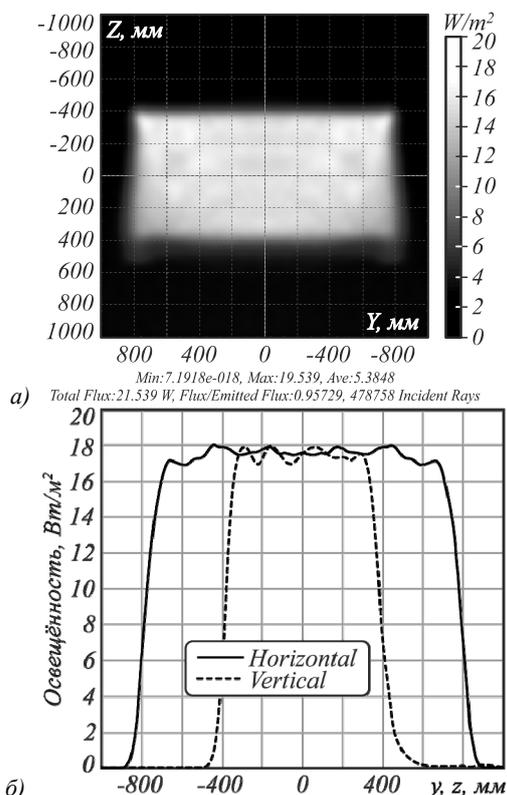


Рис. 5. Рассчитанное в программе TracePro распределение освещённости, формируемое сглаженным зеркалом в удалённой плоскости  $x=3000 \text{ мм}$  при протяжённом источнике в виде светодиода Cree XP-C (излучаемый поток 22,5 Вт) с размером  $3,45 \times 3,45 \text{ мм}^2$  (а). И центральные сечения рассчитанного распределения (б)

На основе созданной САД-модели (рис. 4) была составлена программа в автоматизированной системе, предназначенной для подготовки управляющих программ для станков с ЧПУ. Такая программа содержит информацию о траекториях движения режущего ин-

струмента и прочие параметры станка, необходимые для фрезеровки заготовки и получения спроектированной модели рассчитанного зеркала.

Далее зеркало было изготовлено методом фрезеровки на трёхосевом обрабатывающем центре Haas Minimill. При фрезеровке использовались прецизионные цилиндрические и сферические фрезы японского производителя Kyocera. В качестве заготовки для зеркала использовалась дюралюминиевая плита (сплав Д16Т). Изготовленное зеркало показано на рис. 6а. Для удаления следов фрезы выполнялась предварительная абразивная обработка полученной поверхности гибкими абразивами с размером зерна от 7 до 10 мкм. Для получения зеркальной поверхности оптического качества выполнялась финишная полировка войлоками с нанесённой алмазной пастой с постепенным снижением размера зерна от 7 мкм до 0,1 мкм. Фотография зеркала после финишной полировки приведена на рис. 6б.

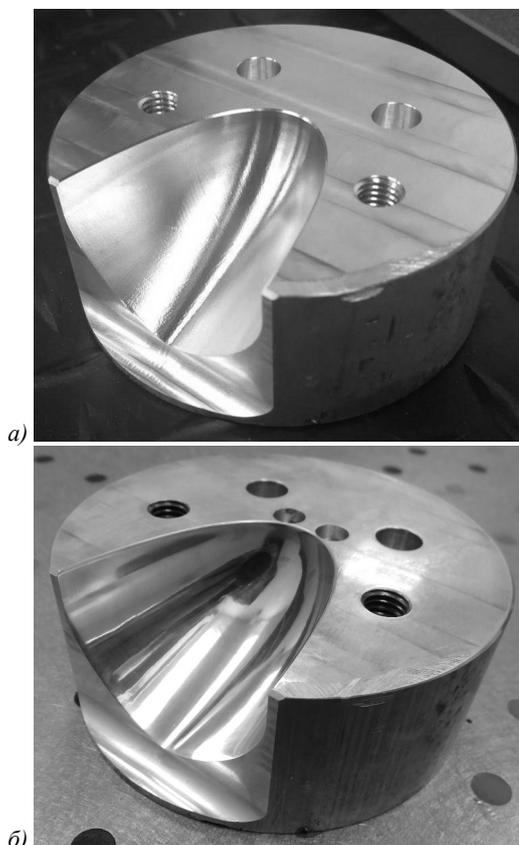


Рис. 6. Фотографии изготовленного зеркала до полировки (а) и после полировки (б)

### 3. Экспериментальное исследование работы зеркала

Для измерения распределения освещённости, формируемого изготовленным зеркалом, использовался гониофотометрический стенд. Стенд включает в себя две прецизионные поворотные платформы, для задания ориентации зеркала с точностью 1 угловая минута по зенитному и азимутальному углам. Для

оценки световых характеристик использовался люксметр Testo 545, измеряющий освещённость с разрешением 1 люкс и расположенный на некотором расстоянии от зеркала. Это расстояние должно быть выбрано таким образом, чтобы изготовленное зеркало вместе со светодиодом можно было считать точечным источником света. Для сравнения результатов измерения с результатами численного моделирования (рис. 5) расстояние было выбрано равным 3000 мм.

На рис. 7а представлены измеренные центральные сечения формируемого зеркалом распределения. Отметим, что при построении графиков учитывался перевод из угловых координат в декартовые. Измеренные значения освещённости нормированы на максимальные значения и отмечены окружностями, которые для наглядности соединены непрерывными линиями. Угловое расстояние между измеренными зна-

чениями составляет  $1^\circ$ . Для сравнения на рис. 7а также показаны графики центральных сечений, полученные при численном моделировании (см. рис. 5б). Из рис. 7а видно, что результаты экспериментальных измерений находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования. Для визуального контроля равномерности полученного светового распределения было получено изображение светового пятна на экране, расположенном на расстоянии 3000 мм от зеркала (рис. 7б). Изображение полученного пятна также визуально похоже на результат численного моделирования распределения освещённости на рис. 5. Таким образом, представленные результаты экспериментальных исследований находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования.

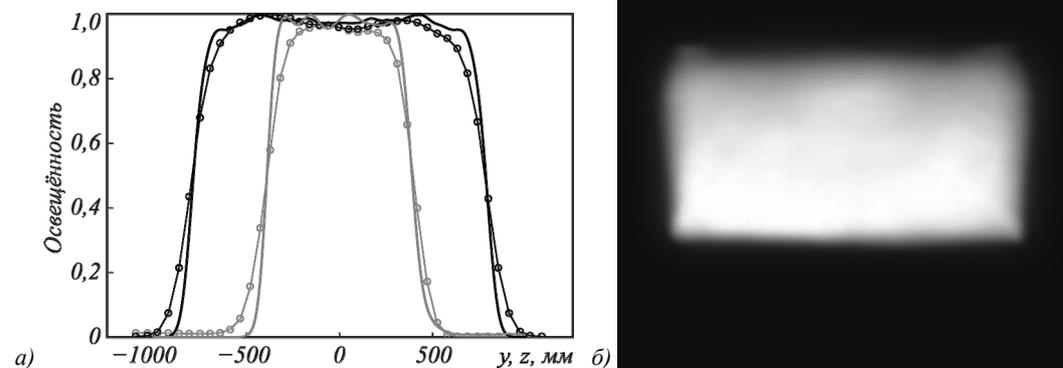


Рис. 7. Измеренные нормированные профили распределения освещённости в двух центральных сечениях (линии с окружностями) и профили, полученные численным моделированием (непрерывные линии) (а); фотография формируемого зеркалом светового пятна на удалённом экране (б)

### Заключение

С использованием ЛЗН-метода было рассчитано зеркало для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области с угловыми размерами  $30^\circ \times 15^\circ$ , расположенной в удалённой плоскости. Зеркало изготовлено методом фрезерования. На гониофотометрическом стенде измерены распределения освещённости в центральных сечениях формируемого зеркалом светового пятна. Результаты экспериментальных исследований находятся в хорошем соответствии с результатами численного моделирования. Это показывает технологическую реализуемость зеркал, рассчитанных ЛЗН-методом, с помощью технологии трёхосной фрезеровки. Полученные результаты могут найти применение при создании различных освещающих и прожекторных устройств.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00326) в части расчёта, изготовления и исследования зеркала в оптиче-

ском эксперименте и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части численного моделирования работы зеркала.

### Литература

1. **Wu, R.** Design of freeform illumination optics / R. Wu, Z. Feng, Z. Zheng, R. Liang, P. Benítez, J.C. Miñano // *Laser & Photonics Reviews*. – 2018. – Vol. 12, Issue 7. – P. 1700310. – DOI: 10.1002/lpor.201700310.
2. **Wu, R.** A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping / R. Wu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 18. – P. 20974-20989. – DOI: 10.1364/OE.21.020974.
3. **Wu, R.** Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Xiu // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38, Issue 2. – P. 229-231. – DOI: 10.1364/OL.38.000229.
4. **Wu, R.** Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design / R. Wu, Y. Zhang, M.M. Sulman,

- Z. Zheng, P. Benítez, J.C. Miñano // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 13. – P. 16161-16177. – DOI: 10.1364/OE.22.016161.
5. **Ma, Y.** Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Lui, H. Li // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54, Issue 14. – P. 4503-4508. – DOI: 10.1364/AO.54.004503.
  6. **Mao, X.** Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping / X. Mao, S. Xu, X. Hu, Y. Xie // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 22. – P. 6324-6331. – DOI: 10.1364/AO.56.006324.
  7. **Wu, R.** Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources / R. Wu, S. Chang, Z. Zheng, L. Zhao, X. Liu // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 7. – P. 1619-1622. – DOI: 10.1364/OL.43.001619.
  8. **Glimm, T.** Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2003. – Vol. 117, Issue 3. – P. 4096-4108. – DOI: 10.1023/A:1024856201493.
  9. **Wang, X.-J.** On the design of a reflector antenna II / X.-J. Wang // *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. – 2004. – Vol. 20, Issue 3. – P. 329-341. – DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
  10. **Gutiérrez, C.E.** Refraction problems in geometric optics / C.E. Gutiérrez. – In: *Fully nonlinear PDEs in real and complex geometry and optics* / ed. by C.E. Gutiérrez, E. Lanconelli. – New York: Springer, 2014. – P. 95-150. – DOI: 10.1007/978-3-319-00942-1\_3.
  11. **Gutiérrez, C.E.** The refractor problem in reshaping light beams / C.E. Gutiérrez, Q. Huang // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2009. – Vol. 193, Issue 2. – P. 423-443. – DOI: 10.1007/s00205-008-0165-x.
  12. **Rubinstein, J.** Intensity control with a free-form lens / J. Rubinstein, G. Wolansky // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24, Issue 2. – P. 463-469. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
  13. **Oliker, V.** Designing freeform lenses for intensity and phase control of coherent light with help from geometry and mass transport / V. Oliker // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2011. – Vol. 201, Issue 3. – P. 1013-1045. – DOI: 10.1007/s00205-011-0419-x.
  14. **Oliker, V.** Beam shaping with a plano-freeform lens pair / V. Oliker, L.L. Doskolovich, D.A. Bykov // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 15. – P. 19406-19419. – DOI: 10.1364/OE.26.019406.
  15. **Doskolovich, L.L.** Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 22. – P. 26378-26392. – DOI: 10.1364/OE.25.026378.
  16. **Doskolovich, L.L.** Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus, V. Oliker // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 19. – P. 24602-24613. – DOI: 10.1364/OE.26.024602.
  17. **Bykov, D.A.** Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.A. Bezus, N.L. Kazanskiy // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 21. – P. 27812-27825. – DOI: 10.1364/OE.26.027812.
  18. **Doskolovich, L.L.** Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, A.A. Mingazov, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 9. – P. 13083-13097. – DOI: 10.1364/OE.27.013083.
  19. **Bykov, D.A.** Optimal mass transportation problem in the design of freeform optical elements generating far-field irradiance distributions for plane incident beam / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.A. Bezus // *Applied Optics*. – 2019. – Vol. 58, Issue 33. – P. 9131-9140. – DOI: 10.1364/AO.58.009131.
  20. **Munkres, J.** Algorithms for the assignment and transportation problems / J. Munkres // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 1957. – Vol. 5, Issue 1. – P. 32-38. – DOI: 10.1137/0105003.
  21. TracePro. Software for design and analysis of illumination and optical systems [Electronical Resource]. – URL: <https://www.lambdare.com/tracepro/> (request date 10.03.2020).
  22. Haas F1 Team. MiniMill [Electronical Resource]. – URL: <https://www.haascnc.com/machines/vertical-mills/mini-mills/models/minimill.html> (request date 10.03.2020).
  23. Rhinoceros [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.rhino-3d.ru/> (дата обращения 10.03.2020 г.).

#### Сведения об авторах

**Андреев Евгений Сергеевич**, в 2014 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по направлению «Прикладные математика и физика». Аспирант по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия», специальность «Оптика», Самарский университет. E-mail: [gsomix@gmail.com](mailto:gsomix@gmail.com).

**Бызов Егор Владимирович**, в 2014 году с отличием окончил обучение в магистратуре Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне Самарский университет) по направлению «Прикладные математика и физика». В списке научных работ Е.В. Бызова 15 публикаций и 1 авторское свидетельство. E-mail: [xameak@bigmir.net](mailto:xameak@bigmir.net).

**Быков Дмитрий Александрович** в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика и информатика». Доктор физико-математических наук (2017 г.), старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанофотоника, магнитооптика, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: [bykovd@gmail.com](mailto:bykovd@gmail.com).

**Моисеев Михаил Александрович**, в 2008 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности 010600 «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2011 г.), работает научным сотрудником в Лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Является членом международного научного общества SPIE. М.А. Моисеев – специалист в области решения обратных задач геометрической оптики. В списке научных работ М.А. Моисеева 35 статей и 7 авторских свидетельств. E-mail: [mikhail@smr.ru](mailto:mikhail@smr.ru).

**Казанский Николай Львович** в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Заведующий базовой кафедрой высокопроизводительных вычислений Самарского университета в ИСОИ РАН. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

**Досколович Леонид Леонидович**, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает ведущим научным сотрудником лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: [leonid@smr.ru](mailto:leonid@smr.ru).

---

ГРНТИ: 29.31.03

Поступила в редакцию 15 апреля 2020 г. Окончательный вариант – 19 мая 2020 г.

---

---

# Design and fabrication of a freeform mirror generating a uniform illuminance distribution in a rectangular region

E.S. Andreev<sup>1,2</sup>, E.V. Byzov<sup>1</sup>, D.A. Bykov<sup>1,2</sup>, M.A. Moiseev<sup>1</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

The design of a freeform mirror generating a uniform illuminance distribution in a rectangular region with angular dimensions of  $30^\circ \times 15^\circ$  is presented. The design method is based on the formulation of the problem of calculating the "ray-mapping" as a Monge-Kantorovich mass transportation problem and its subsequent reducing to a linear assignment problem. We describe a mirror fabrication process with the use of milling technology and present results of experimental measurements of the light distribution generated by the mirror. The experimental results are in good agreement with the results of numerical simulations and thus confirm the manufacturability of mirrors designed by the method proposed.

**Keywords:** inverse problem, freeform mirror, illuminance, milling technology.

**Citation:** Andreev ES, Byzov EV, Bykov DA, Moiseev MA, Kazanskiy NL, Doskolovich LL. Design and fabrication of a freeform mirror generating a uniform illuminance distribution in a rectangular region. *Computer Optics* 2020; 44(4): 540-546. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-738.

**Acknowledgements:** This work was funded by the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00326 (design, manufacture, and experimental investigation of the mirror) and the RF Ministry of Science and Higher Education under a government project of FSRC «Crystallography and Photonics» RAS (numerical simulation of the mirror).

## References

- [1] Wu R, Feng Z, Zheng Z, Liang R, Benítez P, Miñano JC. Design of freeform illumination optics. *Laser Photonics Rev* 2018; 12(7): 1700310. DOI: 10.1002/lpor.201700310.
  - [2] Wu R, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Liu X. A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping. *Opt Express* 2013; 21(18): 20974-20989. DOI: 10.1364/OE.21.020974.
  - [3] Wu R, Xu L, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Xiu X. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation. *Opt Lett* 2013; 38(2): 229-231. DOI: 10.1364/OL.38.000229.
  - [4] Wu R, Zhang Y, Sulman MM, Zheng Z, Benítez P, Miñano JC. Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design. *Opt Express* 2014; 22(13): 16161-16177. DOI: 10.1364/OE.22.016161.
  - [5] Ma Y, Zhang H, Su Z, He Y, Xu L, Lui X, Li H. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target. *Appl Opt* 2015; 54(14): 4503-4508. DOI: 10.1364/AO.54.004503.
  - [6] Mao X, Xu S, Hu X, Xie Y. Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping. *Appl Opt* 2017; 56(22): 6324-6331. DOI: 10.1364/AO.56.006324.
  - [7] Wu R, Chang S, Zheng Z, Zhao L, Liu X. Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources. *Opt Lett* 2018; 43(7): 1619-1622. DOI: 10.1364/OL.43.001619.
  - [8] Glimm T, Oliker V. Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *J Math Sci* 2003; 117(3): 4096-4108. DOI: 10.1023/A:1024856201493.
  - [9] Wang X-J. On the design of a reflector antenna II. *Calc Var Partial Dif* 2004; 20(3): 329-341. DOI: 10.1007/s00526-003-0239-4.
  - [10] Gutiérrez CE. Refraction problems in geometric optics. In Book: Gutiérrez CE, Lanconelli E, ed. *Fully nonlinear PDEs in real and complex geometry and optics*. New York: Springer, 2014: 95-150. DOI: 10.1007/978-3-319-00942-1\_3.
  - [11] Gutiérrez CE, Huang Q. The refractor problem in reshaping light beams. *Arch Ration Mech Anal* 2009; 193(2): 423-443. DOI: 10.1007/s00205-008-0165-x.
  - [12] Rubinstein J, Wolansky G. Intensity control with a freeform lens. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(2): 463-469. DOI: 10.1364/JOSAA.24.000463.
  - [13] Oliker V. Designing freeform lenses for intensity and phase control of coherent light with help from geometry and mass transport. *Arch Ration Mech Anal* 2011; 201(3): 1013-1045. DOI: 10.1007/s00205-011-0419-x.
  - [14] Oliker V, Doskolovich LL, Bykov DA. Beam shaping with a plano-freeform lens pair. *Opt Express* 2018; 26(15): 19406-19419. DOI: 10.1364/OE.26.019406.
  - [15] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region. *Opt Express* 2017; 25(22): 26378-26392. DOI: 10.1364/OE.25.026378.
  - [16] Doskolovich LL, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA, Oliker V. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems. *Opt Express* 2018; 26(19): 24602-24613. DOI: 10.1364/OE.26.024602.
  - [17] Bykov DA, Doskolovich LL, Mingazov AA, Bezus EA, Kazanskiy NL. Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions. *Opt Express* 2018; 26(21): 27812-27825. DOI: 10.1364/OE.26.027812.
  - [18] Doskolovich LL, Bykov DA, Mingazov AA, Bezus EA. Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions. *Opt Express* 2019; 27(9): 13083-13097. DOI: 10.1364/OE.27.013083.
-

- 
- |  |  |
|--|--|
| <p>[19] Bykov DA, Doskolovich LL, Mingazov AA, Bezus EA. Optimal mass transportation problem in the design of freeform optical elements generating far-field irradiance distributions for plane incident beam. <i>Appl Opt</i> 2019; 58(33): 9131-9140. DOI: 10.1364/AO.58.009131.</p> <p>[20] Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems. <i>J Soc Ind Appl Math</i> 1957; 5(1): 32-38. DOI: 10.1137/0105003.</p> | <p>[21] TracePro. Software for design and analysis of illumination and optical systems. Source: <a href="https://www.lambdare.com/tracepro/">https://www.lambdare.com/tracepro/</a>.</p> <p>[22] Haas F1 Team. MiniMill. Source: <a href="https://www.haascnc.com/machines/vertical-mills/mini-mills/models/minimill.html">https://www.haascnc.com/machines/vertical-mills/mini-mills/models/minimill.html</a>.</p> <p>[23] Rhinoceros. Source: <a href="https://www.rhino3d.com/">https://www.rhino3d.com/</a>.</p> |
|--|--|
- 

### *Authors' information*

**Evgeniy Sergeevich Andreev** graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. Graduate student majoring in Optics at Samara University. E-mail: [gsomix@gmail.com](mailto:gsomix@gmail.com).

**Egor Vladimirovich Byzov** graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics and Physics. He is coauthor of 15 scientific papers and 1 patent.

**Dmitry Alexandrovich Bykov** graduated with honors (2009) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Doctor of Physics and Mathematics (2017). Senior researcher at Samara University and at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include optics of resonant diffractive structures, magneto-optics of nanostructured materials, and electromagnetic diffraction theory. E-mail: [bykovd@gmail.com](mailto:bykovd@gmail.com).

**Mikhail Alexandrovich Moiseev** graduated with honors (2008) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. He received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2011) from Samara State Aerospace University. He is a researcher at the Diffraction Optics laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a SPIE-member. He is co-author of 23 scientific papers and seven inventions and patents. His current research interests include nonimaging

**Nikolay Lvovich Kazanskiy** graduated with honors (1981) from Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”, also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”. He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

**Leonid Leonidovich Doskolovich** graduated with honors (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara National Research University. Leading researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Samara University’s Technical Cybernetics sub-department. Current research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: [leonid@smr.ru](mailto:leonid@smr.ru).

---

*Received April 15, 2020. The final version – May 19, 2020.*

---