

## Вихревые лазерные пучки, комплексная амплитуда которых пропорциональна произведению двух функций Бесселя

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>3</sup>, А.А. Ковалев<sup>1,2</sup>, Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений, НИЦ "Курчатовский институт",  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34;

<sup>3</sup> Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук,  
443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

Рассмотрены вихревые пучки, комплексная амплитуда которых выражается в виде произведения функции Гаусса и двух функций Бесселя со сложной корневой зависимостью аргументов от цилиндрических координат и постоянного параметра, который определяет вид распределения интенсивности. Такие пучки можно назвать пучками Бесселя–Бесселя–Гаусса. Найден явный вид комплексной амплитуды таких пучков на любом расстоянии от перетяжки. Показано, что пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса обладают аномально большой скоростью вращения: на расстоянии много меньшем длины Рэлея интенсивность поворачивается почти на 45 градусов. Показано также, что с помощью параметра можно управлять величиной топологического заряда пучка Бесселя–Бесселя–Гаусса: с увеличением положительного значения параметра топологический заряд пучка увеличивается скачками на четное число. Рассмотрены еще два других варианта пучков Бесселя–Бесселя–Гаусса.

**Ключевые слова:** функция Бесселя, функция Гаусса, пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Вихревые лазерные пучки, комплексная амплитуда которых пропорциональна произведению двух функций Бесселя / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалев, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 5. – С. 723-732. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1635.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Kozlova ES. Vortex laser beams with complex amplitude proportional to the product of two Bessel functions. Computer Optics 2025; 49(5): 723-732. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1635.

### Введение

Пучки Бесселя [1] и Бесселя–Гаусса [2] известны в оптике с 1987 года. По пучкам Бесселя имеются современные обзоры [3]. До сих пор внимание к ним не ослабевает из-за их широкого применения в задачах наноструктурирования материалов [4–5], манипуляции микрочастицами [6–7], ускорения атомов [8–9], микроскопии [10–11] и беспроводной оптической связи [12–13]. Среди множества пучков Бесселя известны различные модификации. В [14] рассмотрены пучки Бесселя–Гаусса с полуполым номером и аргументом, зависящим квадратично от радиальной переменной. В [15] рассмотрен другой пучок Бесселя с полуполым номером, квадратичным аргументом и конечной энергией, но без гауссовой огибающей. В [16] рассмотрены асимметричные пучки Бесселя–Гаусса, которые близки к рассматриваемым здесь пучкам, но вместо двух «месяцев» их интенсивность имеет вид одного «месяца». В работе [17] пучки Бесселя–Гаусса детально сравниваются с пучками Лагерра–Гаусса. А в [18] рассматриваются обобщенные (или дуальные) пучки Лагерра–Гаусса. Двойные и квадратные пучки Бесселя–Гаусса рассмотрены в [19].

Помимо использования узкой кольцевой диафрагмы [1], что, конечно, очень неэффективно для освещения, можно формировать пучки Бесселя с помощью деформируемого зеркала, пространственного модулятора света, матрицы микрзеркал, бинарной маски [20], голограммы [21], с помощью аксикона и линзы (или второго аксикона) для формирования яркого кольца [22–24] или с использованием тороидального резонатора [25].

В данной работе рассмотрено новое однопараметрическое семейство пучков Бесселя–Бесселя–Гаусса (ББГ-пучки), которое описывается комплексной амплитудой в виде произведения гауссовой функции и двух функций Бесселя  $n$ -го порядка с похожей зависимостью аргумента от цилиндрических координат. Показано, что топологический заряд такого пучка можно изменять, изменяя величину положительного параметра. Также показан аномально быстрый поворот интенсивности пучка при распространении в ближней зоне дифракции. При прохождении от перетяжки расстояния много меньше длины Рэлея интенсивность поворачивается почти на 45 градусов. Рассмотрены еще два аналогичных вихревых ББГ-пучка: с четырьмя локальными максимумами интенсивности, лежащими на декартовых осях координат, и с

одним максимумом интенсивности в виде полумесяца, центр которого лежит на горизонтальной оси.

**1. Пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса на основе пучков Бесселя–Гаусса**

Хорошо известны пучки Бесселя–Гаусса [2], комплексная амплитуда которых описывается выражением:

$$E_{bg}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi\right) \times J_n\left(\frac{\alpha r}{q(z)}\right), \quad (1)$$

где  $q(z) = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw^2/2$  – длина Рэлея,

$$E_{bbg}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ce^{i\varphi})^{2l+n}}{l!(l+n)!} J_{2l+n}\left(\frac{\alpha r}{q}\right) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \times J_n\left(\frac{1}{q} \sqrt{\frac{\alpha r}{2} (\alpha r - \sqrt{\alpha^2 r^2 - 16c^2 q^2 e^{2i\varphi}})}\right) J_n\left(\frac{1}{q} \sqrt{\frac{\alpha r}{2} (\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 16c^2 q^2 e^{2i\varphi}})}\right), \quad q = q(z), \quad (2)$$

где  $c$  – параметр, который будем считать действительным и положительным. Но если бы параметр  $c$  был комплексным,  $c = |c|e^{i\theta}$ , то под корнем аргумент последнего слагаемого был бы равен  $2(\varphi + \theta)$ . И картина интенсивности пучка (3) вместе с нулями интенсивности была бы просто повернутой на угол  $-\theta$ . Из (3) видно, что комплексная амплитуда ББГ-пучков записана для любого  $z$  в явном виде. Устремляя  $z$  к бесконечности, из (3) можно получить комплексную амплитуду ББГ-пучков в дальнем поле. Из (3) также видно, что ББГ-пучки не обладают круговой симметрией, но обладают осевой симметрией, так как замена азимутального угла  $\varphi$  на угол  $\varphi + \pi$  не приведет к изменению амплитуды (3). Если в ряду (3) положить  $\varphi = p\pi$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , то коэффициенты под знаком суммы для разных номеров  $l$  будут положительными, то

$$E_{bbg}(r \ll 1, \varphi, z) \approx \frac{1}{4^n (n!)^2 q} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \left(\frac{\alpha r}{2q^2} (\alpha r - \sqrt{\alpha^2 r^2 - 16c^2 q^2 e^{2i\varphi}})\right)^{n/2} \times \left(\frac{\alpha r}{2q^2} (\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 16c^2 q^2 e^{2i\varphi}})\right)^{n/2} = \frac{1}{2^{3n} (n!)^2 q} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) (\alpha r)^n (\alpha^2 r^2 - \alpha^2 r^2 + 16c^2 q^2 e^{2i\varphi})^{n/2} = \frac{1}{2^{3n} (n!)^2 q} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) (4c|q|^{-1} \alpha)^n (re^{i(\varphi-\psi)})^n, \quad \text{tg } \psi = \frac{z}{z_0}. \quad (3)$$

Из (5) видно, что вблизи нуля на оптической оси амплитуда пучка (3) описывает оптический вихрь с топологическим зарядом  $n$ . Также из (5) видно, что угол поворота интенсивности при распространении пучка увеличивается против часовой стрелки пропорционально фазе Гоу:  $\varphi = \psi$ . Если в (3) устремить к нулю радиальную координату ( $r \rightarrow 0$ ) внутри ряда, то в ряду останется самое большое слагаемое, а именно, первое слагаемое, и, вместо (3), можно записать:

$k$  – волновое число света,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка,  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $z$  – оптическая ось,  $\alpha$  – масштабный множитель, определяющий ширину функции Бесселя  $J_n(x)$ ,  $n$  – целое число, топологический заряд оптического вихря. Используя ряд из функций Бесселя (раздел 5.7.8 в [26]):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+n}}{l!(l+n)!} J_{2l+n}(x) = J_n\left(x \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{4t}{x}\right)\right) J_n\left(x \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{4t}{x}\right)\right), \quad (4)$$

можно записать комплексную амплитуду новых вихревых лазерных пучков Бесселя–Бесселя–Гаусса (ББГ-пучки):

есть все БГ-пучки в ряду будут складываться в фазе и интенсивность на горизонтальной оси должна быть большой. А на вертикальной оси (при  $\varphi = \pi/2 + p\pi$ ) коэффициенты ряда (3) будут менять знаки, и поэтому соседние пучки БГ будут складываться в противофазе и интенсивность на вертикальной оси будет меньше, чем на горизонтальной. Устремляя радиальную координату к нулю ( $r \rightarrow 0$ ) и воспользовавшись только первым членом разложения в ряд функций Бесселя при малом аргументе,

$$J_n(x \ll 1) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad (4)$$

вместо (3) получим амплитуду ББГ-пучка вблизи нуля интенсивности на оптической оси:

$$E_{bbg}(r \ll 1, \varphi, z) \approx \frac{1}{qn!} \exp\left(-\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \times (ce^{i\varphi})^n J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right). \quad (6)$$

Выражение (6) верно при малом параметре  $c$ . Из (6) видно, что вблизи центрального нуля интенсивности ББГ-пучок совпадает с БГ-пучком (1), если положить, что  $c = (n!)^{-1/n}$ . Из (3) и особенно из (6) видно, что при

$c=0$  амплитуда ББГ-пучка становится нулевой. Из (3) также видно, что в начальной плоскости, когда  $z=0$  и  $q(z)=1$  аргументы функций Бесселя будут действительными величинами при некоторых значениях азимутального угла:  $\varphi = \pi p/2$ ,  $p=0, 1, 2, \dots$ . То есть на декартовых осях  $x$  и  $y$  аргументы у обеих функций Бесселя в (3) будут действительными и при некоторых значениях радиальной переменной  $r$  могут быть равны корням функций Бесселя  $J_n(\gamma_{n,p})$ ,  $p=1, 2, 3, \dots$ . Приравняем аргументы функций Бесселя в начальной плоскости на декартовых осях действительным корням функций Бесселя, получим ( $\varphi = \pi p/2$ ):

$$\alpha r \left( \alpha r \pm \sqrt{\alpha^2 r^2 \pm 16c^2} \right) = 2\gamma_{n,p}^2. \tag{7}$$

В (7) знак минус под квадратным корнем имеет место на горизонтальной оси  $x$ , а знак плюс – на вертикальной оси  $y$ . Знаки плюс и минус перед квадратным корнем в (7) относятся к разным функциям Бесселя в (3). В (7) на вертикальной оси  $y$  под корнем нужно выбрать знак плюс, тогда, чтобы левая сторона (7) была положительной, перед корнем нужно выбрать только плюс. Поэтому можно однозначно определить координаты нулей функций Бесселя на вертикальной декартовой оси:

$$r_{y,p} = \pm \frac{\gamma_{n,p}^2}{\alpha \sqrt{4c^2 + \gamma_{n,p}^2}}. \tag{8}$$

Плюс и минус в (8) означают положительные и отрицательные координаты нулей интенсивности ББГ-пучка на вертикальной оси в начальной плоскости. Из-за того, что под корнем в (7) на вертикальной оси будет знак плюс, второе слагаемое (7) будет больше, чем первое, то есть под внешним корнем первой функции Бесселя в (3) на вертикальной оси будет отрицательное число и аргумент будет чисто мнимым:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha r}{2} \left( \alpha r - \sqrt{\alpha^2 r^2 + 16c^2} \right)} = \\ = \pm i \sqrt{\frac{\alpha r}{2} \left( \sqrt{\alpha^2 r^2 + 16c^2} - \alpha r \right)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Знаки плюс и минус перед корнем в (9) показывают неоднозначность корня квадратного от минус единицы. Знак нужно выбирать так, чтобы решение было непрерывным. Если номер функции Бесселя четный, то неоднозначности нет, так как оба знака в (9) приводят к одному результату:

$$J_n(\pm ix) = (\pm i)^n I_n(x) = (\pm i)^{2p} I_{2p}(x) = (-1)^p I_{2p}(x),$$

где  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя.

На горизонтальной оси  $x$  в (7) следует выбрать под корнем знак минус. Тогда для неотрицательности подкоренного выражения нужно, чтобы выполнялось неравенство:

$$r \geq 4c/\alpha. \tag{10}$$

Если постоянная асимметрии  $c$  большая,  $4c \gg \alpha$ , то неравенство показывает, что на горизонтальной оси нули функции Бесселя (нули интенсивности) будут появляться дальше от центра, чем нули на вертикальной оси. Также из (10) следует, что нули интенсивности на горизонтальной оси будут расположены дальше максимального значения интенсивности, то есть радиусы двух максимумов интенсивности будут линейно расти с ростом постоянной  $c$  и будут примерно равны:  $r_{\max} \approx \pm 4c/\alpha$ . Координаты нулей интенсивности на горизонтальной оси равны:

$$r_{x,p} = \pm \frac{\gamma_{n,p}^2}{\alpha \sqrt{\gamma_{n,p}^2 - 4c^2}}. \tag{11}$$

Выражение (11) верно при условии (10) и при следующем условии, обеспечивающем положительность подкоренного выражения в (11):

$$\gamma_{n,p} > 2c. \tag{12}$$

Заметим, что нули интенсивности (локальные оптические вихри), которые лежат на декартовых осях, имеют чередующиеся знаки (топологический заряд равен +1 или –1) так, что соседние оптические вихри компенсируют друг друга. Это относится ко всем нулям, кроме центрального вырожденного нуля, топологический заряд которого равен  $n$ . Топологический заряд (ТЗ) ББГ-пучков увеличивается с ростом параметра асимметрии  $c > 0$ . Если первый член ряда в (3) наибольший из всех, то ТЗ пучка (3) равен  $n$ . Это будет иметь место, если параметр асимметрии небольшой и удовлетворяет примерно неравенству:  $c < n$ . Если параметр  $c$  увеличивается, то ТЗ ряда (3) будет равен ТЗ второго слагаемого, то есть будет равен  $n+2$ . При дальнейшем увеличении постоянной  $c$  уже третье слагаемое в ряде (3) может стать по амплитуде (при малом  $r$ ) больше остальных, и тогда ТЗ суперпозиции всех БГ-пучков, входящих в ряд, будет равен  $n+4$  и т.д. Устремляя значение постоянной к бесконечности, ТЗ ряда (3), а значит, и ББГ-пучков, также будет стремиться к бесконечности. При распространении пучка (3) в свободном пространстве нули интенсивности разных знаков на декартовых осях пропадают (аннигилируют) и остаются только оптические вихри вблизи начала координат.

## 2. Пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса на основе пучков Бесселя–Гаусса с квадратичным аргументом

В работе [14] найдено решение параксиального уравнения Гельмгольца:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, y, z) = 0 \tag{13}$$

в виде произведения функции Гаусса на функцию Бесселя с полуцелым номером и аргументом в квадрате (БГ2-пучки) [14]:

$$E_{bg2}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{q_+q_-}} \exp\left(\frac{i(1+\beta^2w^4)zr^2}{z_0w^2q_+q_-} - \frac{r^2}{w^2q_+q_-} + in\varphi\right) J_{n/2}\left(\frac{\beta r^2}{q_+q_-}\right). \tag{14}$$

На основе пучков (14) и ряда (2) можно построить пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса-2 (ББГ2-пучки) с полуцелым номером и сложной зависимостью аргументов:

$$\begin{aligned} E_{bbg2}(r, \varphi, z) &= \frac{1}{\sqrt{q_+q_-}} \exp\left(\frac{i(1+\beta^2w^4)zr^2}{z_0w^2q_+q_-} - \frac{r^2}{w^2q_+q_-}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ce^{i2\varphi})^{2l+n/2}}{l!\Gamma(l+n/2+1)} J_{2l+n/2}\left(\frac{\beta r^2}{q_+q_-}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_+q_-}} \exp\left(\frac{i(1+\beta^2w^4)zr^2}{z_0w^2q_+q_-} - \frac{r^2}{w^2q_+q_-}\right) J_{n/2}\left(\frac{1}{q_+q_- \sqrt{2}} \sqrt{\beta r^2 (\beta r^2 - \sqrt{\beta^2 r^4 - 16c^2 (q_+q_-)^4} e^{4i\varphi})}\right) \times \\ &\times J_{n/2}\left(\frac{1}{q_+q_- \sqrt{2}} \sqrt{\beta r^2 (\beta r^2 + \sqrt{\beta^2 r^4 - 16c^2 (q_+q_-)^4} e^{4i\varphi})}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где  $q_{\pm} = 1 \pm \beta w^2 z / z_0 + iz / z_0$ ,  $\beta$  – действительная постоянная величина, определяющая масштаб функции Бесселя. Семейство пучков (15), зависящих от параметра  $c$ , который мы рассматриваем как действительное число, имеет конечную энергию из-за наличия гауссовой экспоненты. При  $c=0$  пучок (15) становится нулевым при  $n$ , отличном от нуля, или равен пучку Бесселя–Гаусса-2 (14) нулевого порядка с квадратичным аргументом при  $n=0$ . Аналогично (6) вблизи оптической оси (при малом  $r$ ) пучок (15) становится равным порождающему пучку (14). Из анализа ряда в (15) видно, что при углах  $2\varphi = \pi p$ ,  $p=0, 1, 2, \dots$ , коэффициенты под знаком суммы для разных номеров  $l$  будут положительными, то есть все ББГ2-пучки в ряду (15) будут складываться в фазе и интенсивность на декартовых координатах должна быть большой. А при условии  $2\varphi = \pi/2 + \pi p$  коэффициенты ряда (15) будут менять знаки и поэтому соседние пучки ББГ2 будут складываться в противофазе, и интенсивность на диагоналях четырех квадрантов будет меньше, чем интенсивность на декартовых осях. То есть можно предположить, что ББГ2-пучки будут иметь четыре локальных максимума (четыре лепестка интенсивности) на декартовых осях на некотором расстоянии от оптической оси. Аналогично (7) приравняем аргумент функций Бесселя в (15) корням Бесселя с полуцелым номером в начальной плоскости ( $z=0$ ) на 8 лучах при углах  $\varphi = \pi p / 4$ ,  $p=0, 1, 2, \dots$ :

$$\beta r^2 (\beta r^2 \pm \sqrt{\beta^2 r^4 \pm 16c^2}) = 2\gamma_{n/2,p}^2. \tag{16}$$

При углах  $\varphi = \pi p / 4$ ,  $p=1, 3, 5, \dots$ , знак под корнем будет положительный, и тогда координаты нулей функции Бесселя будут находиться в точках на 4 диагоналях с координатами:

$$r_{x,y,p} = \pm \frac{\gamma_{n/2,p}}{\sqrt{\beta \sqrt{4c^2 + \gamma_{n/2,p}^2}}}. \tag{17}$$

При четных  $p$  на лучах  $\varphi = \pi p / 4$ ,  $p=0, 2, 4, \dots$ , знак под корнем в (16) будет отрицательный и корень бу-

дет действительной величиной при условии, аналогичном (10):

$$r \geq 2\sqrt{\frac{c}{\beta}}. \tag{18}$$

В (18) нужно потребовать, чтобы параметр  $c$  был больше нуля. Координаты корней функций Бесселя в (15) следует искать при условии (18) на декартовых осях из следующего уравнения:

$$r_{x,p} = \pm \frac{\gamma_{n/2,p}}{\sqrt{\beta \sqrt{\gamma_{n/2,p}^2 - 4c^2}}}. \tag{19}$$

Чтобы выражение (19) было действительным, следует потребовать выполнения условия, аналогичного (12):  $\gamma_{n/2,p} > 2c$ . Эти корни функций Бесселя в (15), лежащие на декартовых осях и диагоналях (на 8 лучах), являются центрами оптических вихрей первого порядка с чередующимися знаками  $+1$  и  $-1$ . Поэтому эти вихри не изменяют топологический заряд пучка (15), который равен топологическому заряду центрального оптического вихря  $n$ . При распространении в свободном пространстве аргументы функций Бесселя в (15) становятся комплексными, поэтому все нецентральные оптические вихри компенсируют друг друга и пропадают. В сечении пучка (15) при  $z > 0$  остается только центральный оптический вихрь.

### 3. Пучки Бесселя–Бесселя–Гаусса второго типа

В справочнике [27] можно найти другой ряд, похожий на ряд из функций Бесселя (2):

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)_l t^{l+n}}{l!(2n+1)_l} J_{l+n}(2x) = \\ = 2^{2n} n! J_n(x + \sqrt{x^2 - tx}) J_n(x - \sqrt{x^2 - tx}), \end{aligned} \tag{20}$$

где  $(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$  – символ Похгаммера.

На основе ряда (20) и БГ-пучка (1) можно получить ББГ-пучки второго типа (2ББГ-пучки):

$$E_{2bbg}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)_l (ce^{i\varphi})^{l+n}}{2^n n! l! (2n+1)_l} J_{l+n}\left(\frac{\alpha r}{q}\right) = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{w^2 q}\right) \times J_n\left(\frac{1}{2q}(\alpha r + \sqrt{\alpha^2 r^2 - 2c\alpha r q e^{i\varphi}})\right) J_n\left(\frac{1}{2q}(\alpha r - \sqrt{\alpha^2 r^2 - 2c\alpha r q e^{i\varphi}})\right), \quad q = q(z). \quad (21)$$

При  $c=0$  2ББГ-пучки равны нулю, при  $n$ , отличном от нуля, и равны БГ-пучку нулевого порядка, если  $n=0$ . Из (21) видно, что только на горизонтальной оси  $x$  значения ряда будут действительными в начальной плоскости. При этом на положительной части горизонтальной оси ( $\varphi=2\pi p$ ,  $p=0, 1, 2, \dots$ ) все слагаемые ряда будут складываться «в фазе», и поэтому величина интенсивности будет большая. А на отрицательной части оси  $x$  ( $\varphi=\pi p$ ,  $p=1, 3, 5, \dots$ ) соседние слагаемые будут складываться в «противофазе», и поэтому интенсивность будет меньше, чем на положительной части оси  $x$ . То есть распределение интенсивности в начальной плоскости будет иметь один максимум при  $x>0$ . Приравняем аргументы функций Бесселя в (21) корням  $\gamma_{n,p}$  в начальной плоскости ( $z=0$ ) на отрицательной части горизонтальной оси  $x<0$ , получим координаты нулей интенсивности:

$$r_{x<0} = \frac{2\gamma_{n,p}^2}{\alpha(c + 2\gamma_{n,p})}. \quad (22)$$

На положительной части горизонтальной оси  $x>0$  координаты нулей интенсивности можно найти только при условии, аналогичном (10):

$$r \geq 2c/\alpha. \quad (23)$$

При условии (23) координаты нулей интенсивности будут равны:

$$r_{x>0} = \frac{2\gamma_{n,p}^2}{\alpha(2\gamma_{n,p} - c)}, \quad 2\gamma_{n,p} > c. \quad (24)$$

Из сравнения (22) и (24) видно, что при увеличении параметра асимметрии  $c$  нули интенсивности при  $x<0$  будут приближаться к центру, а при  $x>0$  – удаляться от центра. В центре на оптической оси будет находиться нуль интенсивности, который является центром оптического вихря с топологическим зарядом  $n$ . Нули интенсивности (22) и (24), лежащие на горизонтальной оси, являются центрами оптических вихрей с топологическими зарядами  $+1$  и  $-1$ . При распространении пучка эти периферийные оптические вихри «аннигилируют», так как аргумент функций Бесселя в (21) становится комплексным. У функции Бесселя имеются только действительные корни, комплексных корней нет.

#### 4. Моделирование распространения ББГ-пучков

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы ББГ-пучка, рассчитанные по формуле (3) для следующих параметров: длина волны  $\lambda=532$  нм, радиус перетяжки  $w_0=1$  мм, порядок  $n=4$ , масштаби-

рующий множитель пучков БГ  $\alpha=k/1000$ , параметр асимметрии  $c=5$ . Разные интенсивности и фазы показаны на следующих расстояниях от перетяжки:  $z=0, 0,15z_0, 0,25z_0, 0,5z_0, z_0, 1,5z_0$ . Из рис. 1 видно, что после прохождения расстояния много меньше длины Рэлея ББГ-пучок повернулся против часовой стрелки почти на 45 градусов. При прохождении расстояния, равного длине Рэлея, ББГ-пучок (3) повернулся почти на 90 градусов, и при дальнейшем распространении медленно доворачивался до 90 градусов. Обычно вихревые пучки с распределением интенсивности без радиальной симметрии поворачиваются на 45 градусов после прохождения расстояния, равного длине Рэлея [28, 29]. Дело в том, что у пучка Бесселя (3) дальняя зона наступает при меньших расстояниях, чем длина Рэлея. Радиус гауссова пучка можно рассматривать как диафрагму, ограничивающую пучок Бесселя, и поэтому после расстояния  $wk/\alpha=1000$   $w=1$  м, для пучка Бесселя уже наступает дальнейшее поле, хотя длина Рэлея равна примерно  $z_0=6$  м.

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы ББГ-пучков (3) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda=532$  нм, радиус перетяжки  $w_0=1$  мм, топологический заряд  $n=4$ , масштабирующий множитель  $\alpha=k/1000$ , параметр асимметрии  $c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , расстояние распространения  $z=z_0$ . Полуразмер расчётной области  $R=10$  мм.

Из рис. 2 видно, что с увеличением постоянной  $c$  растет значение топологического заряда ББГ-пучка. Так, при  $c$  от 1 до 3 ТЗ равен  $n=4$ , при  $c$ , равном 4 и 5, ТЗ равен  $n+2=6$ , при  $c$ , равном 6 и 7, ТЗ равен  $n+4=8$ , и при  $c$ , равном 8, ТЗ равен  $n+6=10$ . То есть мы показали, что с помощью изменения параметра  $c$  можно управлять топологическим зарядом ББГ-пучков (3), изменяя его на четное число. Кроме того, из рис. 2 видно, что в начальной плоскости расстояние между двумя максимумами интенсивности на горизонтальной оси увеличивается пропорционально постоянной  $c$ , как и предсказывает теория (23). Расстояние от центра до одного из полумесяцев в первом столбце на рис. 2 можно оценить, зная первые корни первых функций Бесселя, входящих в (3). Например, при  $c=1$  основной вклад в ряд (3) вносит первый член, пропорциональный функции Бесселя 4-го порядка. Первый корень функции Бесселя 4-го порядка 7,3. Тогда, приравнявая аргумент первой в ряду функции Бесселя в (3) в начальной плоскости  $\alpha r$  половине значения первого корня, получим примерное расстояние до полумесяца – 310 мкм (точное расстояние равно 440 мкм). При больших  $c$  надо брать пер-

вые корни функций Бесселя более высокого порядка. Точные расстояния до полумесяца в начальной плоскости на рис. 2 (первый столбец) при разных  $c$  такие: 479 мкм ( $c=2$ ), 537 мкм ( $c=3$ ), 655 мкм ( $c=4$ ), 772 мкм ( $c=5$ ). Радиус неоднородного кольца интен-

сивности на рис. 2в увеличился по сравнению с радиусом интенсивности в перетяжке (рис. 2а) примерно в 10 раз. Размер радиуса этого кольца можно оценить по формуле  $z_0 \alpha / k = z_0 / 1000 = 6,2$  мм. Это согласуется с рис. 2в (радиус кольца – 5,8 мм).

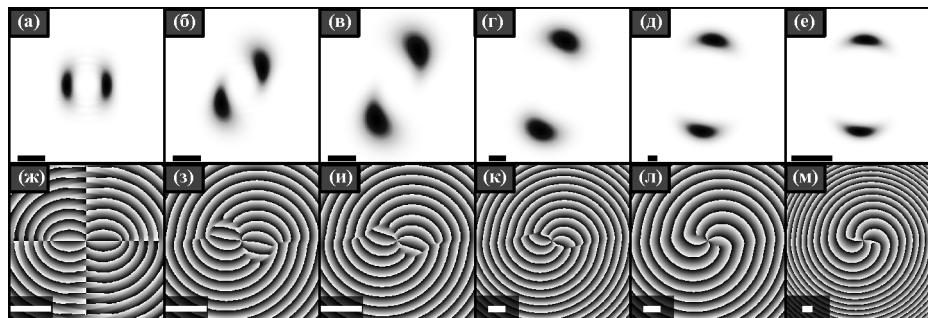


Рис. 1. Распределения интенсивности (строка 1) и фазы (строка 2) ББГ-пучков, рассчитанные по формуле (3) на разных расстояниях от перетяжки:  $z = 0, 0,15z_0, 0,25z_0, 0,5z_0, z_0, 1,5z_0$ . Полуразмер расчётной области  $R = 10$  мм при  $z = 1,5z_0$  и  $z = 2z_0$   $R = 20$  мм. Шкала показывает 1 мм (а – в, д – е) и 10 мм (ж)

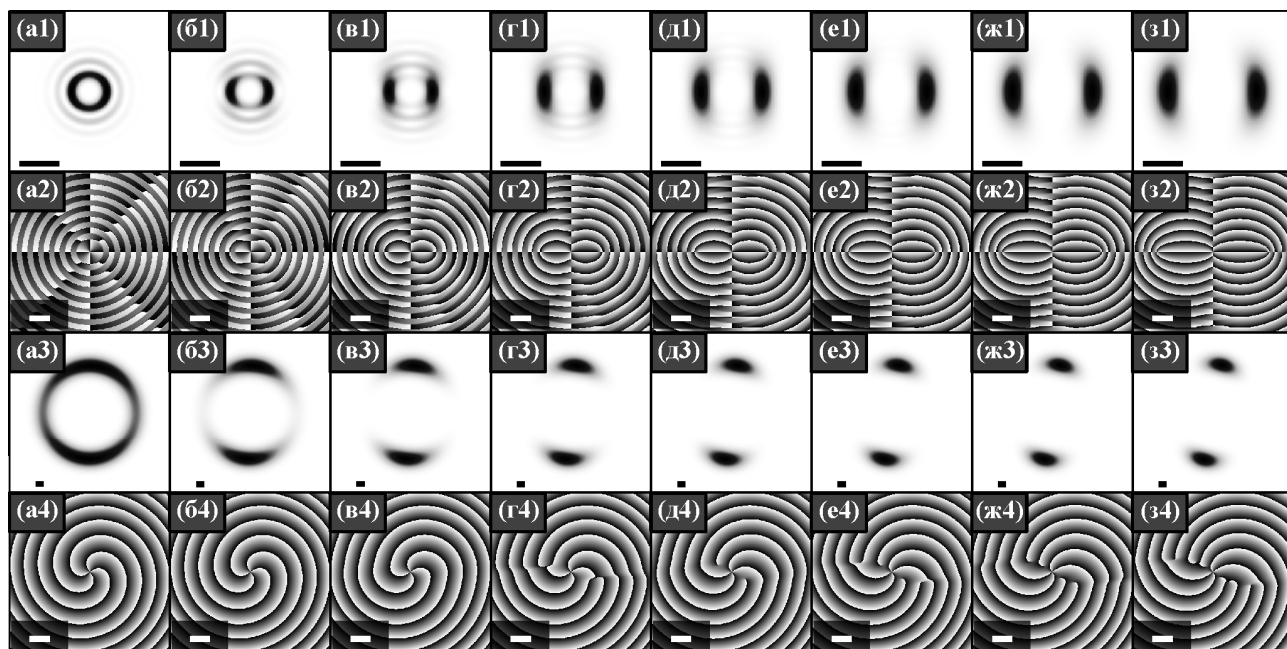


Рис. 2. Распределение интенсивности (строки 1 и 3) и фазы (строки 2 и 4) ББГ-пучка (3) в начальной плоскости (строки 1 и 2) и на расстоянии Рэлея (строки 3 и 4) при разных параметрах  $c$ : 1 (столбец а), 2 (столбец б), 3 (столбец в), 4 (столбец г), 5 (столбец д), 6 (столбец е), 7 (столбец ж) и 8 (столбец з). Полуразмер расчётной области  $R = 10$  мм. Шкала показывает 1 мм

### 5. Моделирование распространения ББГ2-пучков

Параметры моделирования пучков (15): радиус перетяжки гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, топологический заряд  $n = 4$ , длина волны  $\lambda = 532$  нм, масштабный параметр функции Бесселя  $\beta = 10^{-6} k_0^2$ , параметр асимметрии изменялся:  $c = 1; 1,5; 2$ . Так как пучки (15) сильно расходятся, то интенсивность рассчитывалась на малом расстоянии от начальной плоскости, на десятой части длины Рэлея  $z = z_0 / 10$ . Половина размера кадра равна  $R = 5$  мм. Полуразмер в начальной плоскости равен  $R = 1$  мм. На рис. 3 – 5 показаны интенсивность пучка в начальной плоскости (радиус начального пучка примерно 0,25 мм) (а) и два

распределения интенсивности на расстоянии  $z = z_0 / 10$ , рассчитанные разными способами: с помощью интегрального преобразования Френеля (б) и с помощью ряда (15) из функций Бесселя с квадратичным аргументом (в). Рис. 3 – 5 отличаются выбором разных параметров асимметрии  $c$ : 1 (рис. 3), 1,5 (рис. 4), 2 (рис. 5). На рис. 3 – 5 видно, что уже на десятой части расстояния Рэлея пучок увеличивается в диаметре примерно в 10 раз. То есть пучок (19) хотя и паракиальный, так как имеет гауссову огибающую, но расходится гораздо сильнее, чем огибающий гауссов пучок.

Расстояния между максимумами (по горизонтали) в начальной плоскости равны 303 мкм (рис. 3а),

322 мкм (рис. 4а), 342 мкм (рис. 5а). На расстоянии  $z_0/10$  между максимумами оказались равны 4221 мкм (рис. 3б, в), 4396 мкм (рис. 4б, в), 4669 мкм (рис. 5б, в). Таким образом, за такое небольшое расстояние распространения ширина пучка увеличилась в 13,9 ( $c = 1$ ), 13,6 ( $c = 1,5$ ), 13,7 ( $c = 2$ ) раз.

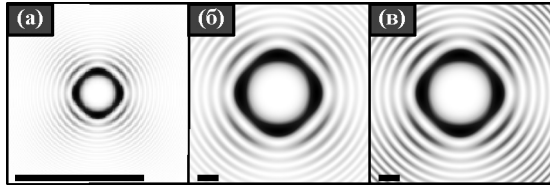


Рис. 3. Интенсивность в начальной плоскости (а), полученная через произведение функций Бесселя, а также интенсивности (б, в) на расстоянии  $z = z_0/10$ , полученные через преобразование Френеля (б) и через ряд (15) квадратичных пучков Бесселя–Гаусса (в), при  $c = 1$ . Шкала показывает 1 мм

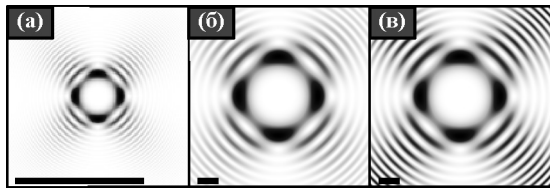


Рис. 4. Интенсивность в начальной плоскости (а), полученная через произведение функций Бесселя, а также интенсивности (б, в) на расстоянии  $z = z_0/10$ , полученные через преобразование Френеля (б) и через ряд (19) квадратичных пучков Бесселя–Гаусса (в), при  $c = 1,5$ . Шкала показывает 1 мм

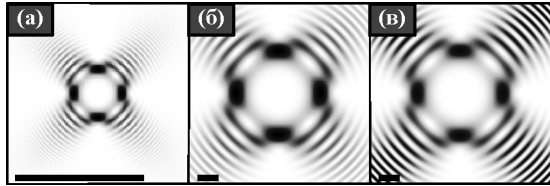


Рис. 5. Интенсивность в начальной плоскости (а), полученная через произведение функций Бесселя, а также интенсивности (б, в) на расстоянии  $z = z_0/10$ , полученные через преобразование Френеля (б) и через ряд (19) квадратичных пучков Бесселя–Гаусса (в), при  $c = 2$ . Шкала показывает 1 мм

На рис. 6 показаны распределения фаз в начальной плоскости для пучков на рис. 3 – 5. На рис. 6а показана фаза для пучка с  $c = 1$  (рис. 3а), на рис. 6б показана фаза для пучка с  $c = 1,5$  (рис. 4а) и на рис. 6в показана фаза для пучка с  $c = 2$  (рис. 5а). Из рис. 6 видно, что, как и предсказывает теория на декартовых осях, корни (нули интенсивности) будут с ростом параметра  $c$  удаляться от центра (19), а корни, лежащие на диагоналях, будут приближаться к центру (17). При этом первое кольцо на рис. 6а имеет вид квадрата с выгнутыми наружу сторонами, а это же первое кольцо на рис. 6в имеет вид квадрата с вогнутыми внутрь сторонами (подушка). В центре пучка (на оптической оси) находится оптический вихрь с топологическим зарядом  $n = 4$ .

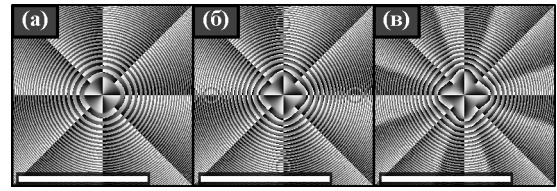


Рис. 6. Распределения фаз в начальной плоскости пучков, показанных на рис. 3а – 5а, у которых параметр  $c$  был равен: 1 (а); 1,5 (б); 2 (в). Шкала показывает 1 мм

Из рис. 3 – 5 видно, что при распространении ББГ2-пучки не вращаются и слабо изменяют вид распределения интенсивности. Хотя структурно-стабильными такие пучки назвать нельзя, так как в дальней зоне эти пучки будут иметь вид распределения интенсивности в виде концентрических световых колец. Это видно из ряда в (15). Так как все пучки Бесселя в ряде будут расходиться тем быстрее, чем больше их топологический заряд, при этом амплитуды этих пучков (весовые коэффициенты ряда в (15)) будут убывать с ростом топологического заряда, то есть самое яркое кольцо в дальней зоне будет у пучка Бесселя с топологическим зарядом  $n$ , который описывается первым слагаемым в ряде (15). На рис. 7 показана интенсивность ББГ2-пучка (15) на расстоянии половины длины Рэлея ( $z = z_0/2$ ) при  $c = 1$ . Видно, что уже на этом расстоянии пучок в виде сглаженного квадрата (рис. 3) превратился в кольцевой пучок, окруженный боковыми кольцами.

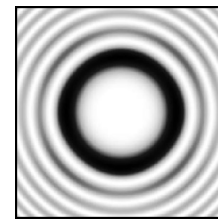


Рис. 7. Интенсивность пучка (15) на расстоянии  $z = z_0/2$  от перетяжки при  $c = 1$ . Размер кадра –  $10 \times 10$  мм

Оценим расходимость пучка (15). Пучок Бесселя–Гаусса с квадратичным аргументом и топологическим зарядом  $n$ , который является первым членом ряда в (15), имеет начальный радиус, как и у обычных пучков Бесселя–Гаусса,  $r_0 \approx w_0 \sqrt{n/2}$ . Пучок Бесселя–Гаусса с квадратичным аргументом  $\beta r^2$  распространяется, как после сферической линзы с фокусным расстоянием  $f = k/(2\beta)$ . То есть он расходится после прохождения фокуса, и на расстоянии  $z = z_0/10$  его радиус  $r_z$  увеличится по сравнению с начальным радиусом  $r_0$  в число раз, равное отношению  $(z_0/10 - f)/f$ . Таким образом, получим оценку величины расходимости пучка (15), как отношение радиусов:

$$\frac{r_z}{r_0} = \frac{z_0}{10f} - 1 = \frac{w^2 \beta}{10} - 1 = \frac{(kw)^2}{10^7} - 1 \approx 14. \quad (25)$$

Последнее значение немного больше, чем полученное при моделировании (13,6 – 13,9).

### 6. Моделирование распространения ББГ-пучков второго типа

Параметры моделирования пучка (21): длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 1$  мм, топологический заряд  $n = 4$ , масштабирующий множитель пучков ББГ-пучка  $\alpha = k/200$ , параметр асимметрии  $c = 1$ , расстояния распространения  $z = 0, 0,1z_0, 0,2z_0$ . Полуразмер расчётной области  $R = 10$  мм. На рис. 8 показаны распределения интенсивности на разных расстояниях от начальной плоскости. На рис. 8а показана увеличенная в 10 раз картина интенсивности пучка в начальной плоскости, а на рис. 8б, в показаны интенсивности этого пучка на расстояниях  $0,1z_0$  (б),  $0,2z_0$  (в).

Из сравнения интенсивностей на рис. 8 видно, что при распространении пучок увеличился в размере, повернулся на 90 градусов и «потерял» боковые кольца. Для обычного пучка Бесселя известно, что интенсивность в дальнем поле имеет вид кольца без боковых лепестков. Для пучка Бесселя–Гаусса то же в дальнем поле формируется уширенное светлое кольцо. Если есть осевая суперпозиция пучков Бесселя–Гаусса разного порядка, то все они в дальнем поле формируют одно кольцо с распределением интенсивности вдоль этого кольца, которое зависит от весовых коэффициентов в сумме (21). Если в начальной плоскости данная суперпозиция имеет максимум с центром на горизонтальной оси, как на рис. 8а, то в дальнем поле центр максимальной интенсивности должен быть на вертикальной оси, как на рис. 8б, в. То есть интенсивность должна повернуться на 90 градусов. Это следует из того, что у каждой функции Бесселя в ряде (21) в дальнем поле в аргументе появится мнимая единица с минусом, так как аргумент комплексной величины  $q(z)$  (фаза Гоу) равен  $\pi/2$ . Поэтому для каждой функции Бесселя в дальнем поле получим:  $J_n(-ix) = (-i)^n I_n(x)$ , где  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя. Тогда в сумме (21) вместо коэффициентов  $(\text{сехр}(i\varphi))^{4n}$  получим  $(\text{сехр}(i(\varphi - \pi/2)))^{4n}$ . То есть вид распределения интенсивности вдоль кольца в дальней зоне не изменится, если повернуть начальную картину на 90 градусов против часовой стрелки. Оценим расходимость пучка (21). Заметим, что дальняя зона для пучка Бесселя–Гаусса наступает не так, как для гауссова пучка, при  $z > z_0$ , а раньше, при  $z > z_1 = wk/\alpha$ . Так как  $\alpha = k/200$ , то  $z_1 = 200w = 200$  мм. А расстояние Рэлея для случая на рис. 8 равно  $z_0 = kw^2/2 \sim 6000$  мм. То есть уже на расстоянии  $0,1z_0 = 600$  мм (рис. 8в, в) для пучков Бесселя (21) будет дальнее поле. Радиус кольца (полумесяца)  $R_1$  на рис. 8в можно оценить, исходя из выражения  $R_1 \sim z \text{tg}\theta$ , где  $\theta$  – угол наклона конических лучей, формирующих пучки Бесселя в ряде (21). И так как  $\text{tg}\theta \sim \sin\theta = \alpha/k$ , то  $R_1 = z\alpha/k = (z_0/10)/200 = 3$  мм. Точный расчет показал, что расстояние от оптической оси до центра полумесяца на рис. 8в равно 2,874 мм.

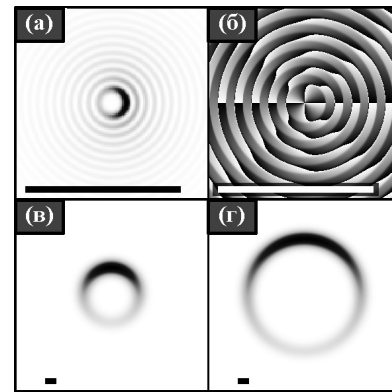


Рис. 8. Распределение интенсивности ББГ- пучка (21) при разных  $z$ : 0 (а),  $0,1z_0$  (б),  $0,2z_0$  (в) и фаза в начальной плоскости (г). Шкала показывает 1 мм

На рис. 9 показана интенсивность пучка ББГ второго типа (21) на расстоянии  $z = 0,04z_0$ . Особенность этого распределения интенсивности в том, что на нем видны два типа пучков разного масштаба. В центре видно малое распределение интенсивности в виде полумесяца, центр которого лежит на горизонтальной оси, и неоднородное кольцо много большего диаметра, такой же полумесяц, центр которого лежит на вертикальной оси. Наличие в одном пучке на рис. 9 двух пучков разного масштаба можно объяснить исходя из природы пучка Бесселя–Гаусса. Гауссов пучок, как мягкая диафрагма, ограничивает апертуру пучка Бесселя. Поэтому пучок Бесселя распространяется почти бездифракционно, сохраняя свой начальный размер, примерно до расстояния  $z_1 = wk/\alpha$ . Этот бездифракционный пучок формируется с помощью конического волнового фронта, и на расстоянии  $z = 0,04z_0 = 240$  мм к оптической оси будут приходить лучи от «края начальной апертуры» (с расстояния, равного радиусу перетяжки  $w$ ). А те лучи, которые пересекли оптическую ось на более близком расстоянии, расходятся и формируют на расстоянии  $z = 0,04z_0$  другой тип пучка, а именно, пучок в дальнем поле (полумесяц без боковых лепестков и повернутый на 90 градусов, как на рис. 9). При дальнейшем распространении бездифракционная часть пучка пропадает и остается только часть пучка в дальнем поле, как на рис. 8в, в. Размер бездифракционной части пучка (21), равный размеру пучка в начальной плоскости (рис. 8а), можно оценить с помощью половины расстояния до первого нуля функции Бесселя 4-го порядка. Корень функции Бесселя 4-го порядка примерно равен 7,3, поэтому расстояние до полумесяца на рис. 8а будет примерно равно  $r = 3,6/\alpha = 3,6 \times 200/k = 61$  мкм. Точное расстояние равно 88 мкм.

### Заключение

Рассмотренные ББГ-пучки можно сформировать с помощью фазового модулятора света с использованием известных методов кодирования амплитудно-фазовой функции (3) в только фазовую функцию. Аномально быстрый поворот интенсивности, состоящей из двух лепестков, можно использовать для уве-



личения продольного разрешения оптического микроскопа, так как смещение источника света вдоль оптической оси будет приводить к поперечному повороту двух лепестков интенсивности. Чем выше скорость поворота двух лепестков интенсивности, тем выше продольное разрешение оптического микроскопа. Пучок с двумя лепестками в виде двух «месяцев» можно использовать для оптического захвата биологических клеток по их краям и перемещать их, чтобы не повредить мощным излучением в центре гауссова пучка. Плавно меняя параметр  $s$  пучка, можно растягивать клетки, так как с увеличением параметра  $s$  увеличивается не только ТЗ пучка, но и расстояние между двумя лепестками интенсивности.

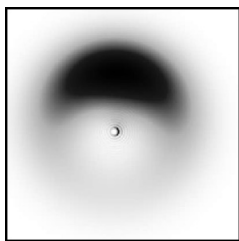


Рис. 9. Распределение интенсивности ББГ-пучка (21) на расстоянии  $z = 0,04z_0$ . Размер кадра –  $6 \times 6$  мм

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-12-00236 в частях теории и при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

#### References

- [1] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J Opt Soc Am A* 1987; 4(4): 651-654. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
- [2] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
- [3] Khonina SN, Kazanskiy NL, Karpeev SV, Butt MA. Bessel beam: Significance and applications – A progressive review. *Micromachines* 2020; 11(11): 997. DOI: 10.3390/mi11110997.
- [4] Stoian R, Bhuyan MK, Zhang G, Cheng G, Meyer R, Courvoisier F. Ultrafast Bessel beams: advanced tools for laser materials processing. *Adv Opt Tech* 2018; 7(3): 165-174. DOI: 10.1515/aot-2019-0029.
- [5] Velpula PK, Bhuyan MK, Courvoisier F, Zhang H, Colombier JP, Stoian R. Spatio-temporal dynamics in non-diffractive Bessel ultrafast laser nanoscale volume structuring. *Laser Photonics Rev* 2016; 10(2): 230-244. DOI: 10.1002/lpor.201500112.
- [6] Milne G, Dholakia K, McGloin D, Volke-Sepulveda K, Zemánek P. Transverse particle dynamics in a Bessel beam. *Opt Express* 2007; 15(21): 13972-13987. DOI: 10.1364/OE.15.013972.
- [7] Suarez RA, Ambrosio LA, Neves AA, Zamboni-Rached M, Gesualdi MR. Experimental optical trapping with frozen waves. *Opt Lett* 2020; 45(9): 2514-2517. DOI: 10.1364/OL.390909.
- [8] Rivero D, de Angelis VS, Beli C, Moreno M, Ambrosio LA, Courteille PW. Hollow Bessel beams for guiding atoms between vacuum chambers: a proposal and efficiency study. *J Opt Soc Am B* 2020; 37(9): 2660-2667. DOI: 10.1364/JOSAB.395200.
- [9] Liang Y, Yan S, Yao B, Lei M. Direct observation and characterization of optical guiding of microparticles by tightly focused non-diffracting beams. *Opt Express* 2019; 27(26): 37975-37985. DOI: 10.1364/OE.381969.
- [10] Fahrbach FO, Rohrbach A. Propagation stability of self-reconstructing Bessel beams enables contrast-enhanced imaging in thick media. *Nat Commun* 2012; 3(1): 632. DOI: 10.1038/ncomms1646.
- [11] Thériault G, De Koninck Y, McCarthy N. Extended depth of field microscopy for rapid volumetric two-photon imaging. *Opt Express* 2013; 21(8): 10095-100104. DOI: 10.1364/OE.21.010095.
- [12] Mphuthi N, Botha R, Forbes A. Are Bessel beams resilient to aberrations and turbulence? *J Opt Soc Am A* 2018; 35(6): 1021-1027. DOI: 10.1364/JOSAA.35.001021.
- [13] Chen S, Li S, Zhao Y, Liu J, Zhu L, Wang A, Du J, Shen L, Wang J. Demonstration of 20-Gbit/s high-speed Bessel beam encoding/decoding link with adaptive turbulence compensation. *Opt Lett* 2016; 41(20): 4680-4683. DOI: 10.1364/OL.41.004680.
- [14] Caron CFR, Potvliege RM. Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence. *Opt Commun* 1999; 164(1-3): 83-93. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00174-1.
- [15] Kotlyar VV, Kovalev AA, Kalinkina DS. Fractional-order-Bessel Fourier-invariant optical vortices. *Opt Commun* 2021; 492: 126974. DOI: 10.1016/j.optcom.2021.126974.
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Skidanov RV, Soifer VA. Asymmetric Bessel-Gauss beams. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(9): 1977-1983. DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977.
- [17] Sheppard CJR, Porras MA. Comparison between the propagation properties of Bessel-Gauss and generalized Laguerre-Gauss beams. *Photonics* 2023; 10(9): 1011. DOI: 10.3390/photonics10091011.
- [18] Bagini V, Frezza F, Santarsiero M, Schettini G, Shirripa Spagnolo G. Generalized Bessel-Gauss beams. *J Mod Opt* 1996; 43(6): 1155-1166. DOI: 10.1080/09500349608232794.
- [19] Abramochkin EG, Kotlyar VV, Kovalev AA. Double and square Bessel-Gaussian beams. *Micromachines* 2023; 14(5): 1029. DOI: 10.3390/mi14051029.
- [20] Wang HF, Gan F. High focal depth with a pure-phase apodizer. *App Opt* 2001; 40(31): 5658-5662. DOI: 10.1364/AO.40.005658.
- [21] Mondal A, Yevick A, Blackburn LC, Kanellakouopoulos N, Grier DG. Projecting non-diffracting waves with intermediate-plane holography. *Opt Express* 2018; 26(4): 3926-3931. DOI: 10.1364/OE.26.003926.
- [22] McLeod JH. The axicon: A new type of optical element. *J Opt Soc Am* 2004; 44(8): 592-597. DOI: 10.1364/JOSA.44.000592.
- [23] Arimoto R, Saloma C, Tanaka T, Kawata S. Imaging properties of axicon in a scanning optical system. *App Opt* 1992; 31(31): 6653-6657. DOI: 10.1364/AO.31.006653.
- [24] Breen T, Basque-Giroux N, Fuchs U, Golub I. Tuning the resolution and depth of field of a lens using an adjustable ring beam illumination. *App Opt* 2020; 59(15): 4744-4749. DOI: 10.1364/AO.389353.
- [25] Sheppard CJR, Wilson T. Gaussian-beam theory of lenses with annular aperture. *IEE Journal on Microwaves, Optics*

- and Acoustics 1978; 2(4): 105-112. DOI: 10.1049/j-moa.1978.0023.
- [26] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.
- [27] Brychkov Y. Handbook of special functions: Derivatives, integrals, series and other formulas. CRC Press, 2008.
- [28] Kovalev AA, Kotlyar VV. Optical vortex beams with the infinite topological charge. J Opt 2021; 23: 055601. DOI: 10.1088/2040-8986/abf172.
- [29] Kovalev AA, Kotlyar VV. Orbital angular momentum of generalized cosine Gaussian beams with an infinite number of screw dislocations. Optik 2021; 242: 166863. DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.166863.

### **Сведения об авторах**

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 714 этого номера.

**Абрамочкин Евгений Григорьевич**, 1962 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Математическая физика». Доктор физико-математических наук (2006 год), работает ведущим научным сотрудником Самарского филиала ФГБУН «Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН». В списке научных работ около 50 статей. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики.

**Козлова Елена Сергеевна**, 1989 года рождения. В 2011 году окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и информатика». Кандидат физико-математических наук с 2014 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений, НИЦ "Курчатовский институт" и по совместительству ассистент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com)

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 29 октября 2024 г. Окончательный вариант – 29 января 2025 г.

---

# Vortex laser beams with complex amplitude proportional to the product of two Bessel functions

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, E.G. Abramochkin<sup>3</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, E.S. Kozlova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34;

<sup>3</sup>Lebedev Physical Institute, 443011, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

The optical vortices with the complex amplitude which is presented by the product of the Gaussian function and two Bessel functions with a complex root dependence of the arguments on the cylindrical coordinates and a constant parameter that determines the type of intensity distribution. These beams can be named Bessel-Bessel-Gaussian beams (BBG beams). An explicit expression for the complex amplitude of such beams at any distance from the waist is presented. We have demonstrated that BBG beams have an anomalously high rotation speed: the intensity rotates by almost 45 degrees at a distance much smaller than the Rayleigh length. It is shown that the parameter allow to control the topological charge of the BBG beam. The topological charge increases in jumps by an even number with an increase in the positive value of the parameter.

**Keywords:** Bessel function, Gauss function, Bessel-Bessel-Gauss beams.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Kozlova ES. Vortex laser beams with complex amplitude proportional to the product of two Bessel functions. *Computer Optics* 2025; 49(5): 723-732. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1635.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment NRC "Kurchatov Institute" in part of theory, Russian Science Foundation (Project No. 22-12-00236) in part of simulation.

---

## Author's information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru)

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru) ORCID: 0000-0002-7813-8363.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute". He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0002-0488-4267.

**Elena Sergeevna Kozlova**, (b. 1989) received Master's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and assistant of Computer Science department at Samara National Research University. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com)

---

Received October 29, 2024. The final version – January 29, 2025.

---