Номер скирмиона для обобщенного векторного пучка Пуанкаре

В.В. Котляр [1,2], А.А. Ковалёв [1,2], А.М. Телегин [2]
[1] Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;
[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Исследованы два начальных векторных поля типа пучков Пуанкаре, которые можно рассматривать как оптические скирмионы – топологические квазичастицы. Для них получены явные выражения для проекций трёхмерного векторного поля скирмиона в начальной плоскости и номера скирмионов, которые пропорциональны топологическим зарядам оптических вихрей, входящих в пучки Пуанкаре. Получена новая конструктивная формула для эффективного расчета номера скирмиона через проекции нормированного вектора Стокса, а не через проекции векторного поля скирмиона. Номера скирмионов, рассчитанные по известной и новой формуле, совпадают. Показано также, что номера каждой проекции трёхмерного векторного поля скирмиона равны одной третьей от полного номера скирмиона. Моделирование подтверждает выводы теории.

Ключевые слова: квазичастица, оптический скирмион, пучок Пуанкаре, оптический вихрь, вектор Стокса, номер скирмиона.

Цитирование: **Котляр, В.В.** Номер скирмиона для обобщенного векторного пучка Пуанкаре / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 1. – С. 5-12. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1507.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Skyrmion number for a generalized vector Poincaré beam. Computer Optics 2025; 49(1): 5-12. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1507.

Введение

В последние годы в оптике появились работы, связанные с новым объектом исследования, – это скирмионы, или оптические квазичастицы. Такие векторные поля называют квазичастицами потому, что они резко убывают с увеличением расстояния от центра. В физике микрочастиц скирмионы известны с 1961 года [1] и называются так по имени рассмотревшего их ученого T.H.R. Skyrme. Скирмион в оптике строится следующим образом. Выбирается начальный 2D-вектор Джонса для векторного поля, как правило, типа пучка Пуанкаре. Далее рассчитывается нормированный 3D-вектор Стокса, на основе которого строится 3D векторное поле скирмиона [2 – 5]. Распределение поляризации по сечению скирмиона может быть типа «ежика» (Neel-type) или типа Блоха (вихревое распределения вектора поляризации) [6]. В отличие от других векторных полей, которые имеют разные поляризационные сингулярности (V-точки, C-точки и другие), вокруг которых векторные поля образуют топологические распределения типа «лимон», «звезда», «монстр» и другие, векторное поле скирмиона имеет только положительные проекции на декартовые оси (отрицательных проекций нет). Причем направление вектора в центре скирмиона и векторов на его периферии взаимно ортогональное. В центре вектор поля скирмиона направлен вдоль оптической оси, а на удалении от центра вектора скирмиона лежат в поперечной плоскости.

Но любой тип скирмиона характеризуется единой топологической характеристикой, аналогичной топологическому заряду (winding number) скалярных вихревых полей или индексу поляризационной сингулярности любого векторного поля, номером скирмиона [6 – 8]. Номер скирмиона показывает, сколько раз состояние поляризации скирмиона обходит сферу Пуанкаре при обходе по замкнутому контуру в сечении пучка. Номер скирмиона, как и топологический заряд, сохраняется при параксиальном распространении пучка. Для пучков Пуанкаре на основе суперпозиции двух пучков Лагерра–Гаусса в работе [8] показано, что номер скирмиона равен разности двух топологических зарядов вихревых пучков, входящих в пучок Пуанкаре. Общего доказательства сохранения номера скирмиона при распространении пока нет. В работе [9] дано другое определение номера скирмиона, на основе компонент Стокса. Это определение основано на контурном интеграле по замкнутой траектории от градиента фазы комплексного поля Стокса. Это не конструктивное определение.

В данной работе на основе модернизации определения номера скирмиона из [9] предлагается новое конструктивное выражение для номера скирмиона, основанное на интеграле по окружности бесконечного радиуса с центром на оптической оси от производной по азимутальному углу от фазы комплексного поля Стокса. Под модернизацией мы понимаем упрощение известной формулы расчета номера скирмиона, которое позволяет просто аналитически вычислять номера скирмионов, также заданные в виде аналитических выражений. Кроме того, формула для расчета номера скирмиона в [9] приводит к зависимости номера скирмиона от радиальной переменной. В нашей модернизированной формуле номер скирмиона – это целое число, которое не зависит от радиальной переменной и сохраняется при распространении скирмиона в свободном пространстве. В работе на основе двух примеров начальных векторных полей в виде пучков Пуанкаре показано, что известное определение номера скирмиона [6, 7] и новое определение дают одинаковый результат. Показано также, что частичные номера скирмиона, рассчитанные на основе каждой проекции векторного поля скирмиона, равны между собой и равны одной третьей части от полного целого номера скирмиона. Численно показано, что при параксиальном распространении и частичные номера скирмиона, и полный номер скирмиона сохраняются. При этом один из рассматриваемых пучков Пуанкаре не является суперпозицией пучков Лагерра–Гаусса.

1. Теоретические основания

Для начального 2D векторного светового поля, вектор Джонса которого можно представить в виде

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} E_x(r,\varphi) \\ E_y(r,\varphi) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где комплексные функции $E_x(r,\varphi)$ и $E_y(r,\varphi)$ описывают амплитуду поперечных проекций вектора напряженности электрического поля в полярных координатах (r,φ), можно построить 3D векторное поле, состоящее из трех нормированных компонент Стокса:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{|E_x|^2-|E_y|^2}{|E_x|^2+|E_y|^2}, \\ S_y &= \frac{2\,\mathrm{Re}\left(E_x^* E_y\right)}{|E_x|^2+|E_y|^2}, \\ S_z &= \frac{2\,\mathrm{Im}\left(E_x^* E_y\right)}{|E_x|^2+|E_y|^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Как оптический вихрь с комплексной амплитудой $E(r,\varphi)$ описывается своим топологическим зарядом [10]:

$$TC=\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{Im}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \arg\left(E(r,\varphi)\right)}{\partial\varphi}d\varphi, \tag{3}$$

где lim – это значок предела при r, стремящемся к бесконечности, Im – мнимая часть числа, так и скирмион (2) описывается номером скирмиона:

$$NS=\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \mathbf{S}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial y}\right)dxdy=\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \Sigma\, dxdy, \tag{4}$$

где σ – это 2D-область интегрирования, × – векторное умножение, Σ – сумма трёх проекций $(\Sigma_x+\Sigma_y+\Sigma_z)$ пучка скирмиона [6–8] – трехмерного топологическскго векторного поля $\mathbf{\Sigma}=(\Sigma_x,\Sigma_y,\Sigma_z)$, связанного с вектором Стокса $\mathbf{S}=(S_x,S_y,S_z)$, которое, в свою очередь, связано с 2D-полем $\mathbf{E}$ (1). Из подынтегрального выражения в (4) векторное поле скирмиона $\mathbf{\Sigma}$ имеет проекции:

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= S_x\left(\frac{\partial S_y}{\partial x}\frac{\partial S_z}{\partial y}-\frac{\partial S_z}{\partial x}\frac{\partial S_y}{\partial y}\right), \\ \Sigma_y &= S_y\left(\frac{\partial S_z}{\partial x}\frac{\partial S_x}{\partial y}-\frac{\partial S_x}{\partial x}\frac{\partial S_z}{\partial y}\right), \\ \Sigma_z &= S_z\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}\frac{\partial S_y}{\partial y}-\frac{\partial S_y}{\partial x}\frac{\partial S_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Можно показать [9], что поле скирмиона (5) поперечное, то есть дивергенция этого поля равна нулю:

$$\nabla\cdot\mathbf{\Sigma}=0. \tag{6}$$

Доказать аналитически равенство (6) здесь нельзя, так как надо знать производную поля (1) по продольной координате z. По теореме о дивергенции получим, что поток поля скирмиона через любую замкнутую поверхность $\mathbf{\Pi}$ равен нулю:

$$\oint \mathbf{\Sigma}\, d\mathbf{\Pi}=0. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при параксиальном распространении скирмиона (5) в свободном пространстве номер скирмиона (4) будет сохраняться для каждой проекции отдельно:

$$\iint_{R^2}\Sigma_i(x,y,z)dxdy=\iint_{R^2}\Sigma_i(x,y,0)dxdy,\ \ i=x,y,z. \tag{8}$$

Это в том числе следует из того, что в (5) можно менять циклически проекции векторного поля скирмиона. Поэтому и полный номер скирмиона NS также будет сохраняться:

$$\begin{aligned} NS &= \frac{1}{4\pi}\iint_{R^2}\left[\Sigma_x(x,y,z)+\Sigma_y(x,y,z)+\right. \\ &\quad \left.+\Sigma_z(x,y,z)\right]dxdy= \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_{R^2}\left[\Sigma_x(x,y,0)+\Sigma_y(x,y,0)+\right. \\ &\quad \left.+\Sigma_z(x,y,0)\right]dxdy. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Поле скирмиона в начальной плоскости для обобщенного пучка Пуанкаре

Для того, чтобы построить поле скирмиона на основе начального поля (1), нужно удовлетворить некоторым условиям. Действительно, три проекции вектора Стокса (2) можно построить для любого начального поля (1). Но поле скирмиона (5) на основе вектора Стокса можно построить не для любого вектора Стокса (2). То есть построить можно для любого поля, но при этом номер скирмиона будет равен нулю. Для пояснения этого утверждения перейдем от производных в декартовых координатах в (5) к производным в полярных координатах. Тогда вместо (5) получим:

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \frac{S_x}{r}\left(\frac{\partial S_y}{\partial r}\frac{\partial S_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_z}{\partial r}\frac{\partial S_y}{\partial \varphi}\right), \\ \Sigma_y &= \frac{S_y}{r}\left(\frac{\partial S_z}{\partial r}\frac{\partial S_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_x}{\partial r}\frac{\partial S_z}{\partial \varphi}\right), \\ \Sigma_z &= \frac{S_z}{r}\left(\frac{\partial S_x}{\partial r}\frac{\partial S_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_y}{\partial r}\frac{\partial S_x}{\partial \varphi}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (10) видно, что начальное поле (1), которое не зависит от радиальной переменной, даст все нулевые проекции поля скирмиона, так как все производные по радиальной переменной будут равны нулю. Также если начальное поле (1) состоит из действительных функций, то S_z в (2) будет равна нулю. И ее производные по φ в (10) тоже будут равны нулю. Поэтому и все поле скирмиона (10) будет равно нулю. Таким образом, для получения ненулевых проекций поля скирмиона (10) нужно, чтобы начальное поле (1) зависело от обеих полярных координат, имело единичный модуль и было комплексным и чтобы у вектора Стокса (2) все проекции были отличны от нуля и хотя бы одна проекция не зависела от азимутального угла.

Всем перечисленным условиям удовлетворяет следующее начальное векторное поле пучка Пуанкаре [11, 12] специального вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{r^2+f^2}}\begin{pmatrix} fe^{-i(n\varphi+\varphi_0)} + re^{+i(n\varphi+\varphi_0)} \\ ife^{-i(n\varphi+\varphi_0)} - ire^{+i(n\varphi+\varphi_0)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2+f^2}}\left[fe^{-i(n\varphi+\varphi_0)}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + re^{+i(n\varphi+\varphi_0)}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\right], \end{aligned} \tag{11}$$

где f – фокусное расстояние сферической линзы, φ_0 – постоянная фаза. Используя (2), найдем проекции вектора Стокса для начального поля (11):

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{2rf}{r^2+f^2}\cos(2n\varphi+2\varphi_0), \\ S_y &= \frac{2rf}{r^2+f^2}\sin(2n\varphi+2\varphi_0), \\ S_z &= \frac{f^2-r^2}{r^2+f^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Продольная проекция Стокса в (12) показывает, что у поля (11) при $r<f$ будет правая эллиптическая поляризация ($S_z>0$), при $r>f$ – левая эллиптическая поляризация ($S_z<0$) и при $r=f$ – линейная поляризация ($S_z=0$). На оптической оси ($r=0$) будет C-точка, то есть правая круговая поляризация ($S_z=1$). И сумма квадратов поперечных проекций Стокса не зависит от азимутального угла φ и равна

$$S_x^2 + S_y^2 = \frac{4r^2f^2}{\left(r^2+f^2\right)^2}. \tag{13}$$

То есть при обходе сечения пучка (11) по окружности любого радиуса с центром на оптической оси модуль поперечного вектора Стокса будет постоянный. Причем длина поперечного вектора Стокса (13) будет расти от нуля в центре ($r=0$) до максимума при $r=f$ и потом начнет спадать до нуля на бесконечности.

Подставляя (12) в (10), найдем проекции поля скирмиона для начального поля (11):

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \frac{32nr^2f^4}{\left(r^2+f^2\right)^4}\cos^2\left(2n\varphi+2\varphi_0\right), \\ \Sigma_y &= \frac{32nr^2f^4}{\left(r^2+f^2\right)^4}\sin^2\left(2n\varphi+2\varphi_0\right), \\ \Sigma_z &= \frac{8nf^2\left(f^2-r^2\right)^2}{\left(r^2+f^2\right)^4}. \end{aligned} \tag{14}$$

При сложении поперечных проекций поля скирмиона (14) получим:

$$\Sigma_x + \Sigma_y = \frac{32nr^2f^4}{\left(r^2+f^2\right)^4}. \tag{15}$$

Получится функция, не зависящая от азимутального угла φ. То есть при обходе в сечении пучка (11) по окружности любого радиуса с центром на оптической оси сумма поперечных проекций (14) сохраняется, хотя модуль поперечного векторного поля скирмиона (14) не сохраняется. При стремлении r к бесконечности все проекции скирмиона стремятся быстро к нулю, как r^{-4} и r^{-6}. Интересно, что все проекции скирмиона (14) являются положительно определенными функциями и при усреднении по сечению пучка все проекции имеют одинаковое среднее:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Sigma_x(r,\varphi)rdrd\varphi = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Sigma_y(r,\varphi)rdrd\varphi = \\ &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Sigma_z(r,\varphi)rdrd\varphi = \frac{8}{3}\pi n. \end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно, номер скирмиона (4) для обобщенного пучка Пуанкаре (11) равен:

$$NS = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\left(\Sigma_x+\Sigma_y+\Sigma_z\right)rdrd\varphi = 2n. \tag{17}$$

Из (17) видно, что номер скирмиона в 2 раза больше топологического заряда n оптического вихря, который входит в пучок Пуанкаре. Заметим, что в данном случае номер скирмиона совпадает с индексом Стокса поляризационной сингулярности пучка, который в 2 раза больше, чем индекс поляризационной сингулярности Пуанкаре–Хопфа, равный для пучка Пуанкаре n [12].

В [9] приведена, правда, без доказательства, другая формула для расчета номера скирмиона:

$$NS = -\frac{1}{4\pi}\oint S_z \nabla\Phi d\,\mathbf{l}, \qquad \Phi = \arg\left(S_x + iS_y\right). \tag{18}$$

В (18) номер скирмиона рассчитывается как интеграл по замкнутому контуру от произведения третьей проекции Стокса на градиент от аргумента комплексного поперечного поля Стокса Φ. Чтобы правильно описать топологию скирмиона, следует в (18) заменить обход по произвольной траектории на обход по окружности, а градиент от Φ – на производную по азимутальному углу φ и устремить радиус окружности к бесконечности, чтобы охватить все точки сингулярности векторного поля (12). Тогда номер скирмиона, вместо (18), будет описываться выражением:

$$NS = -\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{Im}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{S_z}{S_x + iS_y}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(S_x + iS_y\right)d\varphi. \tag{19}$$

Выражение (19) для расчета номера скирмиона более конструктивное, чем (18), и во многом совпадает с формулой Берри [10] для расчета топологического заряда скалярных оптических вихрей и с расчетом индекса Пуанкаре–Хопфа векторных световых полей с точками поляризационной сингулярности [13]. С помощью поля Стокса (12) рассчитаем номер скирмиона (11) по формуле (19), получим:

$$\begin{aligned} NS &= -\lim_{r\to\infty}\frac{\mathrm{Im}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f^2 - r^2}{f^2 + r^2}\right)\times \\ &\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2fre^{i(2n\varphi+2\varphi_0)}}{f^2 + r^2}\right)\left(\frac{2fre^{i(2n\varphi+2\varphi_0)}}{f^2 + r^2}\right)^{-1}d\varphi = \\ &= 2n. \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая номер скирмиона (14), рассчитанный по формуле (17), с номером скирмиона, рассчитанным по новой формуле (19), видно, что оба номера равны $2n$. То есть номер скирмиона можно рассчитать с помощью первых двух компонент Стокса S_x и S_y (2). Третья нормированная компонента Стокса S_z в (19) на бесконечности будет равна +1 или –1. Чтобы измерить эти компоненты, следует измерить четыре распределения интенсивности при разных углах наклона оси поляризатора к декартовой оси x: 0, 90, 45 и –45 градусов. Тогда компоненты Стокса через эти интенсивности будут равны: $S_x = I_0 - I_{90}$, $S_y = I_{45} - I_{-45}$. И далее по формуле (19) рассчитать номер скирмиона NS. Заметим, что в работе [14] для разных типов скирмионов были измерены экспериментально компоненты Стокса. Но из-за сложности формулы (4) для расчета номера скирмиона в работе [14] не были измерены номера сформированных скирмионов. Если бы авторы [14] знали формулу (19), то измерение номера скирмиона было сделать проще.

3. Поле скирмиона для суперпозиции двух оптических вихрей с линейными ортогональными поляризациями

Рассмотрим еще один пример поля скирмиона в начальной плоскости, аналогичный пучку Пуанкаре (11), но вместо круговых поляризаций возьмем две ортогональные линейные поляризации. Выберем также разные топологические заряды у оптических вихрей, и амплитуду выберем степенную, как у однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса. Тогда вектор Джонса в начальной плоскости такого пучка будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{r^{2n} + r^{2m}}}\begin{pmatrix} r^n e^{i(n\varphi+\varphi_0)} \\ r^m e^{i(m\varphi+\varphi_0)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^{2n} + r^{2m}}}\left[r^n e^{i(n\varphi+\varphi_0)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r^m e^{i(m\varphi+\varphi_0)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

где n и m – положительные целые числа, топологические заряды оптических вихрей. Аналогично (12) получим проекции нормированного на интенсивность вектора Стокса для поля (21):

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{r^{2n} - r^{2m}}{r^{2n} + r^{2m}}, \\ S_y &= \frac{2r^{n+m}}{r^{2n} + r^{2m}}\cos((m-n)\varphi), \\ S_z &= \frac{2r^{n+m}}{r^{2n} + r^{2m}}\sin((m-n)\varphi). \end{aligned} \tag{22}$$

Поле Стокса (22) по форме совпадает с проекциями вектора магнетизации из работы [2]. Из сравнения (12) и (22) видно, что оба скирмиона имеют похожую структуру: одна проекция вектора Стокса не имеет зависимости от азимутального угла, а две других проекции вектора Стокса имеют зависимость от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, θ – линейно зависит от азимутального угла φ. Поэтому сумма квадратов этих двух проекций так же, как и третья проекция вектора Стокса, не зависит от азимутального угла. Отличие в том, что складывать надо продольную и поперечную проекции:

$$S_z^2 + S_y^2 = \frac{4r^{2(n+m)}}{\left(r^{2n} + r^{2m}\right)^2}. \tag{23}$$

В поле (21) эллиптическая поляризация будет менять знак не при изменении радиуса, как у поля (11), а при изменении угла: при $\sin(m-n)\varphi > 0$ будет правая эллиптическая поляризация ($S_z > 0$), а при $\sin(m-n)\varphi < 0$ – левая эллиптическая поляризация ($S_z < 0$). При углах, которые удовлетворяют условию $\sin(m-n)\varphi = 0$, будет линейная поляризация ($S_z = 0$). Так как при $n > m$ выполняется неравенство $r^{2n} + r^{2m} > 2r^{n+m}$, то круговой поляризации ($S_z = \pm 1$) в поле (18) не будет.

Далее аналогично (14) найдем проекции векторного поля скирмиона для начального векторного поля (21), получим:

$$\Sigma_x = \frac{4(m-n)^2 \left(r^{2n} - r^{2m}\right)^2 r^{2(n+m-1)}}{\left(r^{2n} + r^{2m}\right)^4},$$
$$\Sigma_y = \frac{16(m-n)^2 r^{2(2n+2m-1)}}{\left(r^{2n} + r^{2m}\right)^4} \cos^2\left(m-n\right), \tag{24}$$
$$\Sigma_z = \frac{16(m-n)^2 r^{2(2n+2m-1)}}{\left(r^{2n} + r^{2m}\right)^4} \sin^2\left(m-n\right).$$

Из сравнения (14) и (24) видно, что оба поля скирмиона имеют схожую структуру: одна проекция вектора скирмиона не зависит от азимутального угла, а две другие зависят от азимутального угла таким образом, что их сумма не зависит от азимутального угла. Поле скирмиона (24) так же, как и поле (14), положительно определенное и при стремлении радиальной переменной к бесконечности убывает до нуля, как $r^{-2(n-m+1)}$ и $r^{-4(n-m)-2}$. Отличие в том, что скорость убывания к нулю на бесконечности у скирмиона (14) не зависит от топологического заряда n, а для скирмиона (24) зависит от разности $n-m$, $n>m$. На оптической оси ($r=0$) амплитуда скирмиона (24) равна нулю, в отличие от скирмиона (14), у которого на оптической оси $\Sigma_z(r=0)=8nf^{-2}$. Можно показать, что номера скирмиона по разным осям одинаковые и равны $(n-m)/3$:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \Sigma_x(r,\varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \Sigma_y(r,\varphi) r dr d\varphi = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \Sigma_z(r,\varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{3}(n-m). \tag{25}$$

Следовательно, полный номер скирмиона (4) для суперпозиции двух пучков Лагерра–Гаусса с ортогональными линейными поляризациями (21) и с топологическими зарядами n и m равен выражению:

$$NS = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \left(\Sigma_x + \Sigma_y + \Sigma_z\right) r dr d\varphi = n - m. \tag{26}$$

Из-за того, что все проекции скирмиона имеют одинаковый номер (25), следует, что при перестановках координат скирмиона будет получаться все тот же скирмион. Заметим, что если выбрать $m=-n$, то номер скирмиона (24) совпадет с номером скирмиона (14) и будет равен $NS=2n$. То есть оба эти скирмиона топологически одинаковы.

Чтобы рассчитать номер скирмиона (22) по формуле (19), следует сделать замену: S_x заменить на S_z, S_y заменить на S_x и S_z заменить на S_y:

$$S_x = \frac{2r^{n+m}}{r^{2n} + r^{2m}} \cos((m-n)\varphi),$$
$$S_y = \frac{2r^{n+m}}{r^{2n} + r^{2m}} \sin((m-n)\varphi), \tag{27}$$
$$S_z = \frac{r^{2n} - r^{2m}}{r^{2n} + r^{2m}}.$$

Тогда подставим (27) в (19), получим ($n > m$):

$$NS = -\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Im}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^{2n} - r^{2m}}{r^{2n} + r^{2m}}\right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2r^{n+m} e^{i(m-n)\varphi}}{r^{2n} + r^{2m}}\right)\left(\frac{2r^{n+m} e^{i(m-n)\varphi}}{r^{2n} + r^{2m}}\right)^{-1} d\varphi = \\ = n - m. \tag{28}$$

Видно, что номера скирмиона (24), рассчитанные по формулам (26) и (19), совпадают.

4. Спиновый угловой момент в остром фокусе пучка Пуанкаре

Найдем проекции вектора напряженности электрического поля в остром фокусе пучка (11) с помощью формализма Ричардса–Вольфа [15], получим ($\varphi_0 = 0$):

$$E_x = i^{n-1} e^{-in\varphi}\left(I_{0,n}^{(1)} + e^{i2\varphi} I_{2,n-2}^{(1)}\right) + \\ + i^{n-1} e^{in\varphi}\left(I_{0,n}^{(2)} + e^{-i2\varphi} I_{2,n-2}^{(2)}\right),$$
$$E_y = i^{n-1} e^{-in\varphi}\left(I_{0,n}^{(1)} - e^{i2\varphi} I_{2,n-2}^{(1)}\right) + \\ + i^{n-1} e^{in\varphi}\left(-I_{0,n}^{(2)} + e^{-i2\varphi} I_{2,n-2}^{(2)}\right), \tag{29}$$
$$E_z = -2i^n\left(e^{-i(n-1)\varphi} I_{1,n-1}^{(1)} + e^{i(n-1)\varphi} I_{1,n-1}^{(2)}\right).$$

В (29) использованы обозначения функций, зависящих только от радиальной переменной r:

$$I_{\nu,\mu}^{(1,2)} = 2kf \int_0^\alpha \sin^{\nu+1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{3-\nu}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{1/2}\left(\theta\right) \times \\ \times A_{1,2}\left(\theta\right) e^{ikz\cos\theta} J_\mu\left(kr\sin\theta\right) d\theta,$$
$$A_1(\theta) = \frac{f}{\sqrt{r^2 + f^2}} = \cos\theta, \tag{30}$$
$$A_2(\theta) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + f^2}} = \sin\theta,$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число монохроматического света с длиной волны λ, f – фокусное расстояние фокусирующей линзы, α – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую апертуру апланатической линзы $\mathrm{NA}=\sin\alpha$, $J_\mu(\xi)$ – функция Бесселя первого рода μ-го порядка. Функции $A_{1,2}(\theta)$ – действительные функции, определяющие радиально-симметричную амплитуду начального поля, зависящую от угла наклона θ луча, исходящего из точки на начальном сферическом фронте и сходящегося в центр плоскости фокуса.

Далее найдем с помощью (29) продольную проекцию вектора спинового углового момента (СУМ) [16]:

$$\mathbf{SP} = \frac{1}{8\pi\omega} \mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}\right). \tag{31}$$

Получим следующее выражение:

$$SP_z = -2\sin 2\varphi\left(I_{0,n}^{(1)}I_{2,n-2}^{(1)} + I_{0,n}^{(2)}I_{2,n-2}^{(2)}\right) - \\ - 2\sin 2n\varphi\left(I_{0,n}^{(1)}I_{0,n}^{(2)}\right) + \\ + 2\sin(2n-4)\varphi\left(I_{2,n-2}^{(1)}I_{2,n-2}^{(2)}\right). \qquad (32)$$

В [17] показано, что вблизи оптической оси интегралы с первым нулевым индексом дают вклад в световое поле много больше, чем остальные интегралы. Поэтому вместо (32), которое не просто анализировать теоретически, получим приближенное, но более простое выражение для продольной составляющей СУМ в фокусе поля (11):

$$SP_z \approx -2\sin 2n\varphi\left(I_{0,n}^{(1)}I_{0,n}^{(2)}\right). \qquad (33)$$

Из (33) видно, что, хотя в начальном поле (11) третья проекция Стокса меняла знак при изменении радиуса, в фокусе продольная проекция СУМ (33) меняет знак при изменении угла. При обходе по окружности любого радиуса с центром на оптической оси продольная проекция СУМ (или третья проекция Стокса) будет менять знак $4n$ раз. Такой скирмион в работе [9] называют мультискирмионом.

5. Моделирование

Для моделирования поле (11) умножалось на функцию Гаусса $\exp[-(x^2+y^2)/w^2]$, где w – радиус перетяжки гауссова пучка. При моделировании $w=1$ мм. На рис. 1 показано распределение интенсивности пучка Пуанкаре (11), умноженного на функцию Гаусса при $n=1$, $f=1$ мм, $\varphi_0=0$. Интенсивность показана в виде распределения цветов: чёрный цвет – максимальная интенсивность, белый цвет – минимальная. Стрелками на рис. 1 показано направление поперечного вектора Стокса (12), $S_x\mathbf{e_x}+S_y\mathbf{e_y}$, где $\mathbf{e_x}$ и $\mathbf{e_y}$ – единичные векторы вдоль декартовых осей x и y. Цветом показан знак продольной компоненты Стокса (12): белый цвет $S_z>0$, чёрный цвет $S_z<0$. Как и предсказывает теория (12), в центре сечения пучка будет правая эллиптическая поляризация ($S_z>0$), а на периферии пучка – левая эллиптическая поляризация ($S_z<0$). Интенсивность пучка (11) будет иметь вид гауссовой функции $I(r)=\exp(-2r^2/w^2)$.

Из рис. 1 и из уравнения (12) видно, что на горизонтальной оси вектор Стокса будет направлен вдоль оси x. На вертикальной оси вектор Стокса будет направлен против направления оси x. На лучах под углами $\varphi=\pi/4$, $5\pi/4$ вектор Стокса будет направлен вертикально вверх вдоль оси y, а на лучах под углами $\varphi=3\pi/4$, $7\pi/4$ поперечный вектор Стокса будет направлен вертикально вниз против оси y. В центре поля (11) на оптической оси будет С-точка с круговой поляризацией, так как продольная проекция Стокса (12) при $r=0$ равна единице ($S_z=1$). Это точка поляризационной сингулярности, так как в ней не определено направление осей эллипса поляризации поля (11). Индекс Пуанкаре–Хопфа [18] поляризационной сингулярности С-точки равен отношению целого числа поворотов осей эллипса поляризации при обходе по окружности с центром на оптической оси к полному углу 2π. А индекс Стокса поляризационной сингулярности в два раза больше индекса Пуанкаре–Хопфа и равен отношению числа полных оборотов поперечного вектора Стокса при обходе по окружности с центром на оптической оси к полному углу [18, 19]. На рис. 1 видно, что поперечный вектор Стокса повернется на угол 4π, поэтому индекс Стокса равен $\sigma=4\pi/2\pi=2$ (напомним, что $n=1$). Индекс Стокса можно найти как топологический заряд комплексного поля Стокса [20]:

$$S_c = S_1 + iS_2 = \frac{2rf}{r^2+f^2}\exp(i2n\varphi + i2\varphi_0). \qquad (34)$$

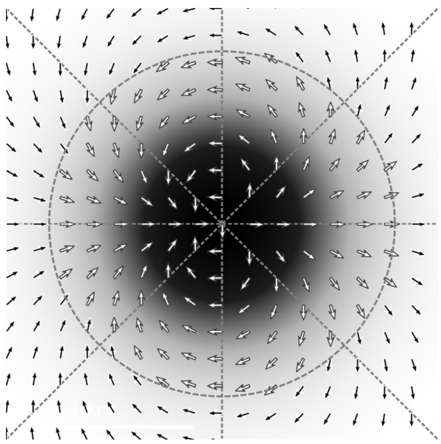

Рис. 1. Распределение интенсивности поля (11) (белый цвет – ноль, чёрный цвет – максимум) и распределение вектора Стокса в начальной плоскости поля (11): стрелки показывают поперечную проекцию вектора Стокса (12), а цвет стрелки показывает знак продольной проекции Стокса: белый – $S_z > 0$, чёрный – $S_z < 0$. Для наглядности область положительных значений S_z (круг) обведена пунктирной окружностью. Все стрелки имеют одинаковый размер для лучшей визуализации. Размер кадра – 2,5 × 2,5 мм

Индекс Стокса σ и индекс Пуанкаре–Хопфа η находятся как топологический заряд по формуле Берри [13]:

$$\sigma = 2\eta = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(r,\varphi)/\partial\varphi}{S_c(r,\varphi)} = 2n. \qquad (35)$$

Для случая на рис. 1 при $n=1$ индекс Стокса (35) будет равен номеру скирмиона (17) и (20).

На рис. 2 показаны проекции поля скирмиона (14) Σ_x, Σ_y, Σ_z. Из сравнения поля Стокса (12) и поля скирмиона (14) видно, что они структурно схожи, поле скирмиона положительное и является почти квадратом от поля Стокса. Так как поперечные проекции поля скирмиона зависят от квадратов $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$, то в распределении поперечных проекций будут по четыре лепестка, повернутых относительно друг друга на $\pi/4$, что и видно на рис. 2*а* и 2*б*. Продольная проекция поля скирмиона

(14) имеет радиальную симметрию с максимумом на оптической оси (рис. 2*в*). Мы численно просуммировали все три проекции по всему кадру на рис. 1 и получили, как и следует из теории (16), что все три номера скирмиона равны $NS_x = NS_y = NS_z = 2/3$, а полный номер скирмиона равен $NS = 2$ (рис. 2) при $n = 1$.

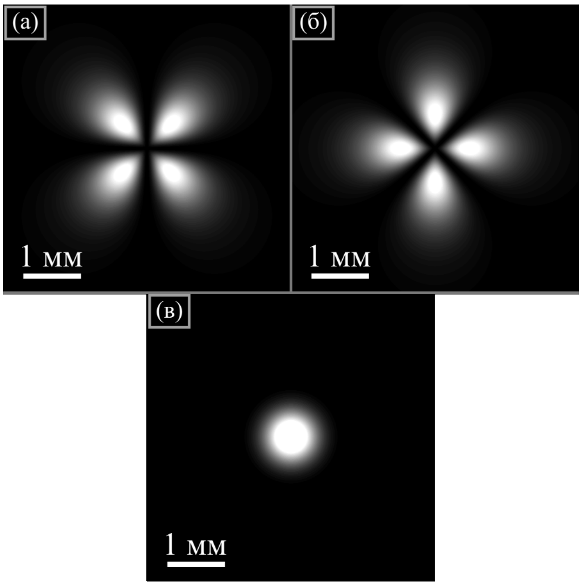

Рис. 2. Проекции 3D-поля скирмиона (14) при n = 1: Σ_x (а), Σ_y (б), Σ_z (в). Размер кадров – 5×5 мм

На рис. 3 показана интенсивность скирмиона (11) и направление поперечных проекций поля скирмиона в виде стрелок, то есть направление поля $\Sigma_x \mathbf{e_x} + \Sigma_y \mathbf{e_y}$. Так как проекции поля скирмиона (14) положительные, то направление стрелок на рис. 3 составляет с горизонтальной осью углы от нуля до 90 градусов. Третья проекция вектора скирмиона Σ_z направлена только вдоль оптической оси. Вблизи оптической оси проекция Σ_z максимальная (стрелки белого цвета) и убывает с ростом расстояния от оптической оси (стрелки чёрного цвета). Распределение 3D-векторов скирмиона (14) похоже на иголки ежика.

Заключение

В работе получены явные выражения для 3D векторных полей двух разных скирмионов на основе двух разновидностей 2D-пучков Пуанкаре. Эти поля скирмионов (14) и (24) описываются положительно определенными функциями и разными номерами (17) и (26), которые зависят от топологических зарядов оптических вихрей, входящих в пучки Пуанкаре. Предложена новая конструктивная формула для расчета номера скирмиона только на основе проекций вектора Стокса (19). Номера скирмионов, рассчитанных по известной формуле (9) и по новой формуле (19), совпадают. Показано, что номера отдельных проекций поля скирмионов равны между собой и равны одной трети от полного номера скирмиона (16), (25).

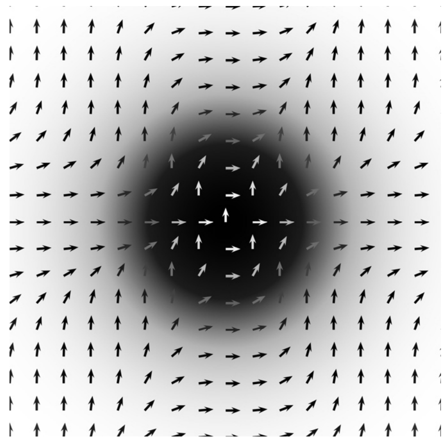

Рис. 3. Распределение интенсивности (белый цвет – ноль, чёрный цвет – максимум) и распределение направления поперечного вектора скирмиона (14) в виде стрелок. 3D-векторы скирмиона имеют вид иголок ежика, направленных только вдоль оптической оси. Угол наклона вектора скирмиона (14) максимальный на оптической оси и убывает с увеличением расстояния от оптической оси: белые стрелки имеют большую проекцию на оптическую ось, чем чёрные стрелки. Размер кадра – 2,5 × 2,5 мм

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-12-00236) в части теории и моделирования и по государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части Введения и Заключения.

References

[1] Skyrme THR. A non-linear field theory. Proc R Soc Lond A 1961; 260(1300): 127-138. DOI: 10.1098/rspa.1961.0018.

[2] Gao S, Speirits FC, Castellucci F, Franke-Arnold S, Barnett SM, Götte JB. Erratum: Paraxial skyrmionic beams [Phys. Rev. A 102, 053513 (2020)]. Phys Rev A 2021; 104(4): 049901. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.049901.

[3] Shen Y, Martínez EC, Rosales-Guzmán C. Generation of optical skyrmions with tunable topological textures. ACS Photonics 2022; 9(1): 296-303. DOI: 10.1021/acsphotonics.1c01703.

[4] Cisowski C, Ross C, Franke-Arnold S. Building paraxial optical skyrmions using rational maps. Adv Photonics Res 2023; 4(4): 2200350. DOI: 10.1002/adpr.202200350.

[5] Gutiérrez-Cuevas R, Pisanty E. Optical polarization skyrmionic fields in free space. J Opt 2021; 23(2): 024004. DOI: 10.1088/2040-8986/abe8b2.

[6] Shen Y, Zhang Q, Shi P, Du L, Yuan X, Zayats AV. Optical skyrmions and other topological quasiparticles of light. Nat Photon 2024; 18(1): 15-25. DOI: 10.1038/s41566-023-01325-7.

[7] Cao S, Du L, Shi P, Yuan X. Topological state transitions of skyrmionic beams under focusing configurations. Opt Express 2024; 32(3): 4167-4179. DOI: 10.1364/OE.514440.

[8] Gao S, Speirits FC, Castellucci F, Franke-Arnold S, Barnett SM, Götte JB. Paraxial skyrmionic beams. Phys Rev A 2020; 102(5): 053513. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.053513.

[9] McWilliam A, Cisowski CM, Ye Z, Speirits FC, Götte JB, Barnett SM, Franke-Arnold S. Topological approach of characterizing optical skyrmions and multi-skyrmions. Laser Photonics Rev 2023; 17(9): 2300155. DOI: 10.1002/lpor.202300155.

[10] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A: Pure Appl Opt 2004; 6(2): 259. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.

[11] Beckley AM, Brown TG, Alonso MA. Full Poincaré beams. Opt Express 2010; 18(10): 10777-10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.

[12] Chen S, Zhou X, Liu Y, Ling X, Luo H, Wen S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere. Opt Lett 2014; 39(18): 5274-5276. DOI: 10.1364/OL.39.005274.

[13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Zaitsev VD. Index of the polarization singularity of Poincare beams. Bull Russ Acad Sci Phys 2022; 86(10): 1158-1163. DOI: 10.3103/S1062873822100112.

[14] Teng H, Zhong J, Chen J, Lei X, Zhan Q. Physical conversion and superposition of optical skyrmion topologies. Photonics Res 2023; 11(12): 2042-2053. DOI: 10.1364/PRJ.499485.

[15] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc R Soc Lond A 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.

[16] Barnett SM, Allen L. Orbital angular momentum and nonparaxial light beams. Opt Commun 1994; 110(5-6): 670-678. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90269-0.

[17] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. Micromachines 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.

[18] Freund I. Poincaré vortices. Opt Lett 2001; 26(24): 1996-1998. DOI: 10.1364/OL.26.001996.

[19] Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams. Opt Commun 2002; 201(4-6): 251-270. DOI: 10.1016/S0030-4018(01)01725-4.

[20] Kotlyar VV, Kovalev AA, Zaitsev VD. Topological charge of light fields with a polarization singularity. Photonics 2022; 9(5): 298. DOI: 10.3390/photonics9050298.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.
E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает ведущим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267.

Телегин Алексей Михайлович, в 2009 году окончил СГАУ с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. Института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение, сенсоры. E-mail: talex85@mail.ru ORCID: 0000-0002-1750-1536.

ГРНТИ: 29.31.15
Поступила в редакцию 15 февраля 2024 г. Окончательный вариант – 2 мая 2024 г.

Skyrmion number for a generalized vector Poincaré beam

V.V. Kotlyar [1,2], *A.A. Kovalev* [1,2], *A.M. Telegin* [2]
[1] *Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",*
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,
[2] *Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

Abstract

We investigate two initial vector Poincaré-type light fields that can be treated as optical skyrmions – topological quasiparticles. For such fields, explicit expressions are obtained for the components of a 3D-vector skyrmionic field in the initial plane as well as for the skyrmion numbers, proportional to the topological charges of the optical vortices constituting the Poincaré beams. A new constructive formula is derived for effective calculation of the skyrmion number via the components of the normalized Stokes vector, rather than via the components of the vector skyrmion field. The skyrmion numbers computed by the well known and new formulae coincide. We also show that each component of the 3D-vector skyrmion field has a number equal to one third of the full skyrmion number. The numerical simulation results are consistent with the theoretical conclusions.

Keywords: quasiparticle, optical skyrmion, Poincaré beam, optical vortex, Stokes vector, skyrmion number.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Skyrmion number for a generalized vector Poincaré beam. Computer Optics 2025; 49(1): 5-12. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1507.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Russian Science Foundation under project No. 23-12-00236 (Theory and Numerical simulation) and within a government project of the NRC "Kurchatov Institute" (Introduction and Conclusion).

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267.

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of the Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: talex85@mail.ru ORCID: 0000-0002-1750-1536.

Received February 15, 2024. The final version – May 2, 2024.