

Общий топологический заряд нескольких одинаковых внеосевых вихревых световых пучков произвольной радиально-симметричной формы

А.А. Ковалёв^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, А.Г. Налимов^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассматривается топологический заряд суперпозиции параллельных одинаковых вихревых пучков произвольной формы – пучков Лагерра–Гаусса или Бесселя–Гаусса или других вихревых пучков с радиально-симметричным распределением интенсивности. Известно, что если фазы всех пучков в суперпозиции одинаковые, то топологический заряд всей суперпозиции равен топологическому заряду отдельного пучка n . В работе показано, что если пучки расположены на окружности и их фазы линейно возрастают на ней так, что разность фаз между соседними пучками на окружности равна $2\pi p / N$, где N – число пучков, p – целое число, то топологический заряд суперпозиции будет равен $n + p$.

Ключевые слова: топологический заряд, суперпозиции параллельных пучков, вихревой пучок.

Цитирование: Ковалёв, А.А. Общий топологический заряд нескольких одинаковых внеосевых вихревых световых пучков произвольной радиально-симметричной формы / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 2. – С. 173-179. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1518.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV, Nalimov AG. Common topological charge of several similar off-axis vortex light beams of arbitrary rotationally symmetric shape. Computer Optics 2025; 49(2): 173-179. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1518.

Введение

Оптические вихри характеризуются орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1] и топологическим зарядом (ТЗ) [2]. Для полей с вращательной симметрией значения ОУМ, нормированного на интенсивность, и ТЗ совпадают. Структурированный свет более общей формы может характеризоваться этими двумя показателями по отдельности, а также другими инвариантными к распространению величинами, такими как спектр угловых гармоник (ОУМ-спектр) [3, 4], частичный ТЗ [5], моменты ОУМ высших порядков [6].

Существует масса работ по измерению ТЗ стандартных оптических и акустических вихрей с вращательной симметрией [7–11], но для пучков произвольной формы он должен измеряться согласно определению М.В. Берри [2], как, например, в [12] с помощью Шака–Гартмана. В отличие от ОУМ и ОУМ-спектра, ТЗ является трудно измеримой величиной, поскольку он зависит от распределения фазы в периферийной части пучка. Но его преимуществом является дискретность, то есть скачкообразное изменение при достижении искажениями определённого уровня. Поэтому ТЗ структурированных пучков продолжает изучаться и в настоящее время.

Например, в работе [13] рассмотрены и сформированы внеосевые двухвихревые пучки. Исследовано изменение их формы при увеличении расстояния

между вихрями. С помощью наклонной линзы определён ТЗ таких внеосевых двухвихревых пучков. Продемонстрировано, что их ТЗ не только зависит от величины азимутальных индексов обеих фазовых сингулярностей, но и от их знаков. Также показано, что наклонная линза позволяет определить пространственное распределение вихрей.

В работах [14, 15] исследуется ТЗ в дальней зоне оптических вихрей дробного порядка. Эта работа является продолжением работ [16–18] по исследованию ТЗ дробных вихрей в дальней зоне, но изучает также переходные кривые между двумя целыми значениями ТЗ, которые, как показано в работе, зависят также от радиуса перетяжки вихревого пучка.

Кроме исследований ТЗ и ОУМ различных световых полей и способов их измерений, встречались работы, в которых показано, как эти характеристики можно использовать для оптических вычислений [19, 20].

В наших работах также было показано, как можно выполнять простейшие арифметические операции над ТЗ. В [21] показано, что при сложении пучка Лагерра–Гаусса с внеосевым гауссовым пучком ТЗ суперпозиции равен ТЗ пучка Лагерра–Гаусса, делённому на два (целочисленное деление). В [22] показано, что, подбирая фазовую задержку между параллельными пучками Лагерра–Гаусса, можно сделать ТЗ такой суперпозиции равным ТЗ каждого отдельного пучка, но увеличенного или уменьшенного на еди-

ницу. При этом пучки располагались в поперечной плоскости на окружности. Существуют работы, в которых изучались вихревые пучки, формируемые из массива гауссовых пучков, между которыми также задавалась фазовая задержка [23–25]. В [23, 24] рассмотрена суперпозиция пучков из гексагональной матрицы волоконных лазеров и сравнивается динамика распространения синтезированного вихревого пучка с пучком ЛГ как в свободном пространстве, так и в турбулентной атмосфере. В [25] гауссовы пучки располагались на окружности, и для такой суперпозиции получено общее выражение для комплексной амплитуды. Это выражение использовалось для расчёта распределений интенсивности и фазы и по ним определялось формирование оптического вихря, но аналитически по полученной формуле порядок вихря не устанавливался.

В работе [26] рассматривается массив уже не гауссовых пучков, а однокольцевых пучков ЛГ, оси которых расположены на поверхности гиперboloида вращения. Формировать такие массивы одинаковых пучков можно, например, методом когерентного объединения пучков [27]. Получена общая формула для ОУМ, и анализируются её частные случаи. В [26] показано, что ОУМ может иметь сколь угодно большие значения, ограниченные плотностью вихрей, но ТЗ всей суперпозиции в этой работе не рассматривался. В работе [28] также рассматривается массив однокольцевых пучков ЛГ, оси которых расположены на поверхности гиперboloида вращения. Для такого массива изучалась центральная критическая точка (центральный вихрь) и его ТЗ, однако общий ТЗ всего поперечного распределения не рассматривался и, кроме того, исследовалась суперпозиция только пучков ЛГ и только с одним кольцом. В [29] также исследуются массивы одинаковых пучков, но уже векторных и сформированных внутри лазерного резонатора. Рассматриваемые семейства конструируются из нескольких лучеподобных траекторий с волновыми свойствами. Такие поля обладают четырьмя степенями свободы и могут преобразовываться в вихревые пучки с большим значением ОУМ, с несколькими сингулярностями, или в винтовые звёздообразные структуры. Для изучения поляризационных сингулярностей и топологической фазы таких полей рассматривается распределение двух фазовых параметров: $\arctg(|E_x|/|E_y|)$ и $\arg(E_x/E_y)$, где E_x и E_y – составляющие поля, хотя интегральные характеристики этих величин для всего поля, такие как ОУМ или ТЗ, аналитически не устанавливаются.

В данной работе исследуется суперпозиция произвольных внеосевых оптических вихрей, не обязательно Лагерра–Гаусса. Для таких суперпозиций показано, что подбор фазовых задержек между ними также позволяет менять ТЗ и, кроме того, в случае увеличения числа составляющих пучков ТЗ можно менять на большие значения, увеличивая его на 2, 3 или 4. Теоретическое доказательство изменения ТЗ проведено для дальней зоны

дифракции, но теоретические значения ТЗ подтверждены численно и для ближней зоны.

1. Топологический заряд суперпозиции одинаковых параллельных вихревых пучков в дальней зоне дифракции

Комплексная амплитуда суперпозиции одинаковых параллельных вихревых пучков в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n A \left\{ \left[(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 \right]^{1/2} \right\} \times \exp \left\{ im \arg \left[(x - a_n) + i(y - b_n) \right] \right\}, \quad (1)$$

где (x, y) – декартовы координаты в начальной плоскости, N – число пучков в суперпозиции, m – ТЗ каждого отдельного вихревого пучка, (a_n, b_n) – декартовы координаты центра n -го пучка, A – функция от радиальной полярной координаты, задающая профиль пучка (Лагерра–Гаусса, Бесселя–Гаусса, и др.), c_n – весовые коэффициенты суперпозиции, то есть $|c_n|$ задаёт амплитуду n -го составляющего пучка, а $\arg c_n$ – его начальную фазу.

В дальней зоне дифракции комплексная амплитуда с точностью до постоянного множителя описывается преобразованием Фурье [30] от начальной амплитуды:

$$E(x, y, z \gg z_0) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y', 0) \times \exp \left[-i \frac{k}{z} (xx' + yy') \right] dx' dy', \quad (2)$$

где z_0 – некоторое расстояние, условно разделяющее ось распространения на ближнюю и дальнюю зоны дифракции, например расстояние Рэлея для световых полей с гауссовой огибающей.

Подставив (1) в (2) и учитывая свойство преобразования Фурье от смещённых функций, получим:

$$E(x, y, z \gg z_0) = \frac{-ik}{2\pi z} \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp \left[-i \frac{k}{z} (a_n x + b_n y) \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} \right) \times \exp \left[im \arg (x' + iy') - i \frac{k}{z} (xx' + yy') \right] dx' dy'. \quad (3)$$

Перейдём к полярным координатам и в начальной плоскости, и в дальней зоне:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ x' &= r' \cos \varphi', \\ y' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда после вычисления интеграла по угловой полярной координате в начальной плоскости φ' , преобразование (3) примет вид:

$$E(r, \varphi, z \gg z_0) = (-i)^{m+1} \frac{k}{z} \times \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp \left[-i \frac{k}{z} r (a_n \cos \varphi + b_n \sin \varphi) \right] \times \exp(im\varphi) \int_0^\infty A(r') J_m \left(\frac{k}{z} r' r \right) r' dr'. \quad (5)$$

Отсюда видно, что комплексная амплитуда всей суперпозиции в дальней зоне равна комплексной амплитуде одного составляющего вихревого пучка в дальней зоне E_{vortex} , умноженной на комплексную амплитуду суперпозиции плоских волн E_{plane} :

$$E(r, \varphi, z \gg z_0) = E_{\text{vortex}}(r, \varphi, z \gg z_0) E_{\text{plane}}(r, \varphi, z \gg z_0), \quad (6)$$

где

$$E_{\text{vortex}}(r, \varphi, z \gg z_0) = (-i)^{m+1} \frac{k}{z} \exp(im\varphi) \int_0^\infty A(r') J_m \left(\frac{k}{z} r' r \right) r' dr', \quad (7)$$

$$E_{\text{plane}}(r, \varphi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp \left[-i \frac{k}{z} r (a_n \cos \varphi + b_n \sin \varphi) \right]. \quad (8)$$

Тогда топологический заряд суперпозиции равен сумме топологического заряда одного составляющего пучка m и топологического заряда суперпозиции плоских волн (8) TC_{plane} :

$$TC = m + TC_{\text{plane}}. \quad (9)$$

Такое разделение общего ТЗ на ТЗ отдельного пучка и ТЗ некоторой суперпозиции плоских волн стало возможным именно благодаря рассмотрению поля в дальней зоне дифракции. При распространении поля до дальней зоны есть ещё зона дифракции Френеля. Для этой зоны мы не смогли найти общий ТЗ суперпозиции (1) аналитически. Однако в [5] доказано сохранение ТЗ при распространении, даже если интенсивность поля при распространении меняется. Поэтому далее мы с помощью (9) установим ТЗ аналитически для дальней зоны, а верность его значения для зоны Френеля проверим расчётами при численном моделировании.

Найдём далее этот добавочный топологический заряд в простом частном случае, когда $c_n = \exp(i2\pi n/N)$, $a_n = r_0 \cos(2\pi n/N)$, $b_n = r_0 \sin(2\pi n/N)$. В этом случае вихревые пучки располагаются равномерно на окружности и их фазы растут вдоль этой окружности линейно (рис. 1).

Такое поле в дальней зоне имеет вид:

$$E_{\text{plane}}(r, \varphi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[i2\pi \frac{pn}{N} - i \frac{k}{z} r_0 r \cos \left(\varphi - \frac{2\pi n}{N} \right) \right]. \quad (10)$$

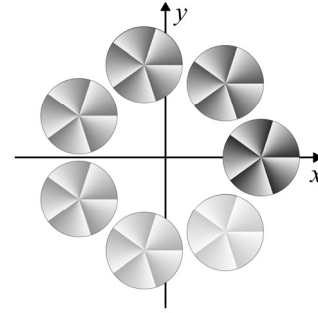


Рис. 1. Суперпозиция нескольких оптических вихрей на окружности, начальная фаза которых (показана цветом: яркий цвет – 0, бледный цвет – 2π) линейно возрастает вдоль этой окружности

Нетрудно доказать (Приложение А) следующее свойство симметрии для суперпозиции плоских волн (10):

$$E_{\text{plane}}(r, -\varphi \pm \pi, z \gg z_0) = E_{\text{plane}}^*(r, \varphi, z \gg z_0). \quad (11)$$

Это означает, что для любого оптического вихря найдётся симметричный другой оптический вихрь с противоположным топологическим зарядом. Поэтому все внеосевые вихри в поле E_{plane} компенсируют друг друга и не влияют на общий топологический заряд всей суперпозиции плоских волн. Не компенсируется только центральный вихрь на оптической оси. Чтобы определить его топологический заряд, разложим суперпозицию плоских волн в степенной ряд:

$$E_{\text{plane}}(r, \varphi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(i2\pi \frac{pn}{N} \right) \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-i \frac{k}{z} r_0 r \right)^s \cos^s \left(\varphi - \frac{2\pi n}{N} \right). \quad (12)$$

Представив косинусы степени s в виде биномов Ньютона от суммы двух экспонент, а также учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp \left(i2\pi \frac{pn}{N} \right) = N \delta_p, \quad (13)$$

где $\delta_p = 1$ при $p = 0, N, 2N, \dots$ и $\delta_p = 0$ при других значениях p , преобразуем формулу (12) к виду:

$$E_{\text{plane}}(r, \varphi, z \gg z_0) = N \sum_{s=0}^{\infty} \left(-i \frac{k}{2z} r_0 r \right)^s \times \sum_{t=0}^s \frac{\delta_{p-2t+s}}{t!(s-t)!} \exp \left[i(2t-s)\varphi \right]. \quad (14)$$

Отсюда видно, что в данной сумме не равны нулю слагаемые, которые описывают оптические вихри с топологическим зарядом p . Из-за цикличности значений δ_p в сумме (14) могут быть не равны нулю и другие слагаемые, которые содержат оптические вихри с топологическими зарядами $p \pm N, p \pm 2N, \dots$, но их вклад убывает из-за коэффициентов $1/[t!(s-t)!]$. Поэтому топологический заряд всей суперпозиции должен быть равен

$$TC = m + p. \quad (15)$$

По этой причине параметр p будем называть приращением топологического заряда.

Заметим, что если поле состоит из оптических вихрей, расположенных на нескольких кольцах, подобно нескольким гексагональным кольцам в [23], то оно описывается суммой нескольких слагаемых вида (10). Каждое из этих слагаемых обладает симметрией (11) и имеет центральный оптический вихрь с ТЗ (15). Поэтому, как показано в [23], число колец с вихрями влияет на вид формируемого вихревого пучка, но общий ТЗ всей суперпозиции с изменением числа колец не меняется и равен (15).

Далее путём численного расчёта проверим формулу (15) для нескольких различных световых полей.

2. Численное моделирование

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы нескольких суперпозиций из восьми пучков Лагерра–Гаусса 7-го порядка с разным приращением топологического заряда от -2 до $+3$.

Расчёт топологического заряда проводился по окружности большого радиуса ($R = 30$ мм), чтобы охватить всю область существенной интенсивности. При расчёте были получены следующие значения: $4,9455 \approx 5$ (рис. 2а, з), $5,9333 \approx 6$ (рис. 2б, д), $6,9218 \approx 7$ (рис. 2в, е), $7,9103 \approx 8$ (рис. 2ж, к), $8,8988 \approx 9$ (рис. 2з, л), $9,8870 \approx 10$ (рис. 2и, м). Таким образом, во всех случаях подтвердилось значение топологического заряда, равное $TC = m + p$.

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы нескольких суперпозиций из восьми пучков Бесселя–Гаусса также 7-го порядка и с такими же приращениями топологического заряда от -2 до $+3$, что и на рис. 2.

При расчёте топологического заряда по той же окружности, что и для рис. 2, были получены следующие значения: $4,9171 \approx 5$ (рис. 3а, з), $5,8991 \approx 6$ (рис. 3б, д), $6,8818 \approx 7$ (рис. 3в, е), $7,8645 \approx 8$ (рис. 3ж, к), $8,8472 \approx 9$ (рис. 3з, л), $9,8297 \approx 10$ (рис. 3и, м). Таким образом, и для пучков Бесселя–Гаусса во всех случаях подтвердилось значение топологического заряда, равное $TC = m + p$.

Далее определим, влияет ли на топологический заряд расстояние между пучками. Для этого увеличим расстояние от их центров до оптической оси a_0 .

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы нескольких суперпозиций из восьми пучков Лагерра–Гаусса и Бесселя–Гаусса при расстоянии от пучков до оптической оси, равном $a_0 = 8w_0$ (на рис. 2 и $3 a_0 = 3w_0$).

При расчёте топологического заряда были получены следующие значения: $9,9256 \approx 10$ (рис. 4а, з), $7,9425 \approx 8$ (рис. 4б, д), $8,8911 \approx 9$ (рис. 4в, е). Таким образом, у суперпозиции пучков, более удалённых от оптической оси, топологический заряд также получился равным $TC = m + p$.

Рассчитаем теперь ТЗ для поля с двумя кольцами оптических вихрей. На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы суперпозиции шестнадцати пучков Лагерра–Гаусса, расположенных по восемь на двух кольцах с радиусами $a_{01} = 5w_0$ и $a_{02} = 10w_0$.

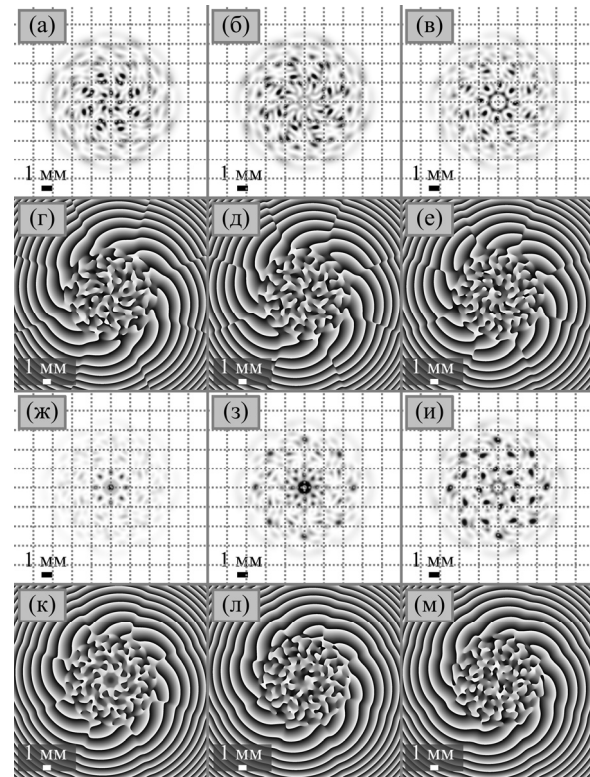


Рис. 2. Распределения интенсивности (негатив) (а–в, ж–и) и фазы (г–е, к–м) суперпозиций пучков Лагерра–Гаусса при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, радиальный и азимутальный индексы каждого отдельного пучка Лагерра–Гаусса $q = 2$ и $t = 7$, число пучков $M = 8$, расстояние центров пучков от оптической оси $a_0 = 3w_0 = 3$ мм, расстояние распространения $z = z_0/2$, приращение топологического заряда $p = -2$ (а, з), -1 (б, д), 0 (в, е), $+1$ (ж, к), $+2$ (з, л), $+3$ (и, м)

В ближней зоне дифракции (рис. 5а, з) отчетливо видны пучки ЛГ на внешнем кольце и хорошо видны центральные тёмные области пучков ЛГ на внутреннем кольце. При переходе из ближней зоны к дальней на расстоянии Рэлея (рис. 5б, д) можно разглядеть пучки ЛГ на внешнем кольце, но пучки ЛГ на внутреннем кольце уже не различимы из-за интерференции. В дальней зоне (рис. 5в, е) из-за интерференции уже нельзя разглядеть пучки ЛГ ни на внутреннем кольце, ни на внешнем.

Несмотря на радикальное изменение дифракционной картины, во всех трёх плоскостях были получены примерно одинаковые значения топологического заряда: $8,9512 \approx 9$ (рис. 5а, з), $8,9172 \approx 9$ (рис. 5б, д), $8,9473 \approx 9$ (рис. 5в, е). Таким образом, у суперпозиции пучков, расположенных на двух кольцах, топологический заряд также получился равным $TC = m + p$.

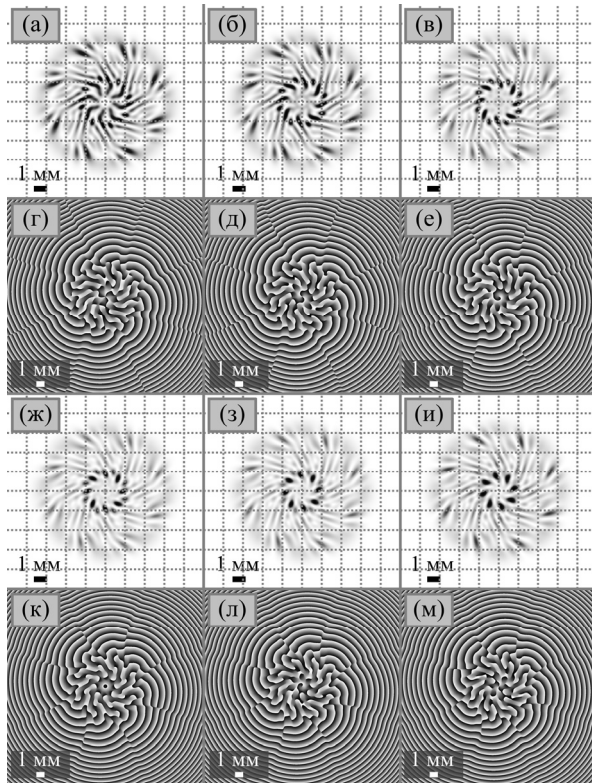


Рис. 3. Распределения интенсивности (негатив) (а–в, ж–и) и фазы (г–е, к–м) суперпозиций пучков Бесселя–Гаусса при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, масштабирующий множитель и топологический заряд каждого отдельного пучка Бесселя–Гаусса $\alpha = k/2000$ и $t = 7$, число пучков $M = 8$, расстояние центров пучков от оптической оси $a_0 = 3w_0 = 3$ мм, расстояние распространения $z = z_0/2$, приращение топологического заряда $p = -2$ (а, г), -1 (б, д), 0 (в, е), $+1$ (ж, к), $+2$ (з, л), $+3$ (и, м)

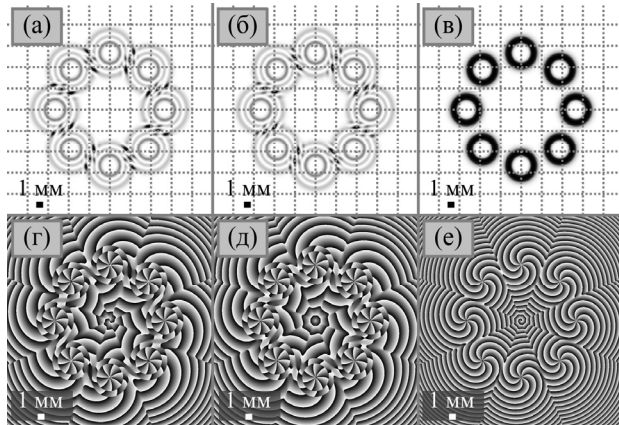


Рис. 4. Распределения интенсивности (негатив) (а–в) и фазы (г–е) суперпозиций пучков Лагерра–Гаусса (а, б, г, д) и Бесселя–Гаусса (в, е) при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, радиальный индекс пучков Лагерра–Гаусса $q = 2$, масштабирующий множитель пучков Бесселя–Гаусса $\alpha = k/2000$, топологический заряд каждого отдельного пучка в суперпозиции $t = 7$, число пучков $M = 8$, расстояние центров пучков от оптической оси $a_0 = 8w_0 = 8$ мм, расстояние распространения $z = z_0/2$, приращение топологического заряда $p = 3$ (а, г), 1 (б, д), 2 (в, е)

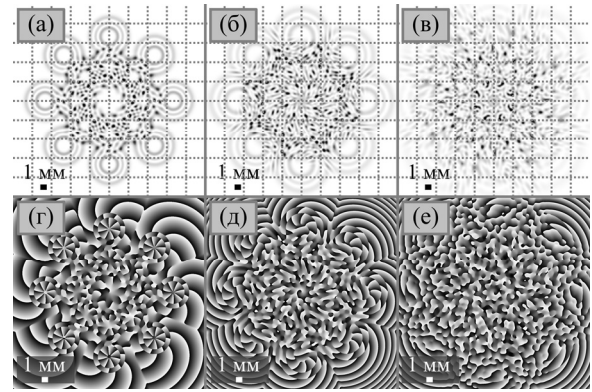


Рис. 5. Распределения интенсивности (негатив) (а–в) и фазы (г–е) суперпозиции пучков Лагерра–Гаусса, расположенных на двух кольцах, при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, радиальный индекс пучков Лагерра–Гаусса $q = 2$, топологический заряд каждого отдельного пучка в суперпозиции $t = 7$, число пучков $M = 2 \times 8 = 16$, расстояние центров пучков от оптической оси $a_{01} = 5w_0 = 5$ мм (первое кольцо) и $a_{02} = 10w_0 = 10$ мм (второе кольцо), приращение топологического заряда $p = 2$, расстояние распространения $z = z_0/5$ (а, г) (ближняя зона), $z = z_0$ (б, д), $z = 2z_0$ (в, е) (дальняя зона)

Заключение

В данной работе мы рассмотрели топологический заряд суперпозиции нескольких параллельных оптических вихрей, радиальное распределение которых может быть произвольным. Для дальней зоны дифракции было теоретически доказано, что при равномерном расположении вихрей на окружности топологический заряд суперпозиции может отличаться от топологического заряда каждого составляющего вихревого пучка на заданную величину за счёт подбора разности фаз между ними. Топологический заряд любого светового поля не может изменяться при распространении, так как характеризует топологию фазового распределения светового поля, для изменения которой требуются нелинейные преобразования, поэтому указанный выше топологический заряд суперпозиции должен сохраняться и в ближнем поле. И действительно, численное моделирование, проведённое для многокольцевых пучков Лагерра–Гаусса и пучков Бесселя–Гаусса, подтвердило, что формула $TC = t + p$ справедлива и в ближней зоне, на расстоянии от начальной плоскости, в два раза меньшем расстояния Рэлея. Ограничением рассмотренной модели является требование параллельности пучков, то есть невозможность определить общий ТЗ пучков при их некотором наклоне относительно оптической оси. Так, с её помощью нельзя установить ТЗ структурно-устойчивой суперпозиции, аналогичной рассмотренной в [28]. Напротив, универсальностью рассмотренной модели является независимость от формы составляющих вихревых пучков, так как в ней не предполагается, что составляющие пучки являются простейшими однокольцевыми пучками Лагерра–Гаусса.

Установленное свойство суперпозиций параллельных одинаковых оптических вихрей можно использовать в оптической передаче информации при идентификации принимаемых оптических сигналов по топологическому заряду, а также для управления топологическим зарядом комбинированного пучка путём внесения задержки между составляющими пучками.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-12-00137) в части теории и по государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [3] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58(21): 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.
- [4] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
- [5] Kovalev AA, Kotlyar VV, Nalimov AG. Topological charge and asymptotic phase invariants of vortex laser beams. *Photonics* 2021; 8(10): 445. DOI: 10.3390/photonics8100445.
- [6] Le DH, Pal A, Qadeer A, Kleinert M, Kleinert J, Goel S, Khare K, Bhattacharya M. Conservation of extremal ellipticity for coherent single mode Gaussian beams propagating in rotationally invariant media. *Opt Commun* 2022; 503: 127465. DOI: 10.1016/j.optcom.2021.127465.
- [7] Anderson ME, Bigman H, de Araujo LE, Chaloupka JL. Measuring the topological charge of ultrabroadband, optical-vortex beams with a triangular aperture. *J Opt Soc Am B* 2012; 29(8): 1968-1976. DOI: 10.1364/JOSAB.29.001968.
- [8] Vaity P, Banerji J, Singh RP. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. *Phys Lett A* 2013; 377(15): 1154-1156. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.02.030.
- [9] Zhu J, Zhang P, Li Q, Wang F, Wang C, Zhou Y, Wang J, Gao H, Kwek LC, Li F. Measuring the topological charge of orbital angular momentum beams by utilizing weak measurement principle. *Sci Rep* 2019; 9(1): 7993. DOI: 10.1038/s41598-019-44465-z.
- [10] Ge H, Long ZW, Xu XY, Hua JG, Liu Y, Xie BY, Jiang JH, Lu MH, Chen YF. Direct measurement of acoustic spectral density and fractional topological charge. *Phys Rev Appl* 2023; 19(3): 034073. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.19.034073.
- [11] Shikder A, Nishchal NK. Measurement of the fractional topological charge of an optical vortex beam through interference fringe dislocation. *Appl Opt* 2023; 62(10): D58-D67. DOI: 10.1364/AO.476455.
- [12] Wang D, Huang H, Toyoda H, Liu H. Topological charge detection using generalized contour-sum method from distorted donut-shaped optical vortex beams: experimental comparison of closed path determination methods. *Appl Sci* 2019; 9(19): 3956. DOI: 10.3390/app9193956.
- [13] Guo M, Le W, Wang C, Rui G, Zhu Z, He J, Gu B. Generation, topological charge, and orbital angular momentum of off-axis double vortex beams. *Photonics* 2023; 10(4): 368. DOI: 10.3390/photonics10040368.
- [14] Peters E, Funes G, Martínez-León L, Tajahuerce E. Dynamics of fractional vortex beams at Fraunhofer diffraction zone. *Photonics* 2022; 9(7): 479. DOI: 10.3390/photonics9070479.
- [15] Peters E, Funes G, Martínez-León L, Tajahuerce E. Analysis of practical fractional vortex beams at far field. *Opt Laser Technol* 2022; 156: 108480. DOI: 10.1016/j.optlastec.2022.108480.
- [16] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickmann JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. *Opt Lett* 2012; 37(21): 4552-4554. DOI: 10.1364/OL.37.004552.
- [17] Wen J, Wang LG, Yang X, Zhang J, Zhu SY. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. *Opt Express* 2019; 27(4): 5893-5904. DOI: 10.1364/OE.27.005893.
- [18] Kotlyar V, Kovalev A, Nalimov A, Porfirev A. Evolution of a vortex with an initial fractional topological charge. *Phys Rev A* 2020; 102(2): 023516. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023516.
- [19] Akulshin AM, Novikova I, Mikhailov EE, Suslov SA, McLean RJ. Arithmetic with optical topological charges in stepwise-excited Rb vapor. *Opt Lett* 2016; 41(6): 1146-1149. DOI: 10.1364/OL.41.001146.
- [20] Meng F, Wei XG, Qu YJ, Chen Y, Zhang XJ, Kang ZH, Wang L, Wang HH, Gao JY. Arithmetic operation of orbital angular momentum of light via slow-light four-wave mixing. *J Lumin* 2022; 242: 118551. DOI: 10.1016/j.jlumin.2021.118551.
- [21] Kovalev AA, Kotlyar VV, Kozlova ES, Butt MA. Dividing the topological charge of a Laguerre-Gaussian beam by 2 using an off-axis Gaussian beam. *Micromachines* 2022; 13(10): 1709. DOI: 10.3390/mi13101709.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Savelyeva AA. Tailoring the topological charge of a superposition of identical parallel Laguerre-Gaussian beams. *Micromachines* 2022; 13(12): 2227. DOI: 10.3390/mi13122227.
- [23] Aksenov VP, Dudorov VV, Kolosov VV. Properties of vortex beams formed by an array of fibre lasers and their propagation in a turbulent atmosphere. *Quantum Electron* 2016; 46(8): 726. DOI: 10.1070/QEL16088.
- [24] Aksenov VP, Dudorov VV, Kolosov VV, Levitsky ME. Synthesized vortex beams in the turbulent atmosphere. *Front Phys* 2020; 8: 143. DOI: 10.3389/fphy.2020.00143.
- [25] Wang LG, Wang LQ, Zhu SY. Formation of optical vortices using coherent laser beam arrays. *Opt Commun* 2009; 282(6): 1088-1094. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.12.004.
- [26] Izdebskaya Y, Fadeyeva T, Shvedov V, Volyar A. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum. *Opt Lett* 2006; 31(17): 2523-2525. DOI: 10.1364/OL.31.002523.
- [27] Long J, Hou T, Chang Q, Yu T, Su R, Ma P, Ma Y, Zhou P, Si L. Generation of optical vortex lattices by a coherent beam combining system. *Opt Lett* 2021; 46(15): 3665-3668. DOI: 10.1364/OL.425186.
- [28] Izdebskaya Y, Shvedov V, Volyar A. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points. *J Opt Soc Am A* 2008; 25(1): 171-181. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000171.
- [29] Shen Y, Yang X, Naidoo D, Fu X, Forbes A. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica* 2020; 7(7): 820-831. DOI: 10.1364/OPTICA.382994.

[30] Goodman JW. Introduction to Fourier Optics. 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 1996. ISBN: 0-07-024254-2.

Приложение А. Симметрия суперпозиции нескольких плоских волн

Докажем свойство симметрии (3). Для этого рассмотрим поле на луче с угловой полярной координатой $-\varphi \pm \pi$:

$$E_{\text{plane}}(r, -\varphi \pm \pi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[i2\pi \frac{pn}{N} - i \frac{k}{z} r_0 r \cos \left(-\varphi \pm \pi - \frac{2\pi n}{N} \right) \right]. \quad (\text{A1})$$

Воспользуемся чётностью косинуса, формулами приведения, а также сменим диапазон суммирования с $n = 0, \dots, N-1$ на $n = 1, \dots, N$ – это можно сделать, так как слагаемые суммы одинаковы при $n = 0$ и при $n = N$:

$$E_{\text{plane}}(r, -\varphi \pm \pi, z \gg z_0) = \sum_{n=1}^N \exp \left[i2\pi \frac{pn}{N} + i \frac{k}{z} r_0 r \cos \left(\varphi + \frac{2\pi n}{N} \right) \right]. \quad (\text{A2})$$

Далее заменим индекс суммирования с n на $N - n$:

$$E_{\text{plane}}(r, -\varphi \pm \pi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[i2\pi \frac{p(N-n)}{N} + i \frac{k}{z} r_0 r \cos \left(\varphi + \frac{2\pi(N-n)}{N} \right) \right]. \quad (\text{A3})$$

Так как и косинус, и экспонента в (A3) периодичны с периодом 2π , везде можно сократить N в числителе, и потому

$$E_{\text{plane}}(r, -\varphi \pm \pi, z \gg z_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[-i2\pi \frac{pn}{N} + i \frac{k}{z} r_0 r \cos \left(\varphi - \frac{2\pi n}{N} \right) \right], \quad (\text{A4})$$

то есть получилась как раз правая часть (3): $E_{\text{plane}}^*(r, \varphi, z \gg z_0)$.

Сведения об авторах

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает ведущим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267.

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393.

Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству доцентом кафедры технической кибернетики Самарского университета. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов. E-mail: anton@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-0211-7897.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 12 марта 2024 г. Окончательный вариант – 24 апреля 2024 г.

Common topological charge of several similar off-axis vortex light beams of arbitrary rotationally symmetric shape

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, A.G. Nalimov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

²Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

We investigate the topological charge of superposition of parallel identical vortex beams of arbitrary shape – either Laguerre-Gaussian beams or Bessel-Gaussian beams or some other vortex beams with a rotationally symmetric intensity distribution. It is known that if all beams in the superposition are in-phase then the topological charge of the whole superposition is equal to the topological charge of each constituent beam, n . We show that if the beams are arranged on a circle with their phases linearly increasing on this circle, so that the phase difference between the neighboring beams equals $2\pi p/N$, where N is the number of beams and p is integer, then the superposition has the topological charge $n + p$.

Keywords: topological charge, superposition of parallel beams, vortex beam.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV, Nalimov AG. Common topological charge of several similar off-axis vortex light beams of arbitrary rotationally symmetric shape. *Computer Optics* 2025; 49(2): 173-179. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1518.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 22-12-00137 (Theoretical background) and within the government project of the NRC "Kurchatov Institute" (Numerical simulation).

Authors' information

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru. ORCID: 0000-0002-0488-4267.

Victor Victorovich Kotlyar is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393.

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". A.G. Nalimov is a Scientist of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Associate Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: anton@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-0211-7897.

Received March 12, 2024. The final version – April 24, 2024.
