

## Динамика двухкубитной модели Тависа–Каммингса при наличии взаимодействия кубитов изинговского типа

Е.К. Башкиров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Рассмотрена динамика перепутывания системы двух сверхпроводящих кубитов, нерезонансно взаимодействующих с тепловым полем копланарного резонатора без потерь, с учетом прямого взаимодействия кубитов изинговского типа. Найдено точное выражение для зависящего от времени статистического оператора полной системы. С его помощью была вычислена редуцированная матрица плотности кубитов и рассчитан количественный критерий перепутывания двухкубитной системы – параметр Переса–Хородецких. Показано, что для резонансной модели и сепарабельного начального состояния кубитов, в котором один из них возбужден, а второй находится в основном состоянии, включение прямого взаимодействия кубитов ведет к возрастанию степени их перепутывания. Выявлено также, что для рассматриваемой модели влияние расстройки на перепутывание кубитов значительно эффективнее, нежели прямое взаимодействие. Для перепутанного начального белловского состояния кубитов наиболее интересным представляется вывод о том, что учет прямого взаимодействия приводит к исчезновению явления мгновенной смерти перепутывания в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля и, напротив, к возникновению указанного эффекта для нерезонансного взаимодействия.

**Ключевые слова:** кубиты, копланарный резонатор без потерь, расстройка, тепловое поле, отрицательность, мгновенная смерть перепутывания.

**Цитирование:** Башкиров, Е.К. Динамика двухкубитной модели Тависа–Каммингса при наличии взаимодействия кубитов изинговского типа / Е.К. Башкиров // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 4. – С. 475–482. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1372.

**Citation:** Bashkirov EK. Dynamics of a two-qubit Tavis-Cummings model in the presence of an Ising-type interaction between qubits. Computer Optics 2024; 48(4): 475-482. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1372.

### Введение

Изучение квантовых явлений в системах двухуровневых атомов, связанных с полями резонаторов, находится в центре внимания современной квантовой оптики и квантовой информатики с тех пор, как было найдено точное решение для наиболее фундаментальной квантовой модели, описывающей взаимодействия излучения с атомами вещества [1]. Впоследствии указанная модель получила название модели Джейнса–Каммингса. Интерес к изучению динамики двухуровневых систем был многократно усилен в связи с возможностью использования таких моделей для описания новых квантовых структур, которые можно использовать в качестве строительных блоков при создании квантовых компьютеров и квантовых сетей, т.е. кубитов и кудитов [2]. Такие новые квантовые структуры иногда называют искусственными атомами. В последнее время на практике удалось реализовать целый ряд искусственных атомов, таких как квантовые точки, примесные спины, джозефсоновские сверхпроводящие структуры и т.д. [3–6].

Работа современных устройств квантовой информатики основана на использовании перепутанных состояний кубитов. Для создания, контроля и управле-

ния перепутанными состояниями кубитов обычно используют электромагнитные поля резонаторов [2].

До последнего времени при теоретическом описании динамики кубитов в резонаторах в реальных экспериментах не было необходимости в учете прямого взаимодействия самих кубитов ввиду малости энергий таких взаимодействий в сравнении с энергией кубит-фотонного взаимодействия. При этом теоретические оценки показывали, что при достижении достаточной интенсивности такие взаимодействия могут принципиально изменить особенности динамики кубитов, взаимодействующих с полями резонаторов, в частности степень кубит-кубитного перепутывания. Однако в последнее время были разработаны квантовые системы кубитов, между которыми можно организовать сильное взаимодействие. Примером таких систем являются сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами. Встраивание сверхпроводящих кубитов в сверхпроводящие микроволновые резонаторы было огромным шагом к использованию этих систем в квантовых компьютерах и квантовых сетях. Успехи в теоретическом и экспериментальном изучении таких объектов привели к формированию новой области – квантовой электродинамики сверхпроводящих колец [2]. При этом в ряде эксперимен-

тальных работ было показано, что энергия прямого взаимодействия таких кубитов может не только превосходить энергию взаимодействия кубита с полем резонатора, но даже быть сравнимой с энергией основного перехода в самом кубите [7–9]. Для реализации режимов сильной связи кубитов в сверхпроводящие цепи могут быть дополнительно встроены и другие квантовые системы, такие как, например, твердотельные примеси [6]. Подобные схемы с сильной связью изучались также на примере ридберговских атомов в резонаторах [10]. Диполь-дипольное и изинговское взаимодействие между ридберговскими атомами, захваченными лазером, использовались для моделирования спиновых массивов [11]. Моделирование влияния спин-спинового взаимодействия на динамику кубитов проводилось также для оптических решеток [12] и ионов в ловушках [13].

Для организации сильной связи между сверхпроводящими кубитами используют так называемые пассивные элементы. Под пассивными элементами подразумеваются элементы цепи, для которых резонансная частота намного больше, чем частота перехода между первым и вторым уровнями энергии кубитов. В результате при взаимодействии с кубитами пассивные элементы всегда будут оставаться в своем основном состоянии. В экспериментах со сверхпроводящими кубитами в качестве пассивных элементов используют обычные емкости и индуктивности [14–16]. В зависимости от типа кубита (зарядовый, фазовый или потоковый), а также типов используемых пассивных элементов между соседними кубитами может быть реализовано прямое взаимодействие, аналогичное спиновому взаимодействию  $XX$ -,  $YY$ - или  $ZZ$ -типа. В первых двух случаях гамильтониан прямого взаимодействия кубитов обычно приводят к виду, аналогичному обычному диполь-дипольному взаимодействию атомов. Теоретический анализ влияния прямого диполь-дипольного взаимодействия на особенности перепутывания кубитов в резонаторах был проведен в ряде работ (см. ссылки в [17–20]). Влияние  $ZZ$ -связи на динамику кубитов, взаимодействующих с полем копланарного резонатора в фоковском и когерентном состоянии, рассмотрено в работе [21]. В настоящей статье мы рассмотрим влияние взаимодействия  $ZZ$ -типа на перепутывание кубитов (взаимодействие изинговского типа), индуцированного тепловым шумом резонатора, при наличии расстройки.

Для реализации квантовых протоколов физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций необходимо использовать максимально перепутанные состояния кубитов. Однако кубиты в устройствах квантовой информатики всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно носит случайный характер и приводит к деградации перепутанных состояний кубитов. Однако недавно было показано, что может иметь место и обратный эффект: возникновение перепутывания кубитов под действием

окружения [22]. В частности, в качестве такого окружения может выступать тепловой шум резонатора. Такая возможность впервые была продемонстрирована на примере модели двух двухуровневых атомов в тепловом резонаторе Питером Найтом с соавторами [23]. Роль нерезонансного взаимодействия кубитов и поля резонатора в таких процессах рассмотрена в работе [24]. Результаты указанной работы показали, что наличие нерезонансного взаимодействия кубитов и теплового поля резонатора может значительно усилить эффект перепутывания кубитов.

Современное состояние физики квантовых вычислений описывается термином «эра «шумных» квантовых компьютеров промежуточного масштаба» (noisy intermediate-scale quantum, NISQ). Данный этап характеризуется использованием квантовых процессоров с различными типами архитектуры, содержащими до 1000 кубитов. Такие процессоры весьма чувствительны к окружающей среде (шумам), для них характерно наличие квантовой декогеренции и неспособность к непрерывной квантовой коррекции ошибок. Простейшими элементами любого квантового компьютера, в том числе и квантового компьютера с архитектурой фон Неймана [25], являются однокубитные и двухкубитные квантовые вентили. Двухкубитный вентиль позволяет генерировать квантовое перепутывание двух соседних кубитов. Однако перепутанные состояния кубитов очень чувствительны к внешним возмущениям, которые приводят к декогеренции. Для решения данной проблемы используют разные подходы. Одним из способов является создание более быстрых квантовых вентилях. Так, в работе [26] авторам удалось создать так называемый  $CZ$ -вентиль (этот тип вентиля особенно легко деградирует под воздействием внешних шумов) из двух ридберговских атомов рубидия, охлажденных до 0,62 мК. С помощью оптического пинцета атомы удалось удерживать на фиксированном расстоянии 1,5 нм с точностью, ограниченной только квантовыми флуктуациями. За счет сильного диполь-дипольного взаимодействия удалось осуществить сверхбыстрый обмен энергией между кубитами за время порядка 6,5 нс, что на два порядка меньше времени декогеренции в такой системе, а так лишь на порядок больше времени срабатывания двухкубитных вентилях на примесных спинах и примерно в два раза больше аналогичного времени для вентиля на сверхпроводящих кубитах. Другими способами решения проблемы являются увеличение устойчивости вентилях к внешним шумам за счет использования более сложной архитектуры кубитов, а также использование новых типов кубитов. Так, например, в работе [27] для создания вентиля  $Z$ -типа вместо двух обычных сверхпроводящих транзмонов (сверхпроводящих джозефсоновских колец, шунтированных конденсатором) использованы два флюксониевых рабочих кубита (сверхпроводящих джозефсоновских колец, шунти-

рованных индуктивностью), которые обладают значительно большим временем когерентности. При этом для устранения перекрестного взаимодействия рабочих кубитов при однокубитных операциях в схему добавлен промежуточный третий кубит. Еще один способ решения заключается в использовании вместо сверхпроводящих кубитов с джозефсоновскими переходами кубитов другой физической природы с большими временами когерентности, например, ионов в магнитных ловушках или ядерных спинов. В случае использования сверхпроводящих кубитов прогресс также связан с использованием объектов с большим временем когерентности. Впервые контролируемое двухкубитное взаимодействие с точностью более 0,99 было продемонстрировано на транзмонных кубитах [28], при этом время когерентности такого вентиля составляло немного меньше 100 мкс. Переход к другим типам сверхпроводящих кубитов, например 3D-флюксонам, позволил увеличить время когерентности в несколько раз [29].

Еще одним препятствием на пути реализации эффективных, надежных и устойчивых систем квантовых вычислений является эффект мгновенной смерти перепутывания. Такой эффект впервые был теоретически предсказан Ю и Эберли [30] на примере моделей типа Джейнса–Каммингса, а затем обнаружен экспериментально [31]. Впоследствии эффект теоретически и экспериментально изучался для различных типов кубитов в большом количестве работ (см. ссылки в [32–35]). Это явление представляет собой исчезновение начального перепутывания кубитов на временах меньше времени декогеренции и связано со взаимодействием кубитов с полями резонаторов, которые используются для управления состояниями вентиля, а также окружением. Например, квантовый компьютер с архитектурой фон Неймана состоял из двух микроволновых резонаторов, которые выполняли роль квантовой памяти процессора, состоящего из двух кубитов, соединенных шиной (ее роль тоже играл резонатор) и устройств для стирания данных [25]. Таким образом, эффект мгновенной смерти перепутывания приводит к появлению ошибок в процессе обработки информации в двухкубитном венти́ле.

В этой связи особенно важно исследовать механизмы подавления явления мгновенной смерти перепутывания кубитов, взаимодействующих с тепловыми полями, в двухкубитных вентилях. Квантовые устройства, использующие кубиты различной физической природы в качестве логических элементов, функционируют в широком интервале температур от мК (сверхпроводящие кубиты) до комнатных температур (NV-центры). Это означает постоянное присутствие тепловых фотонов в резонаторах таких квантовых устройств. В связи с этим в ряде наших работ была рассмотрена возможность подавления мгновенной смерти перепутывания кубитов, вызванного тепловым шумом

резонатора, за счет учета диполь-дипольного взаимодействия кубитов (см. ссылки в [36]).

Представляет интерес расширение данных исследований на модель со взаимодействием изинговского типа. Соответственно, в работе проведен анализ влияния взаимодействия кубитов изинговского типа на перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, которое генерируется тепловым шумом резонатора, также возможности подавления эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов за счет прямого взаимодействия рассматриваемого типа. Рассмотрение проведено на примере обобщенной двухкубитной нерезонансной модели Тависа–Каммингса при наличии дополнительного пассивного элемента между кубитами, который обеспечивает взаимодействие между кубитами изинговского типа.

### 1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

В настоящей работе мы изучим динамику обобщенной модели Тависа–Каммингса, состоящей из цепи, включающей два идентичных сверхпроводящих кубита  $K_1, K_2$ , моду поля микроволнового резонатора и дополнительного пассивного элемента между кубитами – емкости (для реализации прямого взаимодействия кубитов ZZ- или изинговского типа). Пусть  $\hbar\Omega_0$  – энергия возбуждения кубита,  $\Omega$  – частота моды поля. Гамильтониан модели в системе отсчета, вращающейся с частотой моды поля резонатора  $\Omega$ , есть

$$H = (1/2)\hbar\Xi(r_{K_1}^z + r_{K_2}^z) + \hbar g \sum_{m=K_1}^{K_2} (r_m^+ \eta + \eta^+ r_m^-) + \hbar Z r_{K_1}^z r_{K_2}^z, \quad (1)$$

где  $r_m^z$  – оператор полуразности населенностей в  $l$ -м кубите ( $m=1,2$ ),  $r_i^+ = |f\rangle_i \langle l|$  и  $r_i^- = |l\rangle_i \langle f|$  – операторы переходов между уровнями в  $l$ -м кубите,  $|f\rangle_l$  и  $|l\rangle_l$  – возбужденное и основное состояния  $l$ -го кубита,  $\eta$  и  $\eta^+$  – операторы рождения и уничтожения фотонов,  $g$  – параметр связи фотонов и кубитов,  $Z$  – константа связи кубитов изинговского типа и  $\Xi$  – расстройка, равная  $\Xi = \Omega_0 - \Omega$ .

В дальнейшем при исследовании динамики кубитов мы не будем учитывать диссипацию энергии и фазы, учитывая малость времен операций со сверхпроводящими кольцами [2, 3].

Выберем в качестве начальных состояний кубитов наиболее интересные в смысле динамики перепутывания сепарабельное состояние вида

$$|\Phi(0)\rangle_{K_1 K_2} = |f, l\rangle \quad (2)$$

и перепутанное состояние Белловского типа вида

$$|\Phi(0)\rangle_{K_1 K_2} = \cos \varphi |f, l\rangle + \sin \varphi |l, f\rangle, \quad (3)$$

где  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Начальное состояние фотонов выберем тепловым

$$P_{EF}(0) = \sum_k h_k |k\rangle\langle k|, \quad (4)$$

$$h_k = \langle k \rangle^k (1 + \langle k \rangle)^k,$$

где  $\langle k \rangle$  – среднее число фотонов  $\langle k \rangle = (\exp[\hbar\Omega/\theta] - 1)^{-1}$   
 $\theta = k_{\text{Boltzman}} T$  и  $T$  – температура резонатора.

При исследовании динамики перепутывания кубитов будем опираться на точное решение модели, которое будет получено нами в представлении по собственным функциям гамильтониана (1). Предварительно найдем точное решение квантового уравнения Лиувилля в случае фоковского начального состояния поля. Полученные результаты нетрудно будет обобщить впоследствии на случай теплового состояния поля.

Начальная волновая функция поля для фоковского состояния есть  $|\Phi(0)\rangle_{EM} = |k\rangle$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

В этом случае унитарная эволюция системы происходит в подпространстве

$$|l, l, k + 1\rangle, |f, l, k\rangle, |l, f, k\rangle, |f, f, k - 1\rangle.$$

Соответственно, временная волновая функция модели в случае  $k \geq 1$  есть

$$|\Phi(t)\rangle_k = Q_{1k}(t)|l, l, k + 1\rangle + Q_{2k}(t)|f, l, k\rangle + Q_{3k}(t)|l, f, k\rangle + Q_{4k}(t)|f, f, k - 1\rangle. \quad (5)$$

Волновая функция (5) удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = H |\Phi(t)\rangle,$$

откуда для матрицы коэффициентов имеем

$$\dot{Q} = -(iH/\hbar)Q,$$

где

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{1k}(t) \\ Q_{2k}(t) \\ Q_{3k}(t) \\ Q_{4k}(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) есть

$$Q_{ik}(t) = \sum_{j=1}^4 Z_{ijk}(t) Q_{jk}(0), \quad (7)$$

где

$$Z_{ijk}(t) = \sum_{p=1}^4 \pi_{ik}^p (\pi_{jk}^p)^* e^{-i\lambda_{pk} g t}.$$

Здесь  $\lambda_{pk} = E_{pk}/(\hbar g)$  – безразмерные собственные значения гамильтониана (1), равные

$$\lambda_{1k} = -J,$$

$$\lambda_{pk} = J/3 + \gamma_{ik} \quad (p = 2, 3, 4),$$

$$\gamma_{2k} = \frac{-6\beta_k + 2J^2 + 2^{1/3} A_k^{2/3}}{3 \cdot 2^{2/3} A_k^{1/3}},$$

$$\gamma_{3k} = \frac{6(1+i\sqrt{3})\beta_k + i(2(i-\sqrt{3})J^2 + 2^{1/3}(i+\sqrt{3})A_k^{2/3})}{6 \cdot 2^{2/3} A_k^{1/3}},$$

$$\gamma_{4k} = \frac{6(1-i\sqrt{3})\beta_k + i(2(i+\sqrt{3})J^2 - 2^{1/3}(1+i\sqrt{3})A_k^{2/3})}{6 \cdot 2^{2/3} A_k^{1/3}},$$

$$A_k = -27\alpha_k - 9\beta_k J + 2J^3 +$$

$$+ 3\sqrt{3}\sqrt{27\alpha_k + \beta_k^2(4\beta_k - J^2) - 2\alpha_k J(-9\beta_k + 2J^2)},$$

$$\alpha_k = 6J + J^3 + 4Jk + 2\delta - J\delta^2,$$

$$\beta_k = -6 - J^3 - 4k - \delta^2, \quad J = I/g, \quad \delta = \Xi/g.$$

В настоящей статье явные выражения для коэффициентов  $\pi_{ik}^p$  не приводятся ввиду их чрезмерно громоздкого вида. Для начального состояния кубитов (2) и вакуумного состояния поля резонатора ( $k=0$ ) вектор состояния может быть записан в виде

$$|\Phi_{1,vac}(t)\rangle = Q_{11}(t)|l, l, 1\rangle + Q_{21}(t)|f, l, 0\rangle + Q_{31}(t)|l, f, 0\rangle. \quad (8)$$

Здесь

$$Q_{11} = -\frac{2ie^{i\delta t/2} \sin(\varpi t/2)}{\varpi},$$

$$Q_{21} = \frac{e^{i\delta t/2} (i \sin(\varpi t/2)(2J - \delta) / \varpi + \cos(\varpi t/2)) + e^{iJt}}{2},$$

$$Q_{31} = \frac{e^{i\delta t/2} (i \sin(\varpi t/2)(2J - \delta) / \varpi + \cos(\varpi t/2)) - e^{iJt}}{2},$$

где

$$\varpi = \sqrt{(2J - \delta)^2 + 8}.$$

Для начального состояния кубитов (3) и  $k=0$  соответственно имеем

$$|\Phi_{2,vac}(t)\rangle = Q_{12}(t)|l, l, 1\rangle + Q_{22}(t)|f, l, 0\rangle + Q_{32}(t)|l, f, 0\rangle, \quad (9)$$

где

$$Q_{12} = (\cos\theta + \sin\theta) Q_{11},$$

$$Q_{22} = (\cos\theta Q_{21} + \sin\theta Q_{31}),$$

$$Q_{32} = (\cos\theta Q_{31} + \sin\theta Q_{21}).$$

Имея решения (5)-(9), легко представить временную матрицу плотности для полной системы в случае теплового поля в виде

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k |\Phi(t)\rangle_{kk} \langle \Phi(t)|.$$

Для того, чтобы провести вычисление параметра перепутывания двух кубитов, необходима двухкубитная

редуцированная матрица плотности. Мы можем найти её, вычисляя след по переменным поля

$$P_{K_1K_2}(t) = Tr_{Field} P(t).$$

### 2. Расчет критерия Переса–Хородецких

В качестве количественного критерия степени перепутывания кубитов выберем параметр Переса–Хородецких

$$\varepsilon = -2 \sum_j t_j^- \tag{10}$$

Здесь  $t_j^-$  – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита матрицы плотности.

Частичное транспонирование редуцированной двухкубитной матрицы плотности  $P_{K_1K_2}(t)$  для рассматриваемых начальных состояний кубитов есть

$$P_{K_1K_2}^T(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & 0 & 0 & w_{14}(t) \\ 0 & w_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{33}(t) & 0 \\ w_{14}(t)^* & 0 & 0 & w_{44}(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Элементы (11) не приводятся, так как являются слишком громоздкими. Из четырех собственных значений (11) лишь одно может быть отрицательным. В результате параметр Переса–Хородецких может быть записан как

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(w_{11}(t) - w_{44}(t))^2 + 4 |w_{14}(t)|^2} - w_{11}(t) - w_{44}(t) \tag{12}$$

В следующем параграфе представлены результаты численного моделирования формулы (12) для различных параметров рассматриваемой модели.

### 3. Результаты и обсуждение

Зависимость параметра (12) от приведенного времени  $gt$  для начального состояния кубитов (2) и нулевой расстройки показана на рис. 1. Среднее число тепловых фотонов равно:  $\bar{n} = 0,1$  (а) и  $\bar{n} = 5$  (б). При этом безразмерная константа изинговского взаимодействия  $J = Z/g = 0$  (сплошная линия) и  $J = 0,1g$  (штриховая линия). Хорошо видно, что включение прямого взаимодействия кубитов изинговского типа ведет к значительному росту максимального значения параметра перепутывания кубитов. Указанный результат не является очевидным для гамильтониана вида (1), как это, например, имеет место для модели с прямым диполь-дипольным взаимодействием кубитов. В последнем случае слагаемое, отвечающее за прямое взаимодействие кубитов, непосредственно переводит состояние  $|f, l\rangle$  в перепутанное состояние (3). В случае взаимодействия изинговского типа эффект увеличения степени перепутывания носит более сложную природу. Мы связываем

его с эффективным изменением ширины энергетической щели кубитов и возникновением расстройки частот моды поля и перехода в кубите. При увеличении расстройки частот кубита и поля резонатора все меньшую роль в динамике системы начинает играть обмен энергией реальными фотонами и, соответственно, все большую роль – процессы испускания и поглощения виртуальных фотонов. Кубиты, испускающие и поглощающие виртуальные фотоны, образуют возбужденную виртуальную среду, способствующую росту перепутанности состояний кубитов. Аналогичный эффект для моделей без прямого взаимодействия, но при наличии реальной расстройки впервые описан в работе [26]. Автор показал, что включение расстройки приводит к возрастанию степени кубит-кубитного перепутывания.

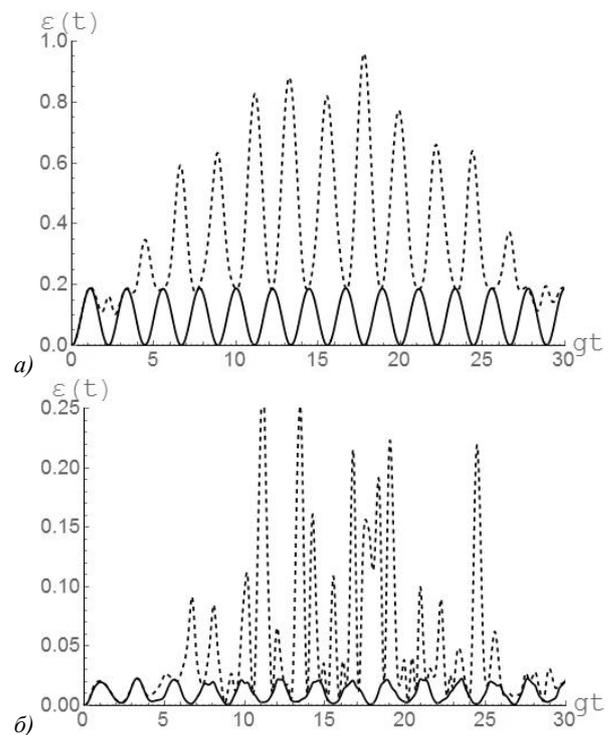


Рис. 1. Параметр Переса–Хородецких как функция времени  $gt$  для состояния кубитов (2). Параметры модели: расстройка  $\delta = 0$ , изинговская связь  $J = 0$  (жирная линия) и  $J = 0,1$  (пунктирная линия),  $\bar{k} = 0,1$  (а) и  $\bar{k} = 5$  (б)

Временная зависимость критерия (12) для модели с нерезонансным взаимодействием и начального состояния кубитов (2) представлена на рис. 2. Средние числа фотонов в резонаторе выбраны  $\bar{n} = 0,1$  (а) и  $\bar{n} = 5$  (б). Параметр расстройки  $\delta = \Xi/g = 5$ . Как и на предыдущем рисунке, константа изинговского взаимодействия  $J = 0$  (сплошная линия) и  $J = 0,1$  (штриховая линия). Хорошо видно, что при малых интенсивностях теплового поля наличие прямого взаимодействия кубитов практически не влияет на степень их перепутывания, что подтверждает нашу гипотезу. Вклад прямого взаимодействия кубитов в расстройку незначителен, поэтому и влияние такого

взаимодействия на степень перепутывания кубитов мало. В случае высоких интенсивностей поля резонатора ситуация несколько иная. Для малых времен влияние прямого взаимодействия кубитов на максимальную степень их перепутывания аналогично случаю малых интенсивностей поля. Для больших времен включение прямого взаимодействия замедляет процесс декогеренции системы и исчезновения перепутанности кубитов в процессе их эволюции.

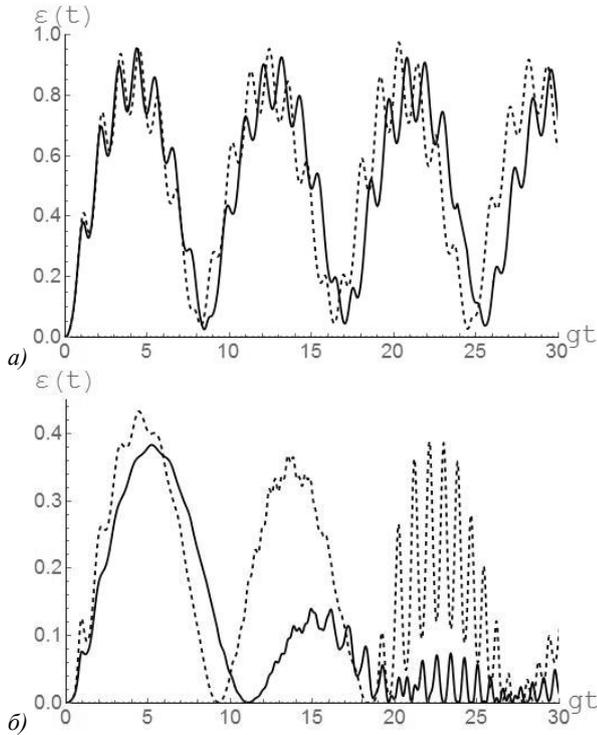


Рис. 2. Параметр Переса–Хородецких как функция времени  $gt$  для состояния кубитов (2). Параметры модели: расстройка  $\delta = 5$ , изинговская связь  $J = 0$  (жирная линия) и  $J = 0,1$  (пунктирная линия),  $\bar{k} = 5$  (а) и  $\bar{k} = 5$  (б)

Временная зависимость критерия (12) для нерезонансной модели и начального перепутанного состояния кубитов (3) представлена на рис. 3. Безразмерный параметр расстройки  $\delta = 0$  (а) и  $\delta = 5$  (б). Константа изинговской связи  $J = 0$  (сплошная линия) и  $J = 3$  (штриховая линия). Среднее число тепловых фотонов  $\bar{n} = 1$ .

Анализ рис. 3а показывает, что в отсутствие расстройки взаимодействие изинговского типа подавляет осцилляции параметра перепутывания и, соответственно, способствует стабилизации начального перепутывания кубитов. В рассматриваемом случае в отсутствие прямого взаимодействия кубитов наблюдается явление, называемое мгновенной смертью перепутывания. Явление заключается в исчезновении перепутывания на временах меньше времени диссипации. Паразитный эффект мгновенной смерти может быть подавлен за счет прямого взаимодействия кубитов. Интересно, что для нерезонансной модели мы имеем обратную ситуацию. Наличие расстройки, как

и в случае сепарабельных состояний, приводит к формированию возбужденной виртуальной среды резонатора, что, в свою очередь, увеличивает степень перепутанности кубитов. Поэтому для модели без прямого взаимодействия кубитов включение расстройки приводит как к уменьшению амплитуд осцилляций Раби параметра перепутывания, так и к исчезновению мгновенной смерти перепутывания. Включение достаточно интенсивного прямого взаимодействия компенсирует указанные эффекты. В результате в системе вновь проявляется эффект мгновенной смерти и возрождения перепутывания.

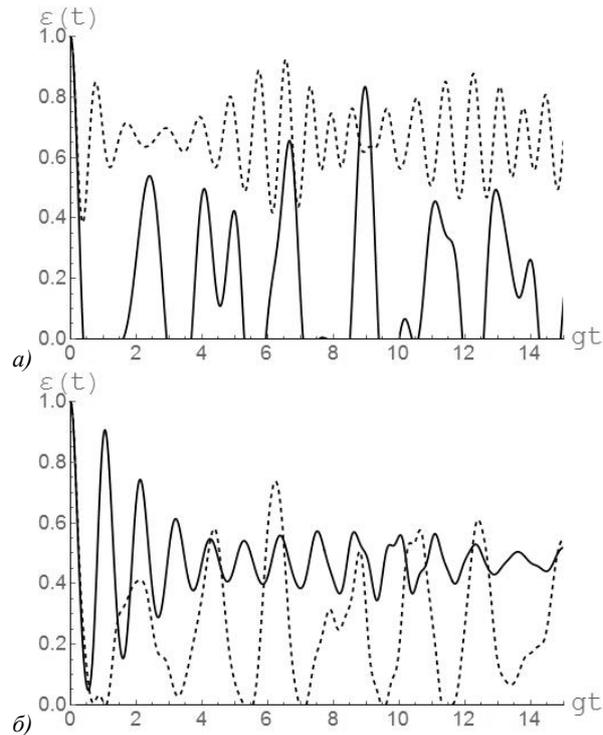


Рис. 3. Параметр Переса–Хородецких как функция времени  $gt$  для состояния кубитов (3) при  $\theta = \pi/4$ . Параметры модели: расстройка  $\delta = 0$  (а) и  $\delta = 5$  (б), изинговская связь  $J = 0$  (жирная линия) и  $J = 3$  (пунктирная линия),  $\bar{k} = 1$

### Заключение

Таким образом, в работе мы изучили воздействие связи изинговского типа на динамику перепутывания двух сверхпроводящих кубитов, индуцированных тепловым полем резонатора без потерь. Мы установили, что для перепутанного состояния кубитов  $|f, l\rangle$ , резонансно взаимодействующих с полем резонатора, прямое изинговское взаимодействие может значительно усилить степень перепутывания кубитов. Для нерезонансного взаимодействия кубитов со слабым тепловым полем прямое взаимодействие слабо влияет на степень перепутывания кубитов. Для интенсивного теплового поля в нерезонансном случае такое взаимодействие замедляет процесс декогеренции в системе кубитов и, соответственно, исчезновения их перепутывания. Мы также установили, что для перепутанного начального состояния кубитов в моде-

ли с расстройкой учет прямого взаимодействия кубитов сводится к стабилизации перепутывания и подавлению мгновенной смерти перепутывания. Для модели с расстройкой мгновенная смерть перепутывания не наблюдается даже в отсутствие прямого взаимодействия кубитов. Включение достаточно интенсивного прямого взаимодействия компенсирует влияние расстройки и, соответственно, в системе вновь возникает явление мгновенной смерти перепутывания. Таким образом, прямое взаимодействие кубитов изинговского типа можно использовать в качестве эффективного механизма подавления эффекта мгновенной смерти перепутывания для начального перепутанного состояния кубитов, возникающего за счет взаимодействия с тепловыми полями резонатора.

### References

- [1] Larson J. Dynamics of the Jaynes Cummings and Rabi models: old wine in new bottles. *Phys Scr* 2007; 76(2): 146-160. DOI: 10.1088/0031-8949/76/2/007.
- [2] Gu X, Kockum AF, Miranowicz A, Liu Y-X, Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Phys Rep* 2017; 718-719: 1-102. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.10.002.
- [3] Georgescu IM, Ashhab S, Nori F. Quantum simulation. *Rev Mod Phys* 2014; 88: 153–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153.
- [4] Huang L, Wu D, Fan D, Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Sci China Inf Sci* 2020; 63: 180501. DOI: 10.1007/s11432-020-2881-9.
- [5] Chen J. Review on quantum communication and quantum computation. *J Phys: Conf Ser* 2021; 1865: 022008. DOI: 10.1088/1742-6596/1865/2/022008.
- [6] Biamonte J, Faccin M, De Domenico M. Complex networks from classical to quantum. *Commun Phys* 2019; 2: 53. DOI: 10.1038/s42005-019-0152-6.
- [7] Izmalkov A, Grajcar M, Il'ichev E, Wagner T, Meyer H-G, Smirnov AY, Amin MHS, van den Brink AM, Zagoskin AM. Evidence for entangled states of two coupled flux qubits. *Phys Rev Lett* 2004; 93(3): 037003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.037003.
- [8] Grajcar M, Izmalkov A, der Ploeg S, Linzen S, Il'ichev E, Wagner Th, Hübner U, Meyer H-G, van den Brink AM, Uchaikin S, Zagoskin AM. Direct Josephson coupling between superconducting flux qubits. *Phys Rev B* 2005; 72(2): 020503. DOI: 10.1103/PhysRevB.72.020503.
- [9] Izmalkov A, Grajcar M, Il'ichev E, Oukhanski N, Wagner Th, Meyer H-G, Krech W, Amin MH, van den Brink AM, Zagoskin AM. Observation of macroscopic Landau-Zener transitions in a superconducting device. *Europhys Lett* 2004; 65(6): 844-849. DOI: 10.1209/epl/i2003-10200-6.
- [10] Donaire M, Muñoz-Castañeda JM, Nieto L. Dipole-dipole interaction in cavity QED: The weak-coupling, nondegenerate regime. *Phys Rev A* 2017; 96(4): 042714. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.042714.
- [11] Nguyen T, Raimond JM, Sayrin C, Cortiñas R, Cantat-Moltrecht T, Assemat F, Dotsenko I, Gleyzes S, Haroche S, Roux G, Jolicoeur Th, Brune M. Towards quantum simulation with circular Rydberg atoms. *Phys Rev X* 2018; 8(1): 011032. DOI: 10.1103/PhysRevX.8.011032.
- [12] Sorensen A, Molmer K. Spin-spin interaction and spin squeezing in an optical lattice. *Phys Rev Lett* 1999; 83(11): 2274. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.2274.
- [13] Porras D, Cirac JJ. Effective quantum spin systems with trapped ions. *Phys Rev Lett* 2004; 92(20): 20790. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.20790.
- [14] Zagoskin A, Blais A. Superconducting qubits. *La Physique au Canada* 2007; 63: 215-227.
- [15] Yu G-D, Li H-O, Cao G, Xiao M, Jiang H-W, Guo X-P. Tunable capacitive coupling between two semiconductor charge qubits. *Nanotechnology* 2016; 27(32): 324003. DOI: 10.1088/0957-4484/27/32/324003.
- [16] Hita-Pérez M, Jaumà G, Pino M, García-Ripoll JJ. Ultrastrong capacitive coupling of flux qubits. *Phys Rev Applied* 2022; 17(1): 014028. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.17.014028.
- [17] Aguiar LS, Munhoz PP, Vidiella-Barranco A, Roversi JA. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *J Opt B Quantum Semiclassical Opt* 2005; 7(12): S769-S771. DOI: 10.1088/1464-4266/7/12/049.
- [18] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field. *Computer Optics*. 2013; 37(3): 278-285. DOI: 10.18287/0134-2452-2013-37-3-278-285.
- [19] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions. *Opt Spectrosc* 2014; 116(4): 630-634. DOI: 10.1134/S0030400X14040067.
- [20] Bashkirov EK. Thermal entanglement between a Jaynes-Cummings atom and an isolated atom. *Int J Theor Phys* 2018; 57(12): 3761-3771. DOI: 10.1007/s10773-018-3888-y.
- [21] Sadiek G, Al-Drees W, Shaglel S, Elhag H. Asymptotic entanglement sudden death in two atoms with dipole-dipole and Ising interactions coupled to a radiation field at non-zero detuning. *Entropy* 2021; 23(5): 629-650. DOI: 10.3390/e23050629.
- [22] Plenio MB, Huelga SF, Beige A, Knight PL. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms. *Phys Rev A* 1999; 59: 2468-2475. DOI: 10.1103/PhysRevA.59.2468.
- [23] Kim MS, Lee J, Ahn D, Knight PL. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys Rev A* 2002; 65: 040101. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.040101.
- [24] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Opt Commun* 2010; 283: 4676-4679. DOI: 10.1016/j.optcom.2010.06.094.
- [25] Mariani M, Wang H, Yamamoto T, et al. Implementing the quantum von Neumann architecture with superconducting circuits. *Science* 2011; 334(6052): 61-65. DOI: 10.1126/science.1208517.
- [26] Chew Y, Tomita T, Mahesh TP, et al. Ultrafast energy exchange between two single Rydberg atoms on a nanosecond timescale. *Nat Photon* 2022; 16: 724-729. DOI: 10.1038/s41566-022-01047-2.
- [27] Moskalenko IN, Simakov IA, Abramov NN, et al. High fidelity two-qubit gates on fluxoniums using a tunable coupler. *npj Quantum Information* 2022; 8: 130. DOI: 10.1038/s41534-022-00644-x.
- [28] Sheldon S, Magesan E, Chow JM, Gambetta JM. Procedure for systematically tuning up cross-talk in the cross-resonance gate. *Phys Rev A* 2016; 93: 060302. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.060302.
- [29] Kjaergaard M, Schwartz ME, Braumuller JB, Krantz P, Wang JJ, Gustavsson S, Oliver WD. Superconducting qubits: Current state of play. *Annu Rev Condens Matter Phys* 2020; 11: 369-395. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.

- [30] Yu T, Eberly JH. Sudden death of entanglement. *Science* 2009; 323: 598-601. DOI: 10.1126/science.11673.
- [31] Almeida MP, de Melo F, Hor-Meyll M, Salles A, Walborn SP, Souto Ribeiro PH, Davidovich L. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science* 2007; 316(5824): 579-582. DOI: 10.1126/science.1139892.
- [32] Decordi GL, Vidiella-Barranco A. Sudden death of entanglement induced by a minimal thermal environment. *Opt Commun* 2020; 475: 126233. DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126233.
- [33] Xie S, Younis D, Eberly JH. Evidence for unexpected robustness of multipartite entanglement against sudden death from spontaneous emission. *Phys Rev Research* 2023; 5: L032015. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.L032015.
- [34] Wang F, Hou P-Y, Huang Y-Y, Zhang W-G, Ouyang X-L, Wang X, Huang X-Z, Zhang H-L, He L, Chang X-Y, Duan L-M. Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath. *Phys Rev B* 2018; 98: 064306. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.064306.
- [35] Shrikant U, Mandayam P. Quantum non-Markovianity: Overview and recent developments. *Front Quantum Sci Technol* 2023; 2: 1134583. DOI: 10.3389/frqst.2023.1134583.
- [36] Bashkirov EK. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. *Computer Optics* 2020; 44(2): 167-176. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-595.

---

**Сведения об авторе**

---

**Башкиров Евгений Константинович**, в 1978 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет (СамГУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Физика». Доктор физико-математических наук (2007 год), профессор (2009 год), профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского университета. Специалист в области квантовой оптики, физики кооперативных и когерентных процессов, оптической синергетики.  
E-mail: [bashkirov.ek@ssau.ru](mailto:bashkirov.ek@ssau.ru)

---

ГРНТИ: 29.29.39

*Поступила в редакцию 19 июня 2023 г. Окончательный вариант – 3 октября 2023 г.*

---

---

# Dynamics of a two-qubit Tavis-Cummings model in the presence of an Ising-type interaction between qubits

*E.K. Bashkirov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Samara National Research University,  
443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

## *Abstract*

In this paper, we investigated the dynamics of entanglement of two qubits interacting non-resonantly with the thermal field of a one-mode lossless resonator, taking into account the Ising-type direct interaction between qubits. Based on the exact solution of the quantum Liouville equation, we found the density matrix of the system under consideration. With its help, the reduced qubit-qubit density matrix was calculated and the entanglement criterion of the two-qubit system, Pres-Horodecki parameter, was found. It was shown that for the resonance model and separable initial states of qubits, the direct interaction of qubits leads to a significant increase in the maximum degree of their entanglement. It was also found that for the nonresonant interaction between qubits and field, the increase of the maximum degree of entanglement of qubits is much greater than that due to direct interaction. For the original entangled Bell-type state of the qubits, the direct interaction was found to lead to the vanishing of the effect of the sudden death of entanglement in the case of a resonant qubit-field interaction and, conversely, to an increase in this effect for a nonresonant interaction.

*Keywords:* qubits, coplanar lossless resonator, resonant and nonresonant interaction, thermal field, entanglement, negativity, sudden death of entanglement.

*Citation:* Bashkirov EK. Dynamics of a two-qubit Tavis-Cummings model in the presence of an Ising-type interaction between qubits. *Computer Optics* 2024; 48(4): 475-482. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1372.

---

## *Author's information*

**Eugene Konstantinovich Bashkirov** graduated with honors (1978) from Kuibyshev State University (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2007) degree from Saratov State University. Professor of General and Theoretical Physics department of Samara University. His leading research interests include quantum optics, cooperative and coherent phenomena, optical synergetics. E-mail: [bashkirov.ek@ssau.ru](mailto:bashkirov.ek@ssau.ru)

---

*Received June 19, 2023. The final version – November 3, 2023.*

---