

## Метод секционирования многослойных объектов на основе модели рассеяния света

С.Д. Бажитов<sup>1</sup>, А.В. Ларичев<sup>2,3</sup>, А.В. Разгулин<sup>1</sup>, Т.Е. Романенко<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, дом 1, стр. 52;

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, дом 1, стр. 2;

<sup>3</sup> ИПЛИТ РАН – филиал ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН, 140700, Россия, г. Шатура, ул. Святоозерская, дом 1

### Аннотация

Рассматривается задача секционирования изображений многослойных объектов из наблюдаемых изображений, полученных при фокусировке изображающей системы на каждый слой и содержащих паразитные размытые изображения соседних слоев. Для описания размытия используется свертка с ядром, отвечающим физической модели некогерентного рассеяния света в приближении Френеля с априори неизвестными параметрами функции рассеяния точки. Предлагается метод граничного разделения секционирования, сочетающий использование данной физической модели размытия с современными методами оценки степени размытия и выделения границ на изображениях. Анализируются результаты тестирования метода граничного разделения на данных физических экспериментов с модельными многослойными объектами разных масштабов, и проводится качественное сравнение с существующими методами решения задачи оптического секционирования. Делается вывод о наибольшей эффективности метода на многослойных объектах с четко выделенными границами, на которых метод продемонстрировал практически полное восстановление искомым слоев.

**Ключевые слова:** секционирование, деконволюция, изображающая система, свертка, размытие.

**Цитирование:** Бажитов, С.Д. Метод секционирования многослойных объектов на основе модели рассеяния света / С.Д. Бажитов, А.В. Ларичев, А.В. Разгулин, Т.Е. Романенко // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 5. – С. 751-760. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1266.

**Citation:** Bazhitov SD, Larichev AV, Razgulin AV, Romanenko TE. Method of multilayer object sectioning based on a light scattering model. Computer Optics 2023; 47(5): 751-760. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1266.

### Введение

Актуальной проблемой, возникающей в офтальмологии, клеточной биологии и др. науках, является неинвазивное исследование трехмерной структуры полупрозрачных многослойных объектов живой и неживой природы. Один из перспективных подходов исследования основан на перефокусировке изображающей системы (например, с использованием методов адаптивной оптики [1]) для получения стека изображений слоев трехмерного объекта, находящихся на различной глубине. При этом изображения, регистрируемые в каждой плоскости наилучшего изображения, представляют собой суперпозицию истинного слоя в данной плоскости с размытыми изображениями соседних по глубине слоев. В связи с этим возникает проблема секционирования, то есть устойчивого к помехам получения «очищенного» от искажений стека искомым слоев.

Математическая постановка сводится к решению системы уравнений двумерной свертки (см., напри-

мер, работы [2–7] и цитированную в них литературу). Анализ современных методов 3D-деконволюции ([2], глава 14) показывает, что итерационные методы по сравнению с прямыми более точны, но обычно сопровождаются увеличением сложности вычислений и дополнительными требованиями к настройке параметров. Предложенный нами ранее в [3] подход использует итерационный алгоритм в поперечной спектральной плоскости с локализованным выбором параметров регуляризации, который в сочетании с эффективным распараллеливанием на многоядерных графических процессорах ([7]) показал, что увеличение сложности не является принципиальным.

При исследовании задач оптического секционирования обычно считается, что функция рассеяния точки (ядро свертки) известна. Однако даже при восстановлении двумерных изображений в реальных экспериментах ни форма функции рассеяния точки, ни её параметры не известны точно. Доступные в современной литературе публикации по оценке размытия обычно используют простые модели для ядра размы-

тия в форме цилиндра или гауссиана. Например, в [8] и [9] (см. также [10, 11]) авторы используют цилиндр в качестве ядра размытия, сила размытия характеризуется его радиусом, для определения которого сравниваются специальным образом обработанное распределение энергетического спектра с поведением соответствующих функций Бесселя, описывающих оптическую передаточную функцию. В [12] (см. также [13, 14, 15]) для восстановления параметра дефокусировки используется приближенная модель передаточной функции и проводится сравнение распределения ее нулей с нулями энергетического спектра размытого изображения. В [16] использовалось ядро в форме гауссиана для оценки параметра размытия на основе изучения распределения границ и анализа их размытия с помощью отношения модулей градиентов (см. также [10, 17, 18, 19] и обзор [20]).

В отличие от упомянутых выше работ используемая нами модель размытия имеет естественное оптическое происхождение (аналогичные модели см. в [3, 7, 21]), основанное на приближении Френеля скалярной теории дифракции в случае полностью некогерентного света. Задача секционирования решается для априори неизвестных параметров размытия между слоями, для определения которых используется оригинальный метод [22]. В отличие от [3] решение системы уравнений двумерной свертки выполняется в исходном пространстве, без перехода в спектральную плоскость, с помощью предложенного метода граничного разделения, сочетающего оптическую модель размытия и современные методы обработки изображений.

### 1. Модель изображающей системы

Рассмотрим принципиальную схему изображающей системы для оптического секционирования (рис. 1) [3].

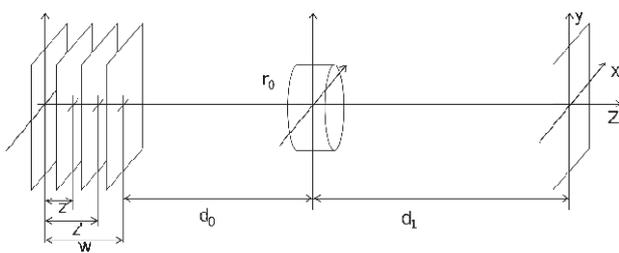


Рис. 1. Схема изображающей системы

Тонкий полупрозрачный трехмерный объект толщиной  $w$  помещается на расстоянии  $d_0$  перед тонкой линзой с функцией зрачка  $P(x, y)$ , являющейся индикаторной функцией круга радиуса  $r_0$  с центром в начале координат. Плоскость изображения  $(x, y)$  расположена на расстоянии  $d_1$  за объективом с переменным фокусным расстоянием. Здесь для простоты используется модель тонкой линзы, параметры  $d_0, d_1$  фиксированы, а фокусное расстояние  $R(z)$  является функцией переменной  $z$ :

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{d_0 + w - z} + \frac{1}{d_1}.$$

Пусть объект расположен в плоскости  $z'$  и характеризуется функцией интенсивности  $f(x', y', z')$ . Тогда в плоскости  $z$  регистрируется интенсивность, описываемая сверткой [3]:

$$g(x, y, z, z') = K(z, z') \times \iint_{R^2} h(x - x', y - y', z, z') f(x', y', z') dx' dy', \quad (1)$$

где  $h(\xi, \eta, z, z')$  определяется выражением:

$$h(\xi, \eta, z, z') = \left| \iint_{R^2} P(x', y') \exp(i\pi\lambda d^2 \varepsilon(z, z')(x'^2 + y'^2)) \times \exp(-2\pi i(\xi x' + \eta y')) dx' dy' \right|^2. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  – средняя длина волны некогерентного освещения, нормировочный множитель имеет вид

$$K(z, z') = 1 / \iint_{R^2} h(\xi, \eta, z, z') d\xi d\eta.$$

Функция  $\varepsilon = \varepsilon(z, z')$  описывает дефокусировку, вызванную возможным несовпадением плоскости  $z$  наилучшего изображения и плоскости объекта  $z'$ :

$$\varepsilon(z, z') = \frac{z' - z}{(d_0 + w - z')(d_0 + w - z)}.$$

При фокусировке на слой  $z_i$  наблюдаемое изображение  $g_i$  записывается в виде суммы вкладов каждого слоя:

$$g_i(x, y) = \sum_{j=1}^N g(x, y, z_i, z_j).$$

Изменяя  $i$  от 1 до  $N$ , можно получить в плоскости изображения стек изображений соответствующих сечений полупрозрачного объекта. Каждое наблюдаемое изображение поперечного сечения представляет собой истинное поперечное сечение, на котором также видны размытые изображения соседних по глубине сечений.

### 2. Метод нахождения искомого изображения

Пусть имеется набор наблюдаемых изображений  $g_i(x, y)$ , полученных при фокусировке изображающей системы на разные слои многослойного объекта. Задача оптического секционирования заключается в получении изображений исходных объектов на каждом слое, очищенных от размытых изображений с соседних слоев.

#### 2.1. Восстановление параметра функции рассеяния точки

Отметим, что в реальном физическом эксперименте функция рассеяния точки обычно известна неточно

и приходится решать систему уравнений двумерной свертки с неточно заданным ядром. В данной работе мы ограничиваемся случаем, когда модель, описываемая уравнениями (1), (2), считается известной, но отвечающий за степень размытия между слоями параметр  $d_{nm} = \lambda d_1^2 \varepsilon(z_n, z_m)$  точно неизвестен, однако известны естественные физические границы его изменения, задаваемые геометрическими размерами объекта и параметрами изображающей системы. Таким образом, здесь и ниже используется следующее выражение для функции рассеяния точки

$$h_{n-m} = h(\xi, \eta, d_{nm}) = \left| \iint_{R^2} P(x', y') \times \exp(i\pi d_{nm}(x'^2 + y'^2)) \exp(-2\pi i(\xi x' + \eta y')) dx' dy' \right|^2 \quad (3)$$

с неизвестным в общем случае параметром  $d_{nm}$  и необходим устойчивый к шумам способ его восстановления.

Способ нахождения параметра функции рассеяния точки подробно описан в статье [22], где представлены также результаты его тестирования на изображениях с различным уровнем шума. Заметим лишь, что используемый метод основан на сравнении не самих изображений, а модулей градиентов, сглаженных гауссианом. Это позволяет, с одной стороны, избавиться от не несущего полезной информации однородного фона при сравнении изображений, а с другой стороны, удастся компенсировать негативное влияние шумов на изображениях. Этот способ далее применяется в методе граничного разделения (см. п. 2.3).

### 2.2. Метод нахождения верхней границы для метода Канни на основе модели рассеяния света

Для определения границ изображения применяется метод Канни ([23]) в сочетании с использованием сглаженных гауссианом градиентов (см. также использование аналогичного алгоритма для обработки офтальмологических изображений в [24]), параметрами которого являются  $C_l = 1$  и  $C_h$ : нижняя и верхняя границы для метода Канни соответственно.

Для нахождения верхней границы  $C_h$  для изображения  $g(x, y)$  используется следующий итерационный метод с ядром размытия  $h(\xi, \eta, d)$ , для которого параметр  $d = \tilde{d}_2$  берется небольшим.  $C_h^n$  – значение верхней границы на  $n$ -й итерации метода.

$$C_h^0 = C_l = 1.$$

Далее на  $n$ -й итерации метод Канни с текущим значением верхней границы  $C_h^n$  применяется ко входному изображению  $g(x, y)$  и его размытой по модели (3) версии  $\hat{g}(x, y) = g(x, y) * h(d)$  соответственно:

$$g^{C_h^n}(x, y) = C(C_h^n)[g(x, y)],$$

$$\hat{g}^{C_h^n}(x, y) = C(C_h^n)[\hat{g}(x, y)].$$

Здесь  $C(C_h^n)[\cdot]$  – результат применения к изображению метода Канни с верхней границей  $C_h^n$ . Если на обоих изображениях методу удалось выделить границы, то значение верхней границы увеличивается на единицу  $C_h^{n+1} = C_h^n + 1$ .

Метод останавливается, когда ему удалось выделить границу на исходном изображении  $g^{C_h^n}(x, y)$ , но не удалось на размытом  $\hat{g}^{C_h^n}(x, y)$ .

### 2.3. Описание метода граничного разделения

Предлагаемый метод получения исходных слоев объекта на основе наблюдаемых изображений  $g_i(x, y)$  состоит из двух этапов.

На первом этапе происходит выделение тех частей искомого слоя в фокусе, которые непосредственно примыкают к границам, с использованием отличительных особенностей размытия.

На втором этапе устраняются артефакты, которые могли возникнуть из-за недостаточно точного подбора параметров размытия экспериментальной оптической системы, большого масштаба объекта в поперечном сечении или его неравномерной освещенности.

Для наглядности дальнейшее изложение будет проводиться на примере многослойного объекта, состоящего из трех скрещивающихся шпажек, расположенных ортогонально оптической оси изображающей системы (рис. 2). Геометрические параметры объекта, параметры устройства регистрации изображений, а также условия съемки указаны ниже в п. 3.

Подробное описание выбора параметров функции рассеяния точки  $d_{nm}$  и параметров метода  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, s$  в зависимости от специфики входных данных приводится в п. 4.

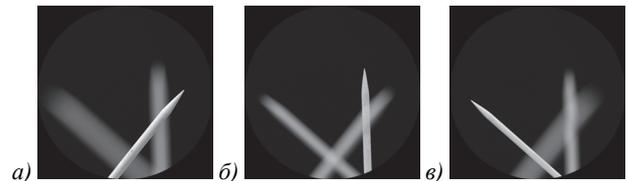


Рис. 2. Изображения многослойного объекта при фокусировке на а) 1-й слой ( $g_1(x, y)$ ), б) 2-й слой ( $g_2(x, y)$ ), в) 3-й слой ( $g_3(x, y)$ )

#### 2.3.1. Первый этап

Метод применяется последовательно к каждому изображению из стека входных изображений  $g_i(x, y)$ .

В качестве характерного результата работы алгоритма на первом этапе на приводимых рисунках будет рассматриваться его применение к изображению второго слоя  $g_2(x, y)$ .

**Шаг 1.1.** По входному изображению  $g_i(x, y)$  формируется его размытая по модели (3) версия

$$\hat{g}_i(x, y) = P^s [g_i * h(\tilde{d}_1)],$$

с применением оператора дополнительной постобработки

$$P[f(x, y)] = \{ \max(f(x, y-1), f(x, y+1)) + \max(f(x-1, y), f(x+1, y)) \} / 2,$$

который «сглаживает» локальный контраст по интенсивности для размытого по модели (3) изображения. Здесь  $h(\tilde{d}_1)$  – функция рассеяния точки для одного изображения с параметром размытия  $\tilde{d}_1$ , общим для всех слоев,  $P^*$  – применение оператора постобработки  $P$  к изображению  $(s)$  раз, \* – знак оператора двумерной свертки,  $i = 1, N$ .

На рис. 3а представлен результат размытия изображения  $g_2(x, y)$  по модели (3), на нем характер размытия в части локального контраста отличается от размытия в стеке входных изображений, что требует применения оператора  $P$ , результат работы которого  $\hat{g}_2(x, y)$  представлен на рис. 3б.



Рис. 3. Промежуточные результаты шага 1.1: (а)  $g_2 * h(\tilde{d}_1)$ , (б)  $\hat{g}_2(x, y)$ , (в)  $\tilde{g}_2(x, y)$

Для получения границы слоя в фокусе, которая на следующих шагах будет участвовать в построении маски слоя, рассматривается разность

$$\bar{g}_i(x, y) = g_i(x, y) - \hat{g}_i(x, y)$$

между изображением из исходного стека  $g_i(x, y)$  и его размытой версией  $\hat{g}_i(x, y)$  (см. рис. 3в).

**Шаг 1.2.** Для получения маски искомого слоя в фокусе метод выделения границ Канни, описанный в п.2.2, применяется к полученным изображениям разности  $\bar{g}_i(x, y)$  (см. рис. 4а) и к стеку исходных изображений  $g_i(x, y)$  (см. рис. 4б) соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i^C(x, y) &= C_{\tilde{d}_2}[\bar{g}_i(x, y)], \\ g_i^C(x, y) &= C_{\tilde{d}_2}[g_i(x, y)], \end{aligned}$$

где  $C_{\tilde{d}_2}[\cdot]$  – результат применения метода Канни с параметром размытия  $\tilde{d}_2$ .

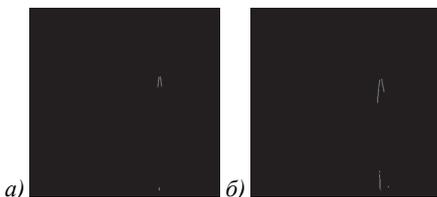


Рис. 4. Выделенные в ходе шага 1.2 границы: а) разности  $\bar{g}_i(x, y)$  ( $\bar{g}_i^C(x, y)$ ) и б) исходного изображения  $g_i(x, y)$  ( $g_i^C(x, y)$ )

Полученные изображения границ  $\bar{g}_i^C(x, y)$  и  $g_i^C(x, y)$  используются непосредственно для построения маски слоя

$$m_i^g(x, y) = M_1[M_1[\bar{g}_i, \bar{g}_i^C], g_i^C].$$

Здесь  $M_1[p, q]$  – оператор маскирования, который выделяет содержащие ненулевые данные области изображения  $p$ , прилегающие к границе, задаваемой бинарной маской  $q$ .

Таким образом, маска  $m_i^g(x, y)$  (см. рис. 5а) является результатом двукратного последовательного применения оператора маскирования  $M_1$  к построенной на предыдущем шаге разности  $\bar{g}_i(x, y)$ , при котором масками служат выделенные методом Канни границы  $\bar{g}_i^C(x, y)$  и  $g_i^C(x, y)$  соответственно.

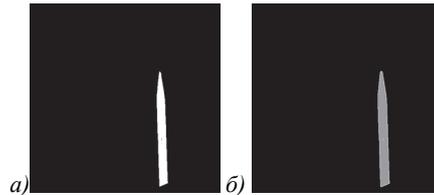


Рис. 5. Маска а)  $m_i^g(x, y)$  областей в фокусе для слоя  $g_2(x, y)$  и б) восстановленный слой  $\tilde{g}_2(x, y)$

**Шаг 1.3.** Результатом работы первого этапа является восстановленный слой

$$\tilde{g}_i(x, y) = M_2[g_i, m_i^g],$$

где  $M_2[p, q]$  – оператор маскирования, который выделяет области изображения  $p$  по бинарной маске  $q$  (см. рис. 5б).

Результаты работы *первого этапа* для всех трех слоев рассматриваемого объекта приведены на рис. 6. Видно, что неравномерная освещенность первого слоя привела к неполному восстановлению его затемненной части (см. рис. 6а). В случае второго (см. рис. 6б) и третьего (см. рис. 6в) слоев подобные проблемы с освещением отсутствуют, что приводит к их хорошему восстановлению уже на этом этапе.



Рис. 6. Результаты работы первого этапа: а)  $\tilde{g}_1(x, y)$ , б)  $\tilde{g}_2(x, y)$ , в)  $\tilde{g}_3(x, y)$

### 2.3.2. Второй этап

На устранение артефактов («выбитых» областей), которые могут присутствовать на изображениях после *первого этапа* и которые могут быть вызваны большим масштабом объекта в поперечном сечении, недостаточно точным подбором фактических параметров оптической системы или, как в примере на рис. 6а, неравномерной освещенностью слоя, направлен *второй этап*.

**Шаг 2.1.** Для выделения «выбитых» областей рассматриваются  $f_i(x, y)$ , полученные из  $\tilde{g}_i(x, y)$

размытием по модели (3) с общим для всех слоев параметром  $\tilde{d}_3$ :

$$\hat{f}_i(x, y) = \tilde{g}_i * h(\tilde{d}_3),$$

с априорным выбором параметра  $\tilde{d}_3$  так, чтобы на размытых изображениях «выбитые» области отсутствовали. По полученным  $f_i(x, y)$  строится граница (см. рис. 7)

$$b_i(x, y) = B \left[ M_3 \left[ \hat{f}_i \right] \right]$$

значимой части изображений. Здесь  $M_3$  – оператор маскирования, выделяющий значимые (ненулевые) элементы,  $B$  – оператор выделения границы, выделяющий те значимые элементы, в окрестность которых попадает элемент фона (нулевой элемент).

На рис. 7 серым представлены выделенные маски  $M_3[\hat{f}_i]$  размытых изображений  $\hat{f}_i(x, y)$  и белым их границы  $b_i(x, y)$

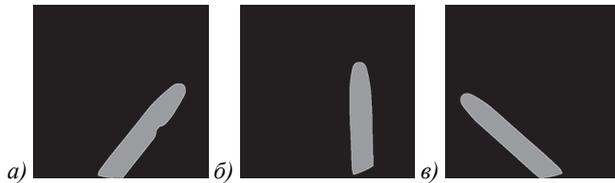


Рис. 7. Маски размытых слоев  $\hat{f}_i(x, y)$ . Белым отмечены границы масок  $b_i(x, y)$ . (а)  $b_1(x, y)$ , (б)  $b_2(x, y)$ , (в)  $b_3(x, y)$

Для дальнейшего выделения «выбитых» областей рассматривается восстановленный на первом этапе слой  $\tilde{g}_i(x, y)$ , объединенный с построенной границей  $b_i(x, y)$  (см. рис. 8).

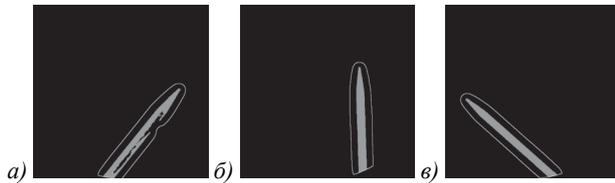


Рис. 8. Восстановленные на первом этапе слои  $\tilde{g}_i(x, y)$ , объединенные с построенной границей  $b_i(x, y)$ : (а)  $\tilde{g}_1(x, y) \cup b_1(x, y)$ , (б)  $\tilde{g}_2(x, y) \cup b_2(x, y)$ , (в)  $\tilde{g}_3(x, y) \cup b_3(x, y)$

На построенных объединениях  $\tilde{g}_i(x, y) \cup b_i(x, y)$  нулевые значения отвечают фону и «выбитым» областям, содержательные (ненулевые) значения – данным слоя и максимальное значение – маске.

**Шаг 2.2.** Маска  $m_i^f$  (см. рис. 9) данных, которые надо восстановить, чтобы устранить компенсируемые на данном этапе артефакты («выбитые» области), задается формулой

$$m_i^f(x, y) = M_4 [b_i \cup \tilde{g}_i, b_i].$$

Здесь  $M_4[p, q]$  – оператор маскирования, который устанавливает на изображении  $p$  элементы всех областей, соприкасающихся с бинарной границей  $q$ , равными максимальному значению.

Таким образом, данный шаг позволяет получить на представленных масках  $m_i^f(x, y)$  найденные ранее

значимые данные слоя (выделены серым), фон (выделен белым) и «выбитые» области (выделено черным).

**Шаг 2.3.** Для окончательного восстановления «выбитых» областей рассматривается изображение

$$\tilde{f}_i(x, y) = M_2 \left[ g_i, \bar{M}_3 \left[ m_i^f \right] \right],$$

полученное применением оператора маскирования  $M_2$  к изображению исходного стека  $g_i(x, y)$ , где в качестве маски берется результат применения инвертированного (выделяются нулевые, а не значимые элементы) оператора  $\bar{M}_3$  к построенной на предыдущем этапе границе  $m_i^f$ .

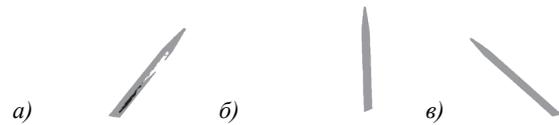


Рис. 9. Маски  $m_i^f(x, y)$  с выделенными черным «выбитыми» областями: а)  $m_1^f(x, y)$ , б)  $m_2^f(x, y)$ , в)  $m_3^f(x, y)$

Объединение  $f_i(x, y)$  результатов, полученных на первом  $\tilde{g}_i(x, y)$  и втором  $\tilde{f}_i(x, y)$  этапах соответственно

$$f_i(x, y) = \tilde{g}_i(x, y) \cup \tilde{f}_i(x, y),$$

дает результат работы метода (см. рис. 10).



Рис. 10. Результат второго этапа: (а)  $\tilde{f}_1(x, y)$ , (б)  $\tilde{f}_2(x, y)$ , (в)  $\tilde{f}_3(x, y)$

### 2.3.3. Дополнительное применение метода

В случае, когда необходимо дополнительное восстановление мелкомасштабных деталей, метод может повторно применяться к разности  $\dot{g}_i(x, y)$  (см. рис. 11) изображений входного стека  $g_i(x, y)$  и результата моделирования прямой задачи (с параметрами  $d_{mm}$  из п.2.1) с восстановленными в ходе работы метода слоями

$$\dot{g}_i(x, y) = g_i(x, y) - \sum_{k=i-m}^{i+m} f_k * h_{k-i},$$



Рис. 11. Стек входных изображений  $\dot{g}_i(x, y)$  для повторного применения метода: (а)  $\dot{g}_1(x, y)$ , (б)  $\dot{g}_2(x, y)$ , (в)  $\dot{g}_3(x, y)$

а результат повторного применения затем добавляется к  $f_i(x, y)$ . На рис. 12 представлен результат двукратного применения метода к рассматриваемым изображениям.

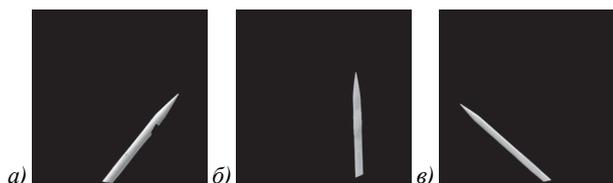


Рис. 12. Результат секционирования

### 3. Примеры секционирования многослойных объектов

Для тестирования метода использовались две изображающие системы, нацеленные на различные разрешения и размеры трехслойного объекта.

В системе 1 геометрические параметры модельного объекта, состоящего из трех скрещивающихся закрепленных непрозрачных или полупрозрачных шпатель, определялись их длиной 22 мм, диаметром 2 мм, расстоянием между плоскостями слоев 40 мм и расстоянием от передней плоскости до плоскости объектива 350 мм. Съемка проводилась на фотоаппарат Canon EOS 5D Mark III с объективом Canon EF 100mm f/2.8L Macro IS USM, установленный на штативе. Модельный объект помещался на черную матовую подложку в фотобокс Godox LST60, внутренняя поверхность которого была покрыта серебристым светоотражающим материалом. Для равномерного освещения и отсутствия жестких теней использовались два блока LED-подсветки, которые были закреплены под верхними ребрами на левой и правой боковых гранях бокса. Источники света на блоках LED-подсветки были направлены по внутренней нормали фотобокса. Под блоками подсветки под углом закреплялось светорассеивающее белое полотно, смещенное по высоте от блоков относительно задней и передней стенок на 50 мм и 150 мм соответственно. Параметры фотосъемки: выдержка 1/100 с, диафрагма: f/2.8, ISO 400. Спуск затвора проводился с помощью ПО Canon EOS Utility.

Заметим, что формально рассеяние света на непрозрачных объектах не описывается моделью (1), (2). Однако в случае, когда каждый слой объекта состоит из тонких поперечных структур, в эксперименте удастся эффективно наблюдать даже те части объекта, которые скрыты за геометрической областью тени слоев, лежащих между плоскостью наблюдения и плоскостью фокусировки, и основанный на использовании модели (1), (2) метод граничного разделения дает адекватные результаты.

В системе 2 использовалась модель сетчатки глаза человека в виде тонких линий (штрихов). Для исследования секционирования таких объектов была собрана лабораторная установка (рис. 13), позволяющая контролировать различные aberrации в изображающем тракте. В системе использованы два источника света: когерентный 1 – для контроля волнового фронта и некогерентный 8 – для формирования изображения модели сетчатки. Лазерное излучение в систему

попадает по одномодовому оптическому волокну (элемент 2 на рис. 13), сопряженному с полупроводниковым лазером с длиной волны 520 нм. Это позволяет организовать совместное прохождение лазерного (на схеме обозначен красным цветом) и некогерентного (обозначен синим) излучения через оптические элементы системы, что дает возможность контролировать остаточные aberrации оптической системы, компенсируемые деформируемым зеркалом 5. Фактически вне контура управления оказывается только высококачественный объектив 11.

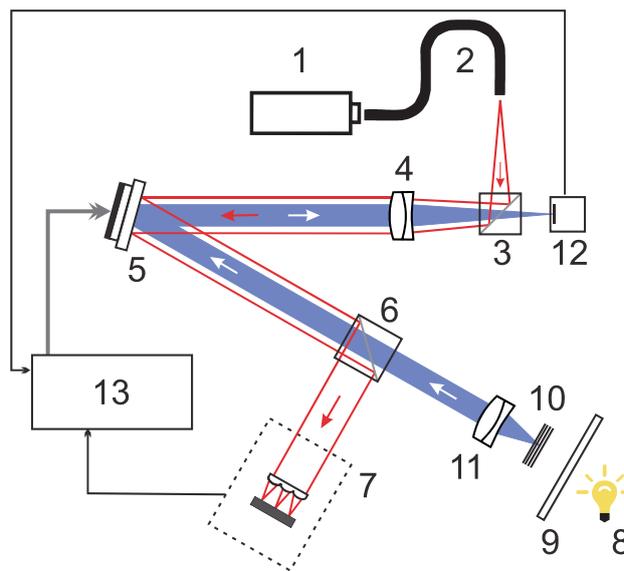


Рис. 13. Схема экспериментальной установки

После выхода из волокна 2 пучок попадает на делительный кубик 3 и объектив 4, который формирует из расходящегося пучка света параллельный. После этого излучение отражается от деформируемого зеркала 5 и направляется с помощью делительного кубика 6 в датчик волнового фронта Шака–Гартмана 7 модели ShaH-3060 [25]. Данные с датчика попадают в компьютер 13, с которого осуществляется управление формой отражающей поверхности деформируемого зеркала. Таким образом, управление зеркалом 5 позволяет, с одной стороны, компенсировать остаточные aberrации оптической системы, а с другой, вносить заданные фазовые искажения для моделирования оптических искажений и организовать перестройку фокусировки. Конструкция деформируемого зеркала и общие принципы функционирования адаптивной системы описаны в [1].

Некогерентный источник света, выполненный на светодиоде CREE XM-L 8, освещал полупрозрачную трехслойную модель 10. В этот участок оптического пути был добавлен светофильтр KC-15 9, что позволяло сузить спектральный диапазон излучения, формирующего изображение модели, до 650–750 нм.

Модель многослойного объекта была построена на основе измерительных сеток для микроскопа с толщиной штриха 10 мкм, расстоянием между малы-

ми штрихами 100 мкм, шаг квадратной сетки составлял 1 мм. Толщина стекол составляла 1 мм. С помощью двух объективов 11 ( $F=75$  мм) и 4 ( $F=130$  мм) на КМОП-матрице видеокамеры 12 формировалась плоскость, оптически сопряжённая с одним из слоёв модели сетчатки. Между объективами лучи отражались от того же деформируемого зеркала 5, а значит, приобретали фазовые искажения, контролируемые экспериментатором. Апертурная диафрагма диаметром 22 мм была установлена непосредственно перед зеркалом 5.

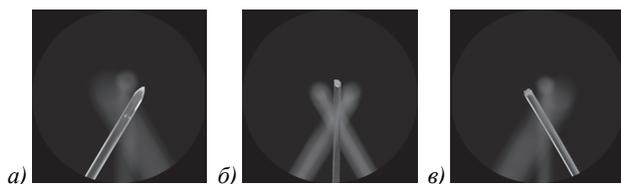


Рис. 14. Изображения полупрозрачных шпажек в системе 1: (а) 1-й слой, (б) 2-й слой, (в) 3-й слой

### 3.1. Непрозрачный объект

Работа метода граничного разделения в системе 1 на непрозрачных шпажках с равными расстояниями между соседними слоями подробно описана в параграфе 2. Изображения слоев системой 1 представлены на рис. 2. Результат секционирования приведен на рис. 12. Заметим, что на рис. 12а видно, что то место, где искомый слой сливается с размытым соседним по глубине слоем, не смогло полностью восстановиться. Для остальных слоев такой особенности нет, поэтому они достаточно хорошо восстановились.

### 3.2. Полупрозрачный объект

Рассмотрим объект, состоящий из скрещивающихся полупрозрачных шпажек. Изображение слоев объекта в системе 1 приведено на рис. 14. Секционированные методом граничного разделения слои приведены на рис. 15.

Так как объекты освещались сверху, у второй вертикальной шпажки не выделены границы, как у остальных, и в месте пересечения они не видны. Поэтому второй слой не смог так же хорошо секционироваться, как первый и третий.



Рис. 15. Результат метода: (а) 1-й слой, (б) 2-й слой, (в) 3-й слой

### 3.3. Измерительные сетки микроскопа

Теперь рассмотрим объект на основе измерительных сеток микроскопа. Изображения слоев, полученных с помощью системы 2 и загрязненных частичками пыли (шумом), приведены на рис. 16.

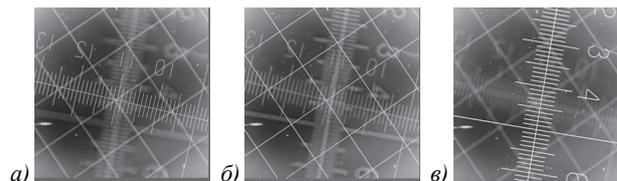


Рис. 16. Изображения измерительных сеток по слоям

Результат применения метода приведен на рис. 17. Видно, что метод хорошо восстановил многослойный объект с тонкими изображениями на слоях. Также видно, что метод внес в результат особо крупные пылинки, так как они были сфокусированы на конкретном слое и размыты на другом. Подобные артефакты могут устраняться на этапе постобработки.

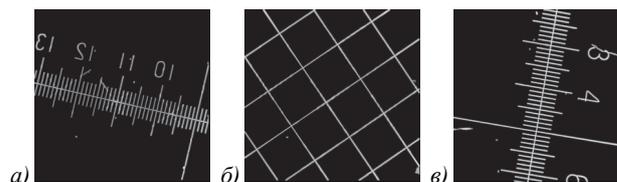


Рис. 17. Результат секционирования измерительных сеток

## 4. О выборе параметров метода для различных типов объектов

В зависимости от характерных параметров входных данных, таких как толщина объекта, близость отдельных значимых областей на слоях друг к другу и характерный масштаб значимых областей на изображениях в поперечном сечении, осуществляется подбор параметров метода граничного разделения.

Выбор параметра  $\tilde{d}_1$  влияет на выделяемую на шаге 1.1 первого этапа разность  $\bar{g}_i(x,y)$ . При его излишне большом значении возможно добавление к разности частей размытых соседних слоев, что некорректно скажется на построении границ и выделении значимой части слоя. С другой стороны, сильное его уменьшение может привести к появлению артефактов внутри значимой части восстанавливаемых слоев (см., например, рис. 6а), что потребует повторного применения метода для компенсации мелкомасштабных данных, не восстановленных в ходе первичной работы метода.

В связи с этим для сокращения количества повторных применений метода в случае крупномасштабных в поперечном сечении данных следует выбирать большее значение параметра  $\tilde{d}_1$  (например, для изображений на рис. 14  $\tilde{d}_1=0,3$ ), в случае же мелкомасштабных данных – меньшее (например, для изображений на рис. 16  $\tilde{d}_1=0,05$ ).

Параметр  $s$ , отвечающий за то, сколько раз оператор постобработки  $P$  будет применяться на шаге 1.1 первого этапа для «сглаживания» излишнего локального контраста на входных данных, определяется спецификой конкретных данных и, как правило, берется в диапазоне от 0 (для достаточно «сглаженных» входных данных) до 6.

Значение параметра  $\tilde{d}_2$  влияет напрямую на работу метода Канни (см. п. 2.2) и меняется обратно пропорционально верхней границе  $C_h$ . Большим значениям параметра  $\tilde{d}_2$  отвечает меньшее  $C_h$ , что приводит к выделению большего числа границ. И наоборот: меньшему  $\tilde{d}_2$  отвечает большее  $C_h$ , и соответственно, значительно меньшее число выделенных границ.

Помимо параметра  $\tilde{d}_2$ , в работе метода Канни (см. п. 2.2) используется параметр среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  для сглаженных гауссианом градиентов. В случае мелкомасштабных данных большое значение  $\sigma$  может ухудшить выделение границ. Исходя из изложенных выше соображений, для получения результатов, представленных на рис. 15, использовались  $\tilde{d}_2=0,05$  и  $\sigma=2$ , а для результатов, представленных на рис. 17,  $\tilde{d}_2=0,06$  и  $\sigma=1$  соответственно.

Используемый на втором этапе параметр  $\tilde{d}_3$  отвечает за степень размытия значимой части восстановленного слоя  $g_i(x,y)$ , которая, с одной стороны, должна быть достаточно велика и должна дать возможность целиком покрыть восстанавливаемые артефакты, а с другой стороны, не должна повредить общую структуру изображения для мелкомасштабных данных. Изложенные выше соображения приводят, например, в случае изображенных близко друг к другу на рис. 16 делений линеек к выбору параметра  $\tilde{d}_3$  равным 0, тогда как для изображений на рис. 15  $\tilde{d}_3$  взят равным 0,3.

### 5. Сравнение с другими методами секционирования

Результаты метода граничного разделения сравнивались с результатами наиболее известных методов оптического секционирования (метод ближайшего соседа, метод Шанца, метод Агарда, метод слепой деконволюции Люси–Ричардсона) на примере секционирования скрещивающихся шпатель.

Классический метод ближайшего соседа, описанный в [2], гл. 14, учитывает вклад в изображение только двух соседних слоев, а также предполагает, что функция рассеяния точки  $h$  известна:

$$f_j = c_2 \left( g_j - c_1 (h_{-1} * g_{j-1} + h_1 * g_{j+1}) \right).$$

Функция рассеяния точки берется по модели (3), константы  $c_2=1$ ,  $c_1=0,5$ . Результат применения метода ближайшего соседа к изображениям  $g_i(x,y)$  (см. рис. 2) приведен на рис. 18.

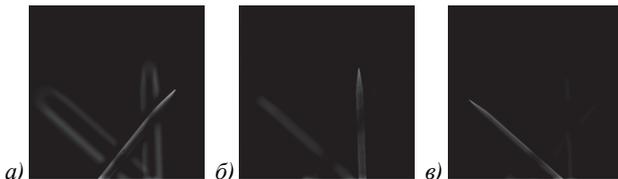


Рис. 18. Результат метода ближайшего соседа

Из-за того, что функция рассеяния точки не известна точно, метод не смог восстановить искомые

слои полностью, оставив размытые края соседних слоев, что особенно хорошо видно из результата восстановления первого и третьего слоев. В методе граничного разделения природа функции рассеяния точки известна, а параметр размытия между слоями определяется на первом этапе. Также метод рассматривает вклад соседних слоев в ходе нескольких (двух) своих проходов, а в качестве соседних слоев на втором проходе использует не исходные изображения, а результат восстановления, полученный на первом проходе.

В методе Шанца ([4]) использовалось максимальное значение размытого вклада от соседних плоскостей вместо линейной комбинации метода ближайшего соседа:

$$f_j = c_2 \left( g_j - c_1 \max(h_{-1} * g_{j-1}, h_1 * g_{j+1}) \right).$$

Результат его применения с теми же, что и в методе ближайшего соседа, параметрами, дает схожую картину (см. рис. 19).



Рис. 19. Результат метода Шанца

В статье [6] описывался итерационный метод Агарда, который рассматривал соседние изображения на расстоянии  $m$  слоев:

$$f_j^{n+1} = g_j - \sum_{\substack{k=j-m \\ k \neq j}}^{j+m} f_k^n * h_{k-j}.$$



Рис. 20. Результат метода Агарда

Наилучшего результата метод Агарда добивается на 9-й итерации (см. рис. 20). Видно, что метод не дает удовлетворительного результата.

Метод слепой деконволюции Люси–Ричардсона (СДЛР) ([26]) используется в случае неизвестного ядра размытия для решения уравнения свертки

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

и описывается одновременными итерациями восстанавливаемого изображения и ядра:

$$h^{k+1}(x,y) = h^k(x,y) \left[ f^k(-x,-y) * \frac{g(x,y)}{h^k(x,y) * f^k(x,y)} \right],$$

$$f^{k+1}(x, y) = f^k(x, y) \left[ h^{k+1}(-x, -y) * \frac{g(x, y)}{h^{k+1}(x, y) * f^k(x, y)} \right].$$

В задаче оптического секционирования трехмерного объекта  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $h(x, y)$  суть векторы матриц слоев, связанные системой уравнений свертки

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_j(x, y) * h_{j-i}(x, y) = g_i(x, y). \quad (4)$$

Для применения метода СДЛР в рассматриваемом векторном случае под сверткой векторов понимается сумма в правой части (4).

Метод СДЛР тестировался как в виде основного алгоритма, так и в сочетании с методом «Граничного разделения» в режимах предобработки или постобработки. Опишем полученные результаты на примере полупрозрачных объектов (для непрозрачных объектов результаты аналогичны).

В режиме основного алгоритма СДЛР применялся к исходным изображениям на рис. 14 в качестве начального приближения  $f^0$ , а  $h^0$  бралась согласно модели (3). Приведенные на рис. 21 наилучшие результаты показывают, что СДЛР с такими начальными данными собирает размытые слои, повышая интенсивность внутри.

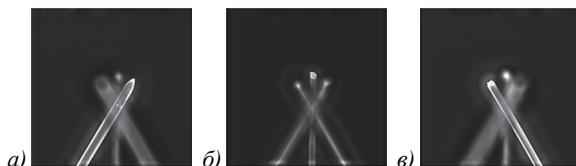


Рис. 21. Результат метода СДЛР

Если же применить метод граничного разделения к результату на рис. 21, то получим результат на рис. 22. Видно, что использование СДЛР как предобработки к методу граничного разделения не дает улучшения по сравнению с рис. 15.

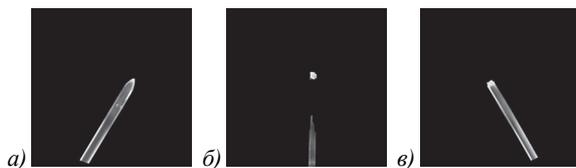


Рис. 22. Граничное разделение после СДЛР

Если в режиме постобработки применять СДЛР к изображениям на рис. 14, где в качестве начального приближения  $f^0$  взят результат метода граничного разделения (рис. 15), то СДЛР также не дает улучшения.

Таким образом, применение метода СДЛР в различных режимах не позволило улучшить результаты метода граничного разделения.

### Заключение

Рассмотрена задача секционирования изображений многослойного объекта из наблюдаемых изобра-

жений, сфокусированных на разные слои, с неизвестными параметрами функции рассеяния точки для каждой пары изображений. Для её решения предложен метод граничного разделения, сочетающий использование физической модели рассеяния света на основе приближения Френеля с современными методами оценки степени размытия и выделения границ на изображениях.

Сравнение метода граничного разделения с наиболее известными методами решения задачи оптического секционирования показало недостаточную эффективность последних и их невозможность дать улучшение качества восстановленных слоев по сравнению с предложенным методом.

Произведенное тестирование метода на реальных объектах выявило особенности его применения. Метод наиболее хорошо показал себя на многослойных объектах с четко выделенными границами изображений на каждом слое, давая более полное восстановление искомым слоев. Метод менее эффективен в случае присутствия малоконтрастных участков на слоях, изображения которых неразличимы с дефокусированными изображениями соседних по глубине слоев, что обычно свидетельствует о недостаточном разрешении по глубине используемой в эксперименте оптики.

### Благодарности

Работа Бажитова С.Д., Разгулина А.В. и Романенко Т.Е. выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284), работа Ларичева А.В. выполнена в рамках госзадания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника».

### References

- [1] Larichev AV, Ivanov PV, Iroshnikov NG, Shmalhauzen VI, Otten LJ. Adaptive system for eye-fundus imaging. *Quantum Electronics* 2002; 32(10): 902-908. DOI: 10.1070/QE2002v032n10ABEH002314.
- [2] Wu Q, Merchant FA, Castleman KR. *Microscope image processing*. Burlington; MA: Elsevier Academic Press; 2008.
- [3] Razzulin AV, Iroshnikov NG, Larichev AV, et al. Fourier domain iterative approach to optical sectioning of 3D translucent objects for ophthalmology purposes. *Int Arch Photogramm Remote Sens Spatial Inf Sci* 2017; 42(2-W4): 173-177. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLII-2-W4-173-2017.
- [4] Shantz MJ. A minicomputer-based image analysis system. In Book: Brown PB, ed. *Computer technology in neuroscience*. New York: Halsted; 1976: 113-130.
- [5] Agard DA, Sedat JW. Three-dimensional architecture of a polytene nucleus. *Nature* 1983; 302(5910): 676-681.
- [6] Agard DA, Hiraoka Y, Sedat JW. Three-dimensional microscopy: Image processing for high resolution subcellular imaging. *Proc SPIE* 1989; 1161: 24-30. DOI: 10.1117/12.962684.
- [7] Romanenko TE, Razzulin AV. A three-dimensional deconvolution algorithm using graphic processors. *Comput Math Model* 2019; 30: 80-90. DOI: 10.1007/s10598-019-09436-z.

- [8] Oliveira JP, Figueiredo MAT, Bioucas-Dias JM. Parametric blur estimation for blind restoration of natural images: linear motion and out-of-focus. *IEEE Trans Image Process* 2014; 23(1): 466-477. DOI: 10.1109/TIP.2013.2286328.
- [9] Liang M. Parameter estimation for defocus blurred image based on polar transformation. *Rev Téc Ing Univ Zulia* 2016; 39(1): 333-338. DOI: 10.21311/001.39.1.37.
- [10] Koltsov PP. Image blur estimation. *Computer Optics* 2011; 35(1): 95-102.
- [11] Lin HY, Chou XH. Defocus blur parameters identification by histogram matching. *J Opt Soc Am A* 2012; 29(8): 1694-1706. DOI: 10.1364/JOSAA.29.001694.
- [12] Sizikov VS, Stepanov AV, Mezhenin AV, Burlov DI, Eksemplarov RA. Determining image-distortion parameters by spectral means when processing pictures of the earth's surface obtained from satellites and aircraft. *J Opt Technol* 2018; 85(4): 203-210. DOI: 10.1364/JOT.85.000203.
- [13] Sizikov VS, Sergienko AA, Kondulukova DA. Spectral method for stable estimating the distortion parameters in inverse problem of image restoration. *Journal of Instrument Engineering* 2019; 62(4): 379-386. DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-4-379-386.
- [14] Sizikov V, Dovgan A, Lavrov A. Eliminating nonuniform smearing and suppressing the Gibbs effect on reconstructed images. *Computers* 2020; 9(2): 30. DOI: 10.3390/computers9020030.
- [15] Chochia P. Analysis of the image spectrum for distortion diagnostics. *J Phys Conf Ser* 2019; 1368(3): 032011. DOI: 10.1088/1742-6596/1368/3/032011.
- [16] Zhuo S, Sim T. Defocus map estimation from a single image. *Pattern Recogn* 2011; 44: 1852-1858. DOI: 10.1016/j.patcog.2011.03.009.
- [17] Liu YQ, Du X, Shen HL, Chen SJ. Estimating generalized Gaussian blur kernels for out-of-focus image deblurring. *IEEE Trans Circuits Syst Video Technol* 2021; 31(3): 829-843. DOI: 10.1109/TCSVT.2020.2990623.
- [18] Zhou X, Molina R, Ma Y, Wang T, Ni D. Parameter-free Gaussian PSF model for extended depth of field in bright-field microscopy. *IEEE Trans Image Process* 2020; 29: 3227-3238. DOI: 10.1109/TIP.2019.2957941.
- [19] Tang C, Hou C, Song Z. Defocus map estimation from a single image via spectrum contrast. *Opt Lett* 2013; 38(10): 1706-1708. DOI: 10.1364/OL.38.001706.
- [20] Asatryan DG. Image blur estimation using gradient field analysis. *Computer Optics* 2017; 41(6): 957-962. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-6-957-962.
- [21] Budzinskiy S. Elliptic averaging of optical transfer functions for estimating astigmatism and defocus. *Opt Commun* 2020; 461: 125213. DOI: 10.1016/j.optcom.2019.125213.
- [22] Bazhitov SD. On the restoration of the blur parameter in the problem of optical sectioning [In Russian]. *Modern Information Technologies and IT Education* 2022; 18(1): 20-27. DOI: 10.25559/SITITO.18.202201.20-27.
- [23] Canny J. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 1986; PAMI-8(6): 679-698. DOI: 10.1109/TPAMI.1986.4767851.
- [24] Ilyasova NYu, Demin NS, Shirokanev AS, Kupriyanov AV, Zamytskiy EA. Method for selection macular edema region using optical coherence tomography data. *Computer Optics* 2020; 44(2): 250-258. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-691.
- [25] ShaH wavefront sensors. 2023. Source: <<http://www.visionica.biz/shah-eng.htm>>.
- [26] Fish DA, Brinicombe AM, Pike ER, Walker JG. Blind deconvolution by means of the Richardson-Lucy algorithm. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(1): 58-65. DOI: 10.1364/JOSAA.12.000058.

### Сведения об авторах

**Бажитов Сергей Денисович**, 1997 года рождения, в 2022 году окончил магистратуру Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова на факультете вычислительной математики и кибернетики, аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов: методы деконволюции, обработка изображений, программирование. E-mail: [cbajitov@gmail.com](mailto:cbajitov@gmail.com).

**Ларичев Андрей Викторович**, 1965 года рождения, в 1989 году окончил Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по специальности «Физика», кандидат физико-математических наук с 1995 года, работает доцентом в МГУ имени М.В. Ломоносова. Область научных интересов: адаптивная оптика, физиологическая оптика, нелинейная оптика, оптическая обработка информации, нелинейная динамика, цифровая обработка изображений. E-mail: [larchev@optics.ru](mailto:larchev@optics.ru).

**Разгулин Александр Витальевич**, 1963 года рождения, в 1985 году окончил Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по специальности «Прикладная математика», кандидат физико-математических наук с 1988 года, доктор физико-математических наук с 2007 г., работает профессором на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, с 2019 г. заведует кафедрой математической физики. Область научных интересов: функционально-дифференциальные уравнения, оптимальное управление и аппроксимация задач адаптивной и нелинейной оптики, математическое моделирование. E-mail: [razgulin@cs.msu.ru](mailto:razgulin@cs.msu.ru).

**Романенко Татьяна Евгеньевна**, 1988 года рождения, в 2010 году окончила Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по специальности «Прикладная математика и информатика», кандидат физико-математических наук с 2015 года, работает доцентом в МГУ имени М.В. Ломоносова. Область научных интересов: параболические функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием, компенсация искажений в нелинейных оптических системах, обработка графических изображений, программирование. E-mail: [romanenko@cs.msu.ru](mailto:romanenko@cs.msu.ru).

ГРНТИ: 29.31.29, 29.31.47, 27.41.19, 27.41.23

Поступила в редакцию 22 декабря 2022 г. Окончательный вариант – 15 марта 2023 г.

---

# Method of multilayer object sectioning based on a light scattering model

*S.D. Bazhitov<sup>1</sup>, A.V. Larichev<sup>2,3</sup>, A.V. Razgulin<sup>1</sup>, T.E. Romanenko<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 119991, Moscow, Russia, Leninskie Gory 1/52;*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, the Faculty of Physics, 119991, Moscow, Russia, Leninskie Gory 1/2;*

<sup>3</sup> *IPLIT RAS - Branch of the Federal Research Center "Crystallography and Photonics" RAS, 140700, Moscow region, Shatura, Svyatoozerskaya 1*

## *Abstract*

We discuss a problem of reconstructing (sectioning) multilayer object images in observed images obtained by focusing the imaging system on each layer and containing spurious blurry images of neighboring layers. The blurring model used describes a physical process of incoherent light scattering in the Fresnel approximation with a priori unknown parameters of the point spread function. We propose a method of "Boundary separation" of sectioning, which combines the use of a physical blur model with modern methods of blur estimating and edge detection. The results of testing the "Boundary separation" method on the data of physical experiments with different-scale model multilayer objects are analyzed and compared with the existing methods for solving the optical sectioning problem. It is concluded that the method is most effective on multilayer objects with clearly defined boundaries, on which the method has demonstrated almost complete restoration of the desired layers.

*Keywords:* sectioning, deconvolution, imaging system, convolution, blur.

*Citation:* Bazhitov SD, Larichev AV, Razgulin AV, Romanenko TE. Method of multilayer object sectioning based on a light scattering model. *Computer Optics* 2023; 47(5): 751-760. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1266.

*Acknowledgements:* The research input of Bazhitov S.D., Razgulin A.V. and Romanenko T.E. was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement 075-15-2022-284).

---

## *Authors' information*

**Sergey Denisovich Bazhitov** (b. 1997) graduated from the magistracy of Lomonosov Moscow State University at the Computational Mathematics and Cybernetics faculty in 2022, postgraduate student of Mathematical Physics. Research interests: deconvolution methods, image processing, programming. E-mail: [cbajitov@gmail.com](mailto:cbajitov@gmail.com).

**Andrey Victorovich Larichev** (b. 1965) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1989, majoring in Physics, got Ph.D. in Physics and Mathematics in 1995. Currently he works as the associate professor at Lomonosov Moscow State University. Research interests are adaptive optics, physiological optics, nonlinear optics, optical information processing, nonlinear dynamics and digital image processing. E-mail: [larichev@optics.ru](mailto:larichev@optics.ru).

**Alexander Vitalievich Razgulin** (b. 1963) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1985, majoring in Applied Mathematics, got Ph.D. in Physics and Mathematics in 1988, Doctor in Physics and Mathematics in 2007. Currently he works as the professor at Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, chairman of Mathematical Physics. Research interests are functional-differential equations, optimal control and approximation to the problems of adaptive and nonlinear optics, physiological optics, mathematical modeling. E-mail: [razgulin@cs.msu.ru](mailto:razgulin@cs.msu.ru).

**Tatiana Evgenievna Romanenko** (b. 1988) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2010, majoring in Applied Mathematics and Informatics, got Ph.D. in Physics and Mathematics in 2015. Currently she works as the associate professor at Lomonosov Moscow State University. Research interests are parabolic functional differential equations with time delay, distortion compensation in nonlinear optical systems, computer graphics processing, programming. E-mail: [romanenko@cs.msu.ru](mailto:romanenko@cs.msu.ru).

---

*Received December 22, 2022. The final version – March 15, 2023.*

---