Спиральность пучков Пуанкаре в остром фокусе

С.С. Стафеев [1,2], *В.Д. Зайцев* [1,2]
[1] *Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;*
[2] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34*

Аннотация

В данном исследовании была рассмотрена спиральность пучков Пуанкаре с точки зрения формализма Ричардса–Вольфа. Было показано, что спиральность для пучков Пуанкаре всегда обладает радиальной симметрией и не зависит от азимутального угла пучка. Абсолютная величина спиральности максимальна, когда полярный угол пучка равен нулю или π (полюса на сфере Пуанкаре), и отсутствует, когда он равен $\pi/2$ (экватор на сфере Пуанкаре). Ненулевые значения спиральности на оптической оси наблюдаются для порядков пучка 0, 1 и 2. Если полярный угол пучка равен нулю, интенсивность пучков Пуанкаре с точностью до множителя совпадает со спиральностью.

Ключевые слова: острая фокусировка, формулы Ричардса–Вольфа, спиральность, киральность, пучки Пуанкаре.

Цитирование: **Стафеев, С.С.** Спиральность пучков Пуанкаре в остром фокусе / С.С. Стафеев, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2025. –Т. 49, № 4. – С. 588-592. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1620.

Citation: Stafeev SS, Zaitsev VD. Helicity of Poincaré beams at a sharp focus. Computer Optics 2025; 49(4): 588-592. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1620.

Введение

В настоящее время исследователями по всему миру активно исследуются пучки, поляризация в сечении которых не одинакова – поляризационно неоднородные пучки. Пучки Пуанкаре [1, 2] относятся к поляризационно неоднородным пучкам с радиальной симметрией. При этом частными случаями пучков Пуанкаре являются как пучки с радиальной и азимутальной поляризациями [3], так и оптические вихри (моды Гаусса–Лагерра) с круговой поляризацией [4, 5]. В работе [4] теоретически и численно рассмотрена фокусировка пучков Пуанкаре с помощью формализма Ричардса–Вольфа. Было показано, что пучки Пуанкаре демонстрируют в фокусе ряд уникальных явлений, таких как наличие обратного потока энергии [6] и спин-орбитальная конверсия [7]. Для некоторых частных случаев пучков Пуанкаре в фокусе можно наблюдать поляризационные ленты Мёбиуса [8]. Производить пучки Пуанкаре можно интерферометрически [5], с помощью пространственного модулятора света [9, 10] или метаповерхностей [11].

Возможность более тонко манипулировать электрической и магнитной составляющими в структурированных пучках подстегнула исследования по взаимодействию таких пучков с веществом, в частности, исследования связи киральности вещества со спиральностью света [12]. В работе [13] Д. Липкин впервые вводит следующую величину:

$$C = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{H}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Опираясь на уравнения Максвелла, он показывает для нее закон сохранения, однако на тот момент не находит ей никакого практического применения. Позднее в работе [14] данной величине (1) дается название «оптическая киральность» и демонстрируется, что она определяет энергию возбуждения малой киральной молекулы, освещаемой светом с ненулевой оптической киральностью. Для молекулы с поляризуемостью $G = G' + iG''$ энергия возбуждения линейно зависит от C:

$$A \sim -\frac{2}{\varepsilon_0}G''C. \tag{2}$$

При этом для монохроматичного излучения с частотой ω выражение (1) преобразовывается к виду:

$$C = -\frac{\omega\varepsilon_0}{2}\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{B}\right), \tag{3}$$

где Im() – мнимая часть комплексной величины, * – знак комплексного сопряжения.

Для разделения двух понятий – киральности вещества и света, при описании величины (1) в ряде работ предлагается перейти к другому термину — спиральность [12, 15, 16]. Нужно также отметить, что в некоторых работах [17] за спиральность ошибочно принимается знак топологического заряда [18].

Спиральность пучков Пуанкаре ранее была рассмотрена в работе [19], где было показано, что в некоторых случаях спиральность наблюдается на оптической оси пучка. Позднее в комментарии [20] к работе [19] были приведены доводы, что исследование [19] ошибочно и нефизично.

В данном исследовании была рассмотрена спиральность пучков Пуанкаре с точки зрения формализма Ричардса–Вольфа. Было показано, что спиральность для пучков Пуанкаре всегда обладает радиальной симметрией и не зависит от азимутального угла пучка. Абсолютная величина спиральности максимальна, когда полярный угол пучка равен нулю или π (полюса на сфере Пуанкаре), и отсутствует, когда он равен π/2 (экватор на сфере Пуанкаре). Ненулевые значения спиральности на оптической оси наблюдаются для порядков пучка 0, 1 и 2. Если полярный угол пучка равен нулю, интенсивность пучков Пуанкаре с точностью до множителя совпадает со спиральностью.

1. Теория

Исследуемые пучки имеют вид [1,2]:

$$\mathbf{E}_P(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ae^{-in\varphi}+be^{in\varphi} \\ iae^{-in\varphi}-ibe^{in\varphi}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $a=\cos(\theta/2)e^{-i\psi/2}$, $b=\sin(\theta/2)e^{i\psi/2}$, $a^2+b^2=1$, θ и ψ – полярный и азимутальный углы, задающие положение поляризации на обобщенной сфере Пуанкаре (рис. 1). Полюса сферы Пуанкаре (угол θ равен нулю или π) соответствуют оптическим вихрям с круговой поляризацией, а экватор (плоскость XY) – цилиндрическим векторным пучкам (пучкам с локально линейной поляризацией).

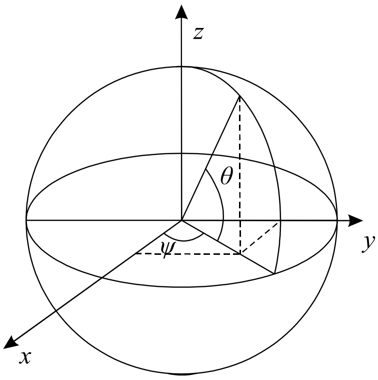

Рис. 1. Сфера Пуанкаре

В работе [4] с помощью формализма Ричардса–Вольфа [21] были получены формулы для расчета всех компонент напряженности электрического и магнитного полей в фокусе пучка Пуанкаре:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}}\Big[\left(ae^{-in\varphi}+be^{in\varphi}\right)I_{0,n}+\left(ae^{-i(n-2)\varphi}+be^{i(n-2)\varphi}\right)I_{2,n-2}\Big],\\
E_y &= \frac{i^{n}}{\sqrt{2}}\Big[\left(ae^{-in\varphi}-be^{in\varphi}\right)I_{0,n}-\left(ae^{-i(n-2)\varphi}-be^{i(n-2)\varphi}\right)I_{2,n-2}\Big],\\
E_z &= \sqrt{2}i^{n}\left(ae^{-i(n-1)\varphi}+be^{i(n-1)\varphi}\right)I_{1,n-1},\\
H_x &= \frac{i^{n}}{\sqrt{2}}\Big[\left(be^{in\varphi}-ae^{-in\varphi}\right)I_{0,n}+\left(be^{i(n-2)\varphi}-ae^{-i(n-2)\varphi}\right)I_{2,n-2}\Big],\\
H_y &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{2}}\Big[\left(be^{in\varphi}+ae^{-in\varphi}\right)I_{0,n}-\left(be^{i(n-2)\varphi}+ae^{-i(n-2)\varphi}\right)I_{2,n-2}\Big],\\
H_z &= \sqrt{2}i^{n+1}\left(be^{i(n-1)\varphi}-ae^{-i(n-1)\varphi}\right)I_{1,n-1},
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{\nu,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\int\limits_0^{\theta_0}\sin^{\nu+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{3-\nu}\left(\frac{\theta}{2}\right)T(\theta)\times\\
&\times A(\theta)e^{ikz\cos\theta}J_\mu(x)d\theta,
\end{aligned} \tag{6}$$

f – фокусное расстояние, λ – длина волны фокусируемого света, $NA=\sin\theta_0$ – числовая апертура линзы, $J_\mu(x)$ – функция Бесселя порядка μ, $x=kr\sin\theta$, (r, φ, z) – цилиндрические координаты, $T(\theta)$ – функция аподизации линзы. Будем далее рассматривать распределение компонент электрического и магнитного полей в фокусе при $z=0$, для этого случая интеграл (6) принимает вещественные значения. Спиральность в фокусе будем вычислять по формуле (3), при этом в дальнейшем будем опускать множитель, стоящий перед мнимой частью в выражении (3), но будем учитывать знак.

Подставив уравнения (5) в (3), получим следующее выражение для спиральности пучков Пуанкаре в фокальной плоскости ($z=0$):

$$\eta=\cos\theta\left(I_{0,n}^2+I_{2,n-2}^2+2I_{1,n-1}^2\right). \tag{7}$$

Из уравнения (7) видно, что, во-первых, спиральность для пучков Пуанкаре всегда обладает радиальной (осевой) симметрией, она зависит от полярного угла θ, но не зависит от азимутального угла ψ пучка (4). Во-вторых, спиральность максимальна при $\theta=0$, такой пучок соответствует оптическому вихрю с топологическим зарядом $-n$ и правой круговой поляризацией $(\mathbf{x}+i\mathbf{y})$, спиральность минимальна при $\theta=\pi$. Минимальное и максимальное значение спиральности соответствуют полюсам на сфере Пункаре (рис. 1). В-третьих, спиральность отсутствует при $\theta=\pi/2$ – экватор на сфере Пуанкаре (этому углу, в частности, соответствуют радиальная и азимутальная поляризации [3], а также неоднородная цилиндрическая поляризация высокого порядка [22]). Данный вывод подтверждается результатами работы [23]. В-четвертых, для порядков пучка $n=0$, 1 и 2 будут наблюдаться ненулевые значения спиральности на оптической оси (второй индекс в интеграле (6) соответствует порядку функции Бесселя в подынтегральном выражении). Нужно также отметить, что последнее слагаемое в (7) соответствует слагаемому $E_z^* H_z$ в (3) и оказывает влияние на суммарную спиральность только в случае больших числовых апертур. Так как максимум функции Бесселя $J_1(x)$ смещен относительно оптической оси, то влияние слагаемого $2I_{1,n-1}^2$ будет в уширении пятна спиральности в фокусе.

В работе [4] было найдено выражение для расчета интенсивности пучков Пуанкаре, которое имело вид:

$$\begin{aligned} I(r,\varphi) &= \left|E_x\right|^2 + \left|E_y\right|^2 + \left|E_z\right|^2 = \\ &= I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{1,n-1}^2 + \\ &+ 2\sin\theta\cos\left(2(n-1)\varphi+\psi\right)\left(I_{0,n}I_{2,n-2} + 2I_{1,n-1}^2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) следует, что в общем случае интенсивность обладает центральной симметрией, а при $n=1$ или $\theta=0$ – еще и осевой симметрией. Из сравнения (7) и (8) видно, что при $\theta=0$ интенсивность пучков Пуанкаре совпадает со спиральностью.

2. Моделирование

Ниже показаны результаты моделирования острой фокусировки пучка Пуанкаре (4) с длиной волны $\lambda=633$ нм и плоским волновым фронтом апланатическим объективом ($T(\theta)=\cos^{1/2}\theta$) с числовой апертурой $NA=0{,}95$. Для некоторых частных случаев пучка распределение спиральности приведено на рисунках ниже. В частности, на рис. 2 показан результат фокусировки пучка Пуанкаре с параметрами $n=0$, $\psi=0$, $\theta=0$ (северный полюс на сфере Пуанкаре). В данном случае интенсивность совпадает со спиральностью. На рис. 3 показано распределение интенсивности при фокусировке пучка с параметрами $n=0$, $\psi=0$, $\theta=\pi/2$ (точка экватора на сфере Пуанкаре), спиральность при таких параметрах отсутствует. На рис. 4 показан результат фокусировки пучка (4) для $n=0$, $\psi=\pi/4$, $\theta=\pi/4$. Интенсивность и спиральность при этих параметрах не совпадают. Пятно спиральности имеет радиально-симметричный вид, в то время как интенсивность имеет вид эллиптичного пятна – за эллиптичную форму и поворот пятна отвечает наличие множителя $\cos(2(n-1)\varphi+\psi)$ в формуле (8). При этом эллиптичность интенсивности становится заметной только в условиях острой фокусировки света, поэтому расхождения в формах спиральности и интенсивности также могут быть объяснены влиянием большой числовой апертуры. На рис. 5 показано влияние топологического заряда вихря пучка n на спиральность. Были рассмотрены порядки $n=1$ и 3, полярный угол был равен нулю (т.е. спиральность совпадала с интенсивностью).

Из рис. 4 и 5 видно, что спиральность имеет ненулевые значения на оси, если порядок пучка n равен нулю или единице, и нулевая для порядка, равного трем. Данное моделирование также согласуется с уравнением (7).

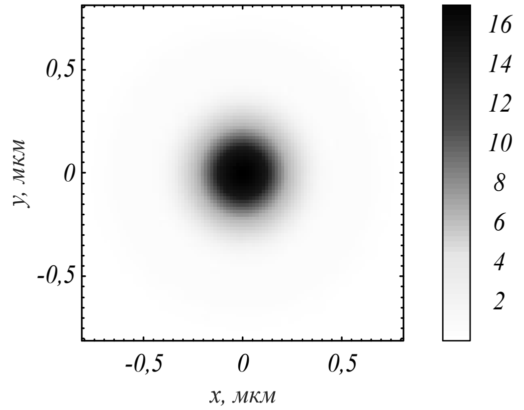

Рис. 2. Интенсивность (совпадает со спиральностью) для пучка Пуанкаре (4) с параметрами n = 0, ψ = 0, θ = 0

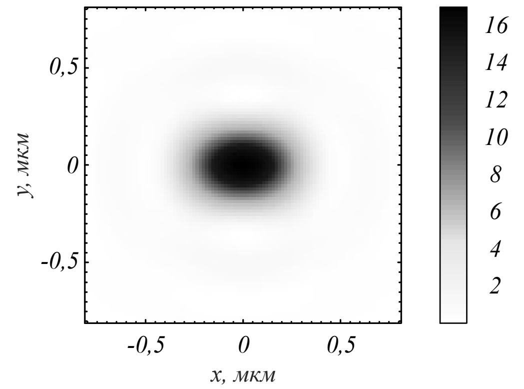

Рис. 3. Интенсивность (спиральность отсутствует) для пучка Пуанкаре (4) с параметрами n = 0, ψ = 0, θ = π / 2

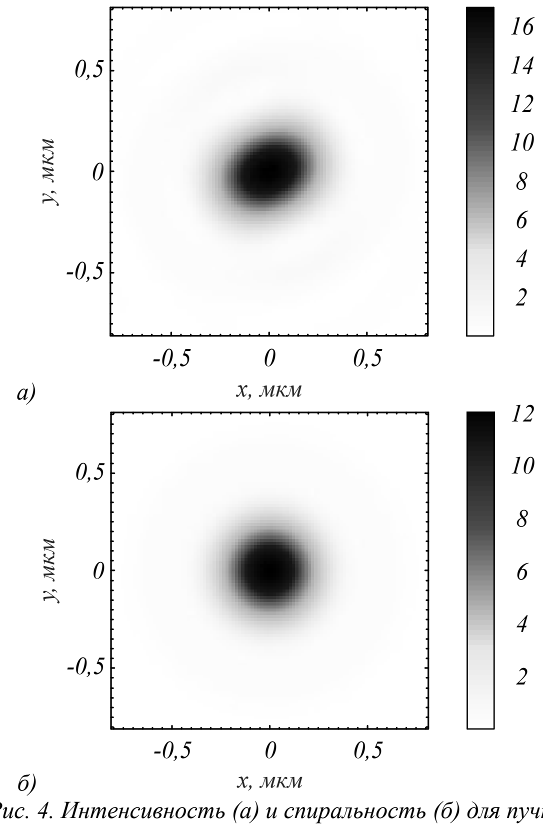

Рис. 4. Интенсивность (а) и спиральность (б) для пучка Пуанкаре (4) с параметрами n = 0, ψ = π / 4, θ = π / 4

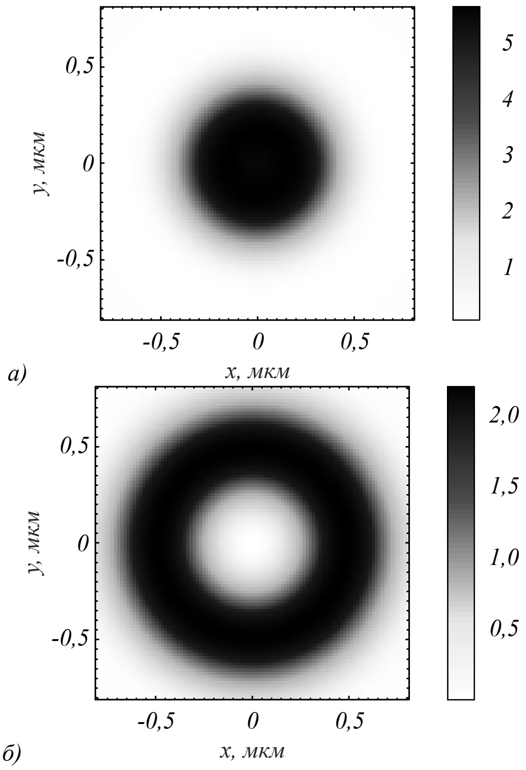

Рис. 5. Спиральность для пучков Пуанкаре (4) с параметрами n = 1 (а) и n = 3 (б) (ψ = 0, θ = 0)

Заключение

В работе теоретически и численно с помощью формализма Ричардса–Вольфа была рассмотрена спиральность в острофокусированных пучках Пуанкаре. Было показано, что спиральность для пучков Пуанкаре всегда обладает радиальной симметрией. Спиральность максимальна при $\theta=0$ (северный полюс на сфере Пуанкаре), минимальна при $\theta=\pi$ (южный полюс на сфере Пуанкаре) и отсутствует при $\theta=\pi/2$ (экватор на сфере Пуанкаре). Ненулевые значения спиральности на оптической оси наблюдаются для порядков пучка $n=0$, 1 и 2. При $\theta=0$ интенсивность пучков Пуанкаре совпадает со спиральностью.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00236 (в части теории) и в рамках Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» (в части моделирования).

References

[1] Beckley AM, Brown TG, Alonso MA. Full Poincaré beams. Opt Express 2010; 18(10): 10777-10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.
[2] Chen S, Zhou X, Liu Y, Ling X, Luo H, Wen S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere. Opt Lett 2014; 39(18): 5274-5276. DOI: 10.1364/OL.39.005274.
[3] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. Adv Opt Photonics 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
[4] Kotlyar VV, Stafeev SS, Zaitsev VD, Telegin AM. Poincaré beams at the tight focus: Inseparability, radial spin hall effect, and reverse energy flow. Photonics 2022; 9(12): 969. DOI: 10.3390/photonics9120969.
[5] Galvez EJ, Khadka S, Schubert WH, Nomoto S. Poincaré-beam patterns produced by nonseparable superpositions of Laguerre–Gauss and polarization modes of light. Appl Opt 2012; 51(15): 2925-2934. DOI: 10.1364/AO.51.002925.
[6] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Energy backflow in the focus of a light beam with phase or polarization singularity. Phys Rev A 2019; 99: 033840. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.033840.
[7] Leyder C, Romanelli M, Karr JP, Giacobino E, Liew TCH, Glazov MM, Kavokin AV, Malpuech G, Bramati A. Observation of the optical spin Hall effect. Nat Phys 2007; 3: 628-631. DOI: 10.1038/nphys676.
[8] Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM, Kozlova ES. Polarization strips in the focus of a generalized Poincaré beam. Photonics 2024; 11(5): 430. DOI: 10.3390/photonics11050430.
[9] Li D, Feng S, Nie S, Chang C, Ma J, Yuan C. Generation of arbitrary perfect Poincaré beams. J Appl Phys 2019; 125(7): 073105. DOI: 10.1063/1.5079850.
[10] Gu Z, Yin D, Gu F, Zhang Y, Nie S, Feng S, Ma J, Yuan C. Generation of concentric perfect Poincaré beams. Sci Rep 2019; 9: 15301. DOI: 10.1038/s41598-019-50705-z.
[11] Liu M, Huo P, Zhu W, Zhang C, Zhang S, Song M, Zhang S, Zhou Q, Chen L, Lezec HJ, Agrawal A, Lu Y, Xu T. Broadband generation of perfect Poincaré beams via dielectric spin-multiplexed metasurface. Nat Commun 2021; 12: 2230. DOI: 10.1038/s41467-021-22462-z.
[12] Bliokh KY, Kivshar YS, Nori F. Magnetoelectric Effects in Local Light-Matter Interactions. Phys Rev Lett 2014; 113: 033601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.033601.
[13] Lipkin DM. Existence of a new conservation law in electromagnetic theory. J Math Phys 1964; 5(5): 696-700. DOI: 10.1063/1.1704165.
[14] Tang Y, Cohen AE. Optical chirality and its interaction with matter. Phys Rev Lett 2010; 104: 163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.163901.
[15] Mun J, Kim M, Yang Y, Badloe T, Ni J, Chen Y, Qiu CW, Rho J. Electromagnetic chirality: from fundamentals to nontraditional chiroptical phenomena. Light Sci Appl 2020; 9: 139. DOI: 10.1038/s41377-020-00367-8.
[16] Abujetas DR, Sánchez-Gil JA. Spin angular momentum of guided light induced by transverse confinement and intrinsic helicity. ACS Photonics 2020; 7(2): 534-545. DOI: 10.1021/acsphotonics.0c00064.
[17] Lin S, Wang D, Zheng Y, Guo L, Zhang Y, Zhuang Y, Huang L. Helicity and topological charge tunable optical vortex based on a Hermite-Gaussian beam dynamically controlled folded-cavity resonator. Front Phys 2023; 11: 1192257. DOI: 10.3389/fphy.2023.1192257.
[18] Berry MV, Dennis MR. Phase singularities in isotropic random waves. Proc R Soc London A 2000; 456(2001): 2059-2079. DOI: 10.1098/rspa.2000.0602.
[19] Babiker M, Yuan J, Koksal K, Lembessis VE. The superchirality of vector twisted light. Opt Commun 2024; 554: 130185. DOI: 10.1016/j.optcom.2023.130185.
[20] Forbes KA. Comment on M. Babiker, J. Yuan, K. Koksal, and V. Lembessis, Optics Communications 554, 130185 (2024). Opt Commun 2024; 561: 130499. DOI: 10.1016/j.optcom.2024.130499.
[21] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc R Soc A 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.

[22] Rashid M, Maragò OM, Jones PH. Focusing of high order cylindrical vector beams. J Opt A 2009; 11(6): 065204. DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065204.

[23] Kovalev AA, Kotlyar VV, Telegin AM. Optical helicity of light in the tight focus. Photonics 2023; 10(7): 719. DOI: 10.3390/photonics10070719.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Стафеев Сергей Сергеевич** см. стр. 547 этого номера.

Зайцев Владислав Дмитриевич, 1991 года рождения. В 2020 году окончил магистратуру Самарского государственного университета имени академика С.П. Королёва по специальности «Прикладные математика и физика». Аспирант Самарского национального исследовательского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, метод конечных элементов, диэлектрики. E-mail: *zaicev-vlad@yandex.ru* ORCID: 0000-0002-1243-8208

ГРНТИ: 29.31.15
Поступила в редакцию 30 сентября 2024 г. Окончательный вариант – 22 октября 2024 г.

Helicity of Poincaré beams at the sharp focus

S.S. Stafeev [1,2], V.D. Zaitsev [1,2]
[1] Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",
Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia;
[2]Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara,443086, Russia

Abstract

In this study, helicity of Poincaré beams was considered from the point of view of the Richards-Wolf formalism. It was shown that helicity for Poincaré beams always has radial symmetry and does not depend on the azimuthal angle of the beam. The absolute value of helicity was shown to be maximum when the polar angle of the beam was zero or π, being zero at the angle π/2. Non-zero values of helicity on the optical axis were observed for beam orders of 0, 1, and 2. If the polar angle of the beam was zero, the intensity of Poincaré beams was revealed to coincide with the helicity up to a factor.

Keywords: sharp focusing, Richards-Wolf formulas, helicity, chirality, Poincare beams.

Citation: Stafeev SS, Zaitsev VD. Helicity of Poincaré beams at the sharp focus. Computer Optics 2025; 49(4): 588-592. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1620.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant 23-12-00236 ("Theory" Section) and the government project of the NRC "Kurchatov Institute" ("Numerical Simulation" Section).

Author's information

Sergey Sergeevich Stafeev (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute". Scientific interests: diffractive optics, non-uniform polarization, tight focusing. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Vladislav Dmitrievich Zaitsev (b. 1991) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State University (2020). PhD student of Samara National Research University. Research interests are diffraction optics, finite element method, dielectrics. E-mail: zaicev-vlad@yandex.ru.

Received September 30, 2024. The final version – October 22, 2024