

Вихревые моды Айнса–Гаусса как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса

Е.Г. Абрамочкин¹, В.В. Котляр^{2,3}

¹ Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук, 443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221;

² Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

³ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе теоретически и численно исследуются вихревые моды Айнса–Гаусса $\mathbf{hIG}_{p,q}(x, y, \varepsilon)$. Получены явные аналитические выражения, описывающие зависимость орбитального углового момента вихревых мод Айнса–Гаусса при $p=2, 3, 4, 5$ от параметра эллиптичности ε . При этом были использованы полученные ранее разложения мод Айнса–Гаусса по модам Эрмита–Гаусса. Показано, что в общем случае орбитальный угловой момент является чётной функцией от ε и не обладает монотонным поведением при изменении ε от нуля до бесконечности. При нулевом ε орбитальный угловой момент равен индексу q моды Айнса–Гаусса, а при $\varepsilon = \infty$ – величине $[q(p-q+1)]^{1/2}$. Топологический заряд вихревой моды Айнса–Гаусса зависит от ε и равен индексу q при $\varepsilon=0$ и индексу p при $\varepsilon = \infty$.

Ключевые слова: модовые пучки, моды Айнса–Гаусса, оптические вихри, пучки Эрмита–Гаусса, пучки Лагерра–Гаусса, орбитальный угловой момент, топологический заряд.

Цитирование: Абрамочкин, Е.Г. Вихревые моды Айнса–Гаусса как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса / Е.Г. Абрамочкин, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 6. – С. 867–875. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1647.

Citation: Abramochkin EG, Kotlyar VV. Helical Ince-Gaussian modes as superpositions of Hermite-Gaussian modes. Computer Optics 2025; 49(6): 867-875. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1647.

Введение

Известно, что моды Айнса–Гаусса (АГ) [1–3] вещественны и поэтому не являются вихревыми пучками и не несут орбитальный угловой момент (ОУМ). В работах [3, 4] был рассмотрен вариант вихревых (helical) мод АГ (вАГ) $\mathbf{hIG}_{p,q}(x, y, \varepsilon)$, где p и q – неотрицательные целые числа, а ε – вещественное число (параметр эллиптичности) как осевая суперпозиция чётных и нечётных нормированных мод АГ с задержкой по фазе на $\pi/2$. В [4] численно показано, что ОУМ таких вихревых мод зависит от параметра эллиптичности ε . Однако аналитически зависимость ОУМ от ε не была получена. Также не рассматривался вопрос о величине топологического заряда (ТЗ) вАГ-мод. Сохраняется топологический заряд при изменении параметра ε или нет? В работе [5] была предпринята попытка представить моды АГ как суперпозицию мод Лагерра–Гаусса (ЛГ), но явный вид коэффициентов разложения не был найден. Хотя в [5] и не получили аналитических выражений коэффициентов разложения АГ по модам ЛГ, но представили подробный алгоритм их расчета и на множестве примеров дали пояснение с геометрическим отображением мод АГ на сферу в сообществе с ЭГ- и ЛГ-пучками. В [6] мы привели явный вид коэффициентов разложения мод АГ по модам Эрмита–Гаусса (ЭГ) и ЛГ для случаев, когда $p \leq 6$.

Вихревые моды АГ, как и невихревые, достаточно широко применяются в оптике. В [7] изучались поляризационные структуры пучков АГ. Среди различных способов экспериментальной реализации мод АГ отметим следующие: с помощью элемента с метаповерхностью [8], динамическим способом с помощью управляемого от компьютера адаптивного зеркала с большим числом микроячеек [9], с помощью спонтанной параметрической конверсии [10]. В последнем случае были сформированы двухфотонные перепутанные вихревые моды АГ, которые применяются в квантовой информатике [4]. Вихревые моды АГ можно получать с помощью призмы Дове и интерферометра Маха–Цандера [11], в резонаторе лазера на чипе с диодной накачкой [12] и в других типах лазеров [13]. Пучки АГ можно также генерировать как вторые гармоники при нелинейном преобразовании в кристалле [14]. В работе [15] было реализовано классическое перепутывание мод АГ. Фактически в этой работе были рассмотрены пучки Пуанкаре, но не на основе мод ЛГ, а на основе мод АГ. Прохождение мод АГ через турбулентную атмосферу изучалось в [16]. Моды АГ применяются не только в квантовой информатике и для зондирования атмосферы, но и для манипулирования микрочастицами [17]. Моды АГ продемонстрировали множество интересных свойств при распространении в различных типах сред, например, в сильно нелокальных нелинейных средах [18], в маломодовых волокнах с эллиптической сердцевиной

[19]. Моды АГ применялись также для эффективного взаимодействия атомов друг с другом [20].

Для полноты картины заметим, что пучки АГ похожи (и по свойствам, и визуально по структуре распределения интенсивности) на пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса [21–24], которые также зависят от некоторого вещественного параметра (степень астигматизма) и при его изменении преобразуются из пучков ЭГ в пучки ЛГ. В [25] теоретически, геометрически и экспериментально была показана связь между модами Эрмита–Лагерра–Гаусса и модами АГ.

Интересно, что, хотя вихревые моды АГ давно применяются в оптике, многие теоретические вопросы остаются до сих пор не выясненными. Неизвестно, зависит топологический заряд вихревых мод АГ от параметра эллиптичности ϵ или нет? Обладает ли в общем случае ОУМ мод АГ какой-то симметрией в зависимости от ϵ или нет? Почему для одних номеров q ОУМ увеличивается с ростом ϵ , а для других q уменьшается? В данной работе мы попытались ответить на некоторые из указанных вопросов. Мы получили конкретные выражения для ОУМ некоторых вихревых мод АГ с зависимостью от параметра ϵ , которые можно проанализировать до моделирования. Причина, почему удастся найти точные аналитические выражения только для номеров p мод АГ меньше 5, в том, что уравнения для нахождения собственных чисел для этих номеров являются квадратными или кубическими. Для номеров $p > 5$ это уравнения четвертой степени и выше, которые нельзя решить аналитически. Мы доказали также, что ОУМ любой моды АГ является чётной функцией от ϵ , и показали, что ТЗ при $\epsilon = 0$ может отличаться от ТЗ при $\epsilon = \infty$.

1. Нормированные невихревые моды Айнса–Гаусса

Моды Айнса–Гаусса [1–3] являются структурно устойчивыми решениями параксиального уравнения Гельмгольца $\{\partial_x^2 + \partial_y^2 + 4i\partial_z\}F(\mathbf{r}, z) = 0$, разделяющимися в параболических координатах (ξ, η) , и имеют вид:

$$IG_{p,q}(\mathbf{r}, z) = G(\mathbf{r}, z) \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^{p/2} \times N_{p,q}(i\xi, \epsilon) N_{p,q}(\eta, \epsilon), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ – двумерный вектор,

$$G(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{1+iz} \exp\left(-\frac{r^2}{1+iz}\right)$$

– стандартное гауссово решение параксиального уравнения и $N(t) = N_{p,q}(t, \epsilon)$ – тригонометрический многочлен Айнса. Здесь и далее мы рассматриваем все световые поля в безразмерных переменных. Переход к размерным переменным осуществляется заменой $x := x/w_0$, $y := y/w_0$, $z := 2z/(kw_0^2)$, где w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка. Кроме того, мы

будем записывать моды ЭГ, ЛГ и АГ в нормированном варианте (используя жирный шрифт) и без нормировки (используя курсив). В частности,

$$\mathbf{IG}_{p,q}^{(e,o)}(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{IG_{p,q}^{(e,o)}(\mathbf{r}, \epsilon)}{\|IG_{p,q}^{(e,o)}(\mathbf{r}, \epsilon)\|}. \quad (2)$$

Верхний индекс (e или o) означает, что рассматривается чётная или нечётная мода АГ. Параметр ϵ (параметр эллиптичности) является вещественным. Его изменение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет изменять распределение интенсивности моды АГ.

Напомним выражения для мод ЭГ и ЛГ через многочлены Эрмита и Лагерра соответственно:

$$HG_{n,m}(\mathbf{r}, z) = G(\mathbf{r}, z) \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^{(n+m)/2} \times H_n \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} \right) H_m \left(\frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} \right), \quad (3)$$

$$LG_{n,\pm m}(\mathbf{r}, z) = G(\mathbf{r}, z) \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^{n+m/2} \times L_n^m \left(\frac{2r^2}{1+z^2} \right) r^m e^{\pm im\varphi},$$

$$\mathbf{HG}_{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{HG_{n,m}(\mathbf{r})}{\|HG_{n,m}(\mathbf{r})\|}, \quad \|HG_{n,m}(\mathbf{r})\| = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot 2^{n+m} n! m!}, \quad (4)$$

$$\mathbf{LG}_{n,\pm m}(\mathbf{r}) = \frac{LG_{n,\pm m}(\mathbf{r})}{\|LG_{n,\pm m}(\mathbf{r})\|},$$

$$\|LG_{n,\pm m}(\mathbf{r})\| = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n+m)!}{2^m n!}}.$$

Хорошо известно и следует из формул (3), что индексы n, m мод ЭГ – это число горизонтальных и вертикальных нулевых линий интенсивности, а радиальный и азимутальный индексы $n, \pm m$ мод ЛГ – это число нулевых колец интенсивности и топологический заряд оптического вихря в центре. Для мод АГ индексы p, q также определяются через число нулевых линий интенсивности – незамкнутых (гипербол и прямых, это индекс q) и замкнутых (эллипсов, это $(p-q)/2$), причём наличие нулевой линии $y=0$ однозначно указывает, что это нечётная мода АГ. К сожалению, Эдвард Айнс, изучая в 1920-е годы тригонометрические многочлены $N_{p,q}(t, \epsilon)$, рассматривал их как *вещественные* линейные комбинации косинусов или синусов кратных углов, $\cos kt$ или $\sin kt$. Исследовал он их по отдельности, обозначая как $C_p^{(q)}(t, \epsilon)$ и $S_p^{(q)}(t, \epsilon)$, где $0 \leq q \leq p$ и индекс q имеет ту же чётность, что и p , т.е. $q \in \{p, p-2, p-4, \dots\}$. Если бы многочлены $N_{p,q}(t, \epsilon)$ рассматривались как линейные комбинации *комплексных* экспонент e^{ikt} , то всё исследова-

ние можно было бы провести в едином стиле. При этом индекс q пробегал бы все целочисленные значения от 0 до p . Тем не менее, далее мы будем придерживаться уже устоявшихся обозначений.

В предельных случаях $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\pm\infty$ моды АГ сводятся к модам ЛГ и ЭГ. Если $\varepsilon=0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, 0) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{(p-q)/2,q}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, 0) &= \sqrt{2} \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{(p-q)/2,q}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

за исключением случая $(p, q) = (2n, 0)$, когда $\mathbf{IG}_{2n,0}^e(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{LG}_{n,0}(\mathbf{r})$, а нечётной моды АГ просто нет. Если $\varepsilon = +\infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, +\infty) &= (-1)^{(p-q)/2} \mathbf{HG}_{q,p-q}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, +\infty) &= (-1)^{(p-q)/2} \mathbf{HG}_{q-1,p+1-q}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если $\varepsilon = -\infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, -\infty) &= \\ &= \begin{cases} (-1)^{p/2} \mathbf{HG}_{p-q,q}(\mathbf{r}), & p = 2k, \\ (-1)^{(p-1)/2} \mathbf{HG}_{p+1-q,q-1}(\mathbf{r}), & p = 2k+1, \end{cases} \\ \mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, -\infty) &= \\ &= \begin{cases} (-1)^{p/2+1} \mathbf{HG}_{p+1-q,q-1}(\mathbf{r}), & p = 2k, \\ (-1)^{(p-1)/2} \mathbf{HG}_{p-q,q}(\mathbf{r}), & p = 2k+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Для промежуточных значений ε моды АГ сводятся уже не к одной моде ЛГ или ЭГ, а к суперпозиции таких мод. Если выбран базис мод ЛГ, то $\mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, \varepsilon)$ и $\mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)$ разлагаются соответственно по Re- и Im-частям мод $\mathbf{LG}_{k,p-2k}(\mathbf{r})$, где индекс суммирования k пробегает значения от 0 до $\lfloor p/2 \rfloor$. Если выбран базис мод ЭГ, то $\mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, \varepsilon)$ и $\mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)$ разлагаются по модам $\mathbf{HG}_{p-k,k}(\mathbf{r})$, где $0 \leq k \leq p$, но для чётных мод АГ индекс суммирования k пробегает только чётные значения, а для нечётных мод АГ – только нечётные.

В работе [26] мы нашли такие разложения для случаев $p \leq 6$. Например, для чётных и нечётных мод АГ с индексами $(p, q) = \{(2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$ формулы следующие:

$$\mathbf{IG}_{2,2}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{a \cdot \mathbf{HG}_{2,0}(\mathbf{r}) - \mathbf{HG}_{0,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (8)$$

$$\mathbf{IG}_{2,2}^o(\mathbf{r}, \varepsilon) = \mathbf{HG}_{1,1}(\mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{3,1}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) &= -\frac{\sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{3,0}(\mathbf{r}) + b \cdot \mathbf{HG}_{1,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+b^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(b-1) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) + (b+3) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3+b^2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{3,1}^o(\mathbf{r}, \varepsilon) &= -\frac{\sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{2,1}(\mathbf{r}) + c \cdot \mathbf{HG}_{0,3}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+c^2}} = \\ &= \frac{(c-3) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) + \sqrt{3}(c+1) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3+c^2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{3,3}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) &= +\frac{b \cdot \mathbf{HG}_{3,0}(\mathbf{r}) - \sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{1,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+b^2}} = \\ &= \frac{(b+3) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) - \sqrt{3}(b-1) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3+b^2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{3,3}^o(\mathbf{r}, \varepsilon) &= +\frac{c \cdot \mathbf{HG}_{2,1}(\mathbf{r}) - \sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{0,3}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+c^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(c+1) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) - (c-3) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3+c^2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= a(\varepsilon) = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}, \\ b &= b(\varepsilon) = \varepsilon - 1 + \sqrt{(\varepsilon - 1)^2 + 3}, \\ c &= c(\varepsilon) = \varepsilon + 1 + \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 + 3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя равенства $a(\varepsilon)a(-\varepsilon) = 1$ и $b(\varepsilon)c(-\varepsilon) = 3$, легко проверить свойства симметрии мод АГ (8)–(12) при изменении знака параметра эллиптичности:

$$\begin{aligned} \mathbf{IG}_{2n,2m}^e(x, y, -\varepsilon) &= (-1)^m \mathbf{IG}_{2n,2m}^e(y, x, \varepsilon), \\ \mathbf{IG}_{2n,2m}^o(x, y, -\varepsilon) &= (-1)^{m+1} \mathbf{IG}_{2n,2m}^o(y, x, \varepsilon), \\ \mathbf{IG}_{2n+1,2m+1}^e(x, y, -\varepsilon) &= (-1)^m \mathbf{IG}_{2n+1,2m+1}^e(y, x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Можно доказать, что эти свойства сохраняются и для общего случая индексов (p, q) . Моды АГ не являются вихревыми модами и не обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Далее, на основе разложений (8)–(12) и аналогичных разложений с другими индексами (p, q) , мы получим выражения для амплитуд вихревых мод АГ (ВАГ).

2. Разложение вихревых мод АГ по модам ЭГ

Следуя работам [3, 4], будем строить ВАГ-моды (helical Ince-Gaussian modes, hIG modes) как суперпозицию нормированных чётной и нечётной мод АГ, сдвинутых по фазе на $\pi/2$:

$$\mathbf{hIG}_{p,q}^{\pm}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{\mathbf{IG}_{p,q}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) \pm i \mathbf{IG}_{p,q}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Очевидно, что, не изменяя общности, достаточно рассмотреть только случай ВАГ-мод, у которых между компонентами стоит знак '+'. Для индексов $(p, q) = \{(2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$, в силу формул (8)–(12), ВАГ-моды принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{2,2}^+(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{\mathbf{IG}_{2,2}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) + i \mathbf{IG}_{2,2}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{a \cdot \mathbf{HG}_{2,0}(\mathbf{r}) - \mathbf{HG}_{1,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{1+a^2}} + i \mathbf{HG}_{1,1}(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{3,1}^+(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{\mathbf{IG}_{3,1}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) + i \mathbf{IG}_{3,1}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)}{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{3,0}(\mathbf{r}) + b \cdot \mathbf{HG}_{1,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+b^2}} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{2,1}(\mathbf{r}) + c \cdot \mathbf{HG}_{0,3}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+c^2}} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{3,3}^+(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{\mathbf{IG}_{3,3}^e(\mathbf{r}, \varepsilon) + i\mathbf{IG}_{3,3}^o(\mathbf{r}, \varepsilon)}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{b \cdot \mathbf{HG}_{3,0}(\mathbf{r}) - \sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{1,2}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+b^2}} + \right. \\ &\left. + i \frac{c\mathbf{HG}_{2,1}(\mathbf{r}) - \sqrt{3} \cdot \mathbf{HG}_{0,3}(\mathbf{r})}{\sqrt{3+c^2}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как рассматриваемые пучки структурно устойчивы (моды), то при распространении в свободном пространстве они сохраняют форму поперечного распределения своей интенсивности, изменяясь только в масштабе.

3. Орбитальный угловой момент вихревых мод АГ

Разложение ВАГ-мод по модам ЭГ позволяет найти орбитальный угловой момент (ОУМ, orbital angular momentum, ОАМ) этих пучков для любого параметра ε . Известно [27], что для любого структурно устойчивого поля, заданного в плоскости перетяжки разложением по базису мод ЭГ:

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{0 \leq m \leq N} C_m HG_{N-m,m}(\mathbf{r}),$$

его ОУМ вычисляется по формуле

$$\text{ОАМ}[E(\mathbf{r})] = \frac{2 \sum_{1 \leq m \leq N} \text{Im}(C_{m-1}^* C_m) (N+1-m)! m!}{\sum_{0 \leq m \leq N} |C_m|^2 (N-m)! m!}. \quad (19)$$

Если перейти к нормированным полям,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{0 \leq m \leq N} \tilde{C}_m \mathbf{HG}_{N-m,m}(\mathbf{r}),$$

то формула (19) преобразуется следующим образом:

$$\text{ОАМ}[\mathbf{E}(\mathbf{r})] = 2 \sum_{1 \leq m \leq N} \text{Im}(\tilde{C}_{m-1}^* \tilde{C}_m) \sqrt{(N+1-m)m}. \quad (20)$$

Применяя формулу (20) для ВАГ-мод (16) – (18), получаем

$$\begin{aligned} \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{2,2}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] &= \frac{(1+a)\sqrt{2}}{\sqrt{1+a^2}}, \\ \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{3,1}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] &= \frac{(3-2b+bc)\sqrt{3}}{\sqrt{(3+b^2)(3+c^2)}}, \\ \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{3,3}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] &= \frac{(3+2c+bc)\sqrt{3}}{\sqrt{(3+b^2)(3+c^2)}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где параметры a, b, c задаются формулами (13).

Для предельных случаев параметра эллиптичности ($\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\pm\infty$) ВАГ-моды сводятся соответственно к одной стандартной моде ЛГ и к комплексной сумме двух мод ЭГ, благодаря соотношениям (5) – (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{LG}_{(p-q)/2,q}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, +\infty) &= \frac{(-1)^{(p-q)/2}}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \{ \mathbf{HG}_{q,p-q}(\mathbf{r}) + i\mathbf{HG}_{q-1,p+1-q}(\mathbf{r}) \}, \\ \mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, -\infty) &= \\ &= \frac{i^{p-1}}{\sqrt{2}} \{ \mathbf{HG}_{p+1-q,q-1}(\mathbf{r}) + i\mathbf{HG}_{p-q,q}(\mathbf{r}) \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для $\varepsilon=0$ ОУМ ВАГ-моды равен топологическому заряду моды ЛГ: $\text{ОАМ}=q$. Для случаев $\varepsilon=\pm\infty$ также всё просто, т.к. в сумме (20) остаётся только одно слагаемое: $m=p+1-q$ для $\varepsilon=+\infty$ и $m=q$ для $\varepsilon=-\infty$. Итак, для пучков (22) получаем:

$$\begin{aligned} \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, 0)] &= q, \\ \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, \pm\infty)] &= \sqrt{q(p+1-q)}. \end{aligned} \quad (23)$$

В частности, из (23) следует, что ОУМ ВАГ-мод с индексами $p=7$ и $q=1, 3, 5, 7$ при $\varepsilon=0$ равен соответственно 1, 3, 5, 7, а при $\varepsilon=\pm\infty$ ОУМ этих же мод равен соответственно $\sqrt{7}, \sqrt{15}, \sqrt{15}, \sqrt{7}$. Поэтому кривая зависимости ОУМ от ε для моды с $q=7$ должна дважды (при $\varepsilon > 0$ и при $\varepsilon < 0$) пересекать аналогичные кривые ОУМ для $q=3$ и 5. Ранее этот результат был получен численно в работе [4]. Тем самым формулы (23) служат теоретическим обоснованием и обобщением численного результата из работы [4].

Нетрудно также проверить согласие формул (21) с общими результатами (23), подставляя в (21) значения $a(0)=1, b(0)=1, c(0)=3$ и асимптотики $a(\varepsilon) \sim 2\varepsilon, b(\varepsilon) \sim 2\varepsilon, c(\varepsilon) \sim 2\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Выражения (21) – (23) являются одним из основных результатов данной работы, так как аналитически выражают зависимость ОУМ вихревых пучков АГ при некоторых первых индексах (p, q) и любом вещественном параметре ε . Понятно, что аналогично с помощью метода, изложенного в [26], можно получить выражения для ОУМ других вихревых мод АГ ($p > 3$), но эти выражения с увеличением p будут становиться всё более громоздкими. В Приложении А мы приведём без доказательства выражения для ОУМ вихревых мод АГ при $p=4$ и 5.

4. Топологический заряд вихревых мод Айнса–Гаусса

На основе разложения пучков АГ по модам ЛГ (9) – (12) и других из [27] можно определить топологический заряд (ТЗ, topological charge, TC) вихревых мод АГ при $\varepsilon=0, TC=q$. Для ВАГ-мод (16) – (18) этот результат можно проверить непосредственно, полагая $\varepsilon=0$ и переходя к модам ЛГ на основе формул (9) – (12).

Интересно выяснить, меняется ли ТЗ ВАГ мод при изменении параметра ε ? Из (22) видно, что при $\varepsilon=+\infty$ любая ВАГ-мода является суперпозицией двух

мод ЭГ. Поэтому, в силу (3), её нулями являются нули многочлена от двух переменных:

$$H_q(X)H_{p-q}(Y) + i \cdot H_{q-1}(X)H_{p+1-q}(Y), \quad (24)$$

где для краткости мы сделали замену $X = x\sqrt{2}$, $Y = y\sqrt{2}$. Сумма (24) зануляется в двух случаях:

- 1) $H_q(X) = H_{p+1-q}(Y) = 0$,
- 2) $H_{q-1}(X) = H_{p-q}(Y) = 0$.

Поскольку многочлен Эрмита $H_n(t)$ имеет n простых (невыврожденных) вещественных нулей (обозначим их как $t_{n,k}$, где $k=1, 2, \dots, n$), то в первом случае мы имеем набор из $q(p+1-q)$ изолированных нулей $(X_0, Y_0) = (t_{q,v}, t_{p+1-q,\mu})$, где $0 \leq v \leq q$ и $0 \leq \mu \leq p+1-q$, а во втором случае – набор из $(q-1)(p-q)$ изолированных нулей $(X_0, Y_0) = (t_{q-1,v}, t_{p-q,\mu})$, где $0 \leq v \leq q-1$ и $0 \leq \mu \leq p-q$. Можно показать, что все нули в первом случае относятся к нулям типа $(X+iY)$, т.е. имеют ТЗ, равный $+1$, а все нули во втором случае – к нулям типа $(X-iY)$, т.е. имеют ТЗ, равный -1 . Действительно, используя свойства $H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t)$ и $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$, легко заметить, что при фиксированных n и k выражения $H_{n-1}(t_{n,k})$, $H_{n+1}(t_{n,k})$ и $H'_n(t_{n,k})$ отличны от нуля, причём $H_{n-1}(t_{n,k})$ и $H'_n(t_{n,k})$ – одного знака, а $H_{n+1}(t_{n,k})$ и $H'_n(t_{n,k})$ – разных знаков. Поэтому, разлагая сумму (24) в ряд Тейлора до линейных членов в окрестности каждого изолированного нуля (X_0, Y_0) , мы получим, что в первом случае коэффициенты при $(X-X_0)$ и $i(Y-Y_0)$ будут одного знака, и во втором случае коэффициенты при $(Y-Y_0)$ и $i(X-X_0)$ будут одного знака. Тем самым, ТЗ моды $\mathbf{hIG}_{p,q}^+$ при $\varepsilon = +\infty$ равен $q(p+1-q) - (q-1)(p-q) = p$. При $\varepsilon = -\infty$ ТЗ находится аналогично и тоже равен p .

Таким образом, для мод $\mathbf{hIG}_{p,q}^+$ при $q = p$ ТЗ не зависит от параметра ε , но для мод с $q < p$ ТЗ будет увеличиваться с ростом $|\varepsilon|$ от q при $\varepsilon = 0$ до p при $\varepsilon = \pm\infty$. То, что ТЗ увеличивается при увеличении $|\varepsilon|$, не должно быть сюрпризом. Например, разложение $\mathbf{hIG}_{3,1}^+$ по модам ЛГ,

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{3,1}^+(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\sqrt{3}(b-1) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) + (b+3) \operatorname{Re} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{2\sqrt{3+b^2}} + \\ &+ i \cdot \frac{(c-3) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{0,3}(\mathbf{r}) + \sqrt{3}(c+1) \operatorname{Im} \mathbf{LG}_{1,1}(\mathbf{r})}{2\sqrt{3+c^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

показывает, что при стремлении к бесконечности и радиальной переменной r , и параметра ε , без учета общей гауссовой составляющей, вместо (25), получается выражение, зависящее только от азимутального угла φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{3,1}^+(\mathbf{r}, +\infty) \Big|_{r \rightarrow \infty} &\sim \\ &\sim (\sqrt{3} \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) + (\cos \varphi + i\sqrt{3} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно [28], ТЗ суммы двух оптических вихрей с разными коэффициентами равен ТЗ оптического вихря

с большим коэффициентом, а если коэффициенты равны, то большему ТЗ в суперпозиции. Поэтому ТЗ моды (26) равен 3, хотя при $\varepsilon = 0$ он был равен 1.

5. Четность функции ОУМ по параметру ε

Из определения ВАГ-моды (15) следует, что из-за вещественности чётной и нечётной мод АГ смена знака топологии вихревой моды приводит к комплексному сопряжению моды. В силу этого, при смене знака топологии ОУМ тоже поменяет знак:

$$\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^-(\mathbf{r}, \varepsilon)] = -\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)]. \quad (27)$$

С другой стороны, из (14) видно, что при смене знака у параметра ε , ВАГ-мода становится сопряжённой, а декартовы координаты меняются местами:

$$\begin{aligned} \mathbf{hIG}_{p,q}^\pm(x, y, -\varepsilon) &= (-1)^m \times \\ &\times \begin{cases} \mathbf{hIG}_{p,q}^\mp(y, x, \varepsilon), & (p, q) = (2n, 2m), \\ \pm i \cdot \mathbf{hIG}_{p,q}^\mp(y, x, \varepsilon), & (p, q) = (2n+1, 2m+1). \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Перестановка переменных x и y приводит к изменению знака оператора поворота $x\partial_y - y\partial_x$, а замена ε на $-\varepsilon$ приводит к сопряжению ВАГ-моды. Поэтому ОУМ исходной ВАГ-моды при замене ε на $-\varepsilon$ останется прежним. То есть ОУМ любой ВАГ-моды является чётной функцией параметра ε :

$$\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, -\varepsilon)] = \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)]. \quad (29)$$

Интересно выяснить, будет ли ОАМ ВАГ-мод достигать максимума при $\varepsilon = 0$? Для этого есть некоторые основания, т.к. при $\varepsilon = 0$ любая ВАГ-мода сводится к некоторой моде ЛГ (22). Причем при $\varepsilon > 0$ в разложении ВАГ-моды всегда есть несколько мод ЛГ с разными ТЗ, что должно приводить к уменьшению ОУМ из-за перераспределения между несколькими модами. Из (23) следует, что при $q < (p+1)/2$ ОУМ на бесконечности, $\varepsilon = \pm\infty$, будет больше, чем ОУМ при $\varepsilon = 0$, и, наоборот, при $q > (p+1)/2$ ОУМ на бесконечности будет меньше, чем при нулевом ε .

6. Моделирование

На рис. 1 показаны распределения интенсивности для ВАГ-мод, рассчитанных по формуле (15) для индексов $p=7$ и $q=1, 3, 5, 7$. Легко заметить симметрию интенсивностей для случаев ε и $-\varepsilon$ (одна интенсивность превращается в другую при отражении относительно прямой $y=x$), которая следует из формул (14).

На рис. 2 показаны распределения интенсивности (верхняя строка) и фазы (нижняя строка) для ВАГ-мод $\mathbf{hIG}_{p,q}^+(\mathbf{r}, +\infty)$ для индексов $q=1, 3, 5, 7$. Расчет проводился по формуле (22). Радиус перетяжки – 1 мм, размер кадров $-R \leq x, y \leq R$, где $R=10$ мм. Топологический заряд мод на рис. 2 рассчитывался численно по формуле М. Берри [29]:

$$TC[E(r, \varphi)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\partial_\varphi E(r, \varphi)}{E(r, \varphi)} d\varphi, \quad (30)$$

где $E(r, \varphi)$ – комплексная амплитуда ВАГ-моды в плоскости перетяжки в полярных координатах. В численных расчётах радиус окружности, по которой мы вычисляли ТЗ, выбирался равным половине длины стороны кадра на рис. 2. Расчёт ТЗ для разных индексов q привёл к следующим результатам:

$TC = 6,9966237$ ($q = 1$), $TC = 6,9973487$ ($q = 3$), $TC = 6,9973487$ ($q = 5$), $TC = 6,9966237$ ($q = 7$). То есть ТЗ для всех q получался равным $p = 7$, что и предсказывает теория. Из распределения фаз на рис. 2 можно найти 7 линий скачков фазы на 2π , у которых есть начальные точки, расположенные на вертикальной оси ($q = 1$), на горизонтальной оси ($q = 7$) или на двух вертикальных ($q = 3$) и двух горизонтальных линиях ($q = 5$).

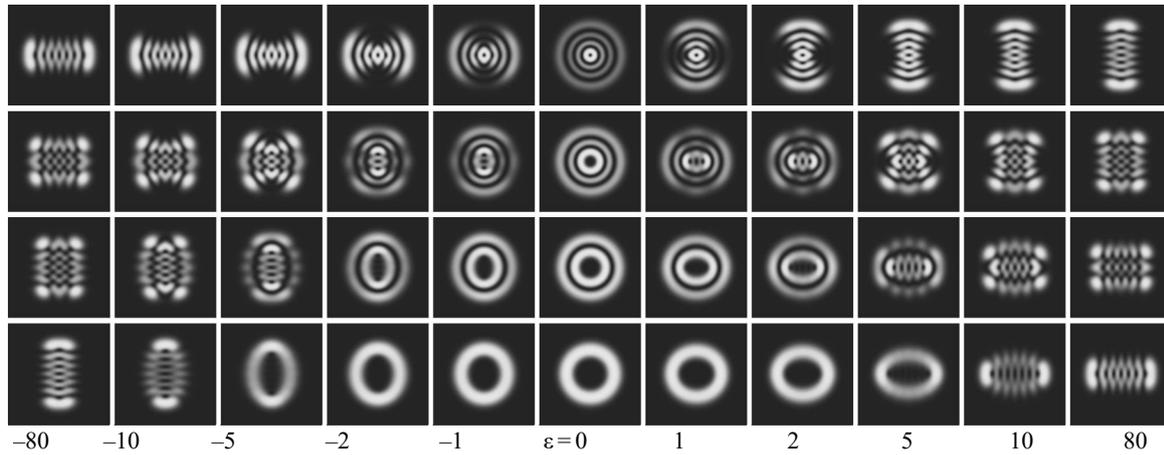


Рис. 1. Распределение интенсивности в перетяжке ВАГ-мод (15) $p = 7$ и $q = 1, 3, 5, 7$ (сверху вниз) и некоторых значениях параметра ϵ

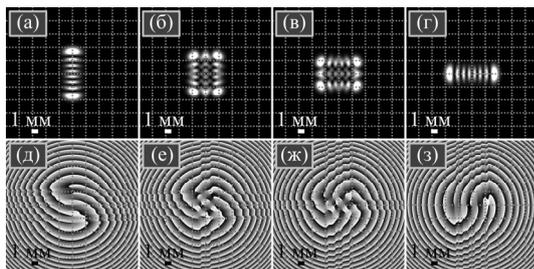


Рис. 2. Интенсивность (сверху) и фаза (снизу) для вихревых мод АГ в начальной плоскости при $\epsilon = +\infty$ для номеров $p = 7, q: 1$ (первый столбец), 3 (второй столбец), 5 (третий столбец) и 7 (четвертый столбец)

На рис. 3–5 показаны интенсивности и фазы мод ВАГ в начальной плоскости для индексов $(p, q) = (2, 2)$, (3,1) и (3,3) при разных значениях параметра ϵ . Радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, размер кадра $-R \leq x, y \leq R = 3$ мм.

Для распределений из рис. 3–5 рассчитывался ОУМ, нормированный на мощность пучка. Для расчёта использовалось выражение через двойной интеграл по всей поперечной плоскости:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} (r, \varphi) r dr d\varphi}. \quad (31)$$

Для полей с рис. 3 численно рассчитанные значения ОУМ составили 1,449085 ($\epsilon = -20$), 1,622474 ($\epsilon = -3$), 1,847747 ($\epsilon = -1$), 1,999962 ($\epsilon = 0$), 1,847747 ($\epsilon = 1$), 1,622474 ($\epsilon = 3$), 1,449085 ($\epsilon = 20$). Соответствующие теоретические значения, полученные по формуле (21), равны 1,449095 ($\epsilon = -20$), 1,622484 ($\epsilon = -3$), 1,847759 ($\epsilon = -1$), 2,000000 ($\epsilon = 0$), 1,847759 ($\epsilon = 1$), 1,622484 ($\epsilon = 3$), 1,449095 ($\epsilon = 20$).

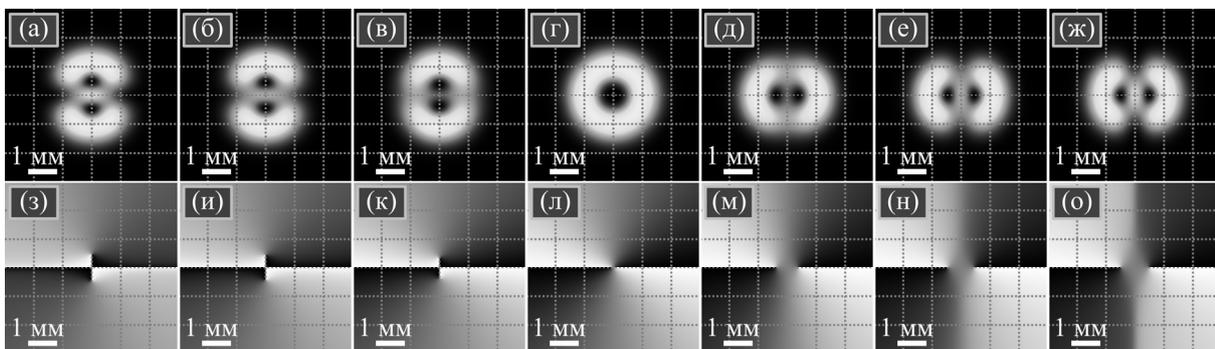


Рис. 3. Распределения интенсивности (а-ж) (чёрный цвет – ноль, белый цвет – максимум) и фазы (з-о) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) моды ВАГ при $(p, q) = (2, 2)$ для $\epsilon = -20$ (а, з), -3 (б, и), -1 (в, к), 0 (г, л), 1 (д, м), 3 (е, н), 20 (ж, о)

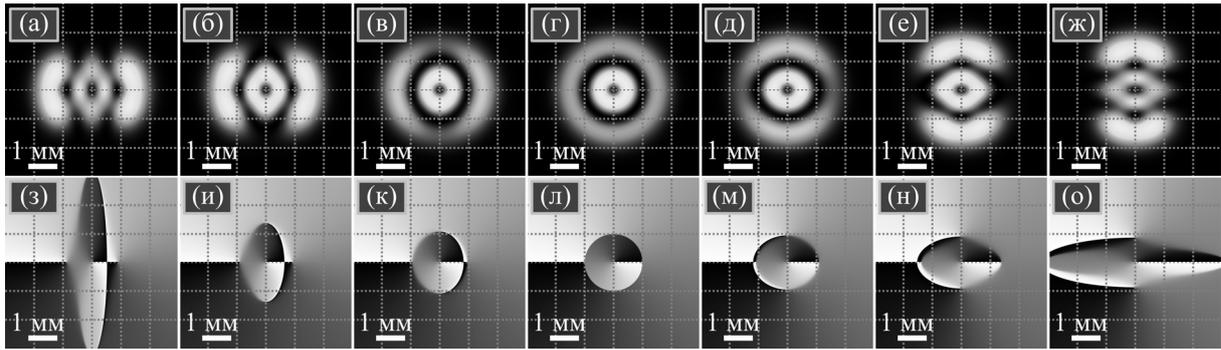


Рис. 4. Распределения интенсивности (а–ж) (чёрный цвет – ноль, белый цвет – максимум) и фазы (з–о) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) моды вАГ при $(p, q) = (3, 1)$ для $\epsilon = -20$ (а, з), -3 (б, и), -1 (в, к), 0 (г, л), 1 (д, м), 3 (е, н), 20 (ж, о)

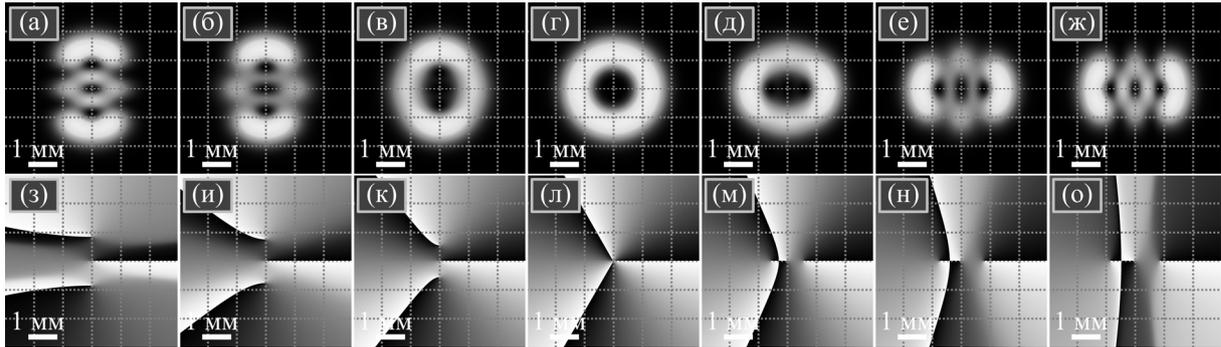


Рис. 5. Распределения интенсивности (а–ж) (чёрный цвет – ноль, белый цвет – максимум) и фазы (з–о) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) моды вАГ при $(p, q) = (3, 3)$ для $\epsilon = -20$ (а, з), -3 (б, и), -1 (в, к), 0 (г, л), 1 (д, м), 3 (е, н), 20 (ж, о)

Для полей с рис. 4 численно рассчитанные значения ОУМ составили 1,649836 ($\epsilon = -20$), 1,331690 ($\epsilon = -3$), 1,081385 ($\epsilon = -1$), 0,999992 ($\epsilon = 0$), 1,081385 ($\epsilon = 1$), 1,331690 ($\epsilon = 3$), 1,649836 ($\epsilon = 20$). Соответствующие теоретические значения, полученные по формуле (21), равны 1,649851 ($\epsilon = -20$), 1,331704 ($\epsilon = -3$), 1,081395 ($\epsilon = -1$), 1,000000 ($\epsilon = 0$), 1,081395 ($\epsilon = 1$), 1,331704 ($\epsilon = 3$), 1,649851 ($\epsilon = 20$).

Для полей с рис. 5 численно рассчитанные значения ОУМ составили 1,822821 ($\epsilon = -20$), 2,396060 ($\epsilon = -3$), 2,900522 ($\epsilon = -1$), 2,999974 ($\epsilon = 0$), 2,900522 ($\epsilon = 1$), 2,396060 ($\epsilon = 3$), 1,822821 ($\epsilon = 20$). Соответствующие теоретические значения, полученные по формуле (21), равны 1,822836 ($\epsilon = -20$), 2,396077 ($\epsilon = -3$), 2,900545 ($\epsilon = -1$), 3,000000 ($\epsilon = 0$), 2,900545 ($\epsilon = 1$), 2,396077 ($\epsilon = 3$), 1,822836 ($\epsilon = 20$).

Таким образом, теоретические значения ОУМ и рассчитанные численно совпадают до 3 знака.

Для рис. 3–5 был также рассчитан ТЗ. Для всех распределений на рис. 3 и 5 он составил соответственно 2 и 3. Для рис. 4 он составил 1 для $\epsilon = -3, -1, 0, 1, 3$, и 3 для $\epsilon = \pm 20$. Получается, что при разных значениях $q < p$ (рис. 4) ТЗ не сохраняется, а увеличивается от $q = 1$ до $p = 3$ при увеличении параметра ϵ от 0 до +20 или уменьшения его от 0 до -20. Этот эффект возникает из-за малой окружности вычисления ТЗ – непосредственно вблизи области существенной интенсивности. Если расширить вычислительную область на рис. 4о, то, аналогично рис. 4и, в дополнение к трём вихрям с ТЗ, равным +1, появятся два вихря с ТЗ, равным -1: один слева от расчётной области и один справа. В ре-

зультате итоговый ТЗ всего поля, рассчитанный по формуле М.В. Берри вдоль окружности бесконечного радиуса, равен 1, хотя на распределении интенсивности на рис. 4ж отчётливо видны три нуля.

Заключение

В работе получены следующие результаты. Приведены явные выражения для комплексных амплитуд вихревых мод АГ, в зависимости от параметра эллиптичности ϵ для малых значений индекса $p = 2, 3, 4, 5$ (уравнения (16)–(18)). Из них нетрудно получить выражения для вихревых мод АГ в предельных случаях при $\epsilon = 0$ и $\epsilon = \pm\infty$, согласующиеся с формулами (22) для общего случая. Для указанных вихревых мод АГ получены явные выражения для ОУМ в зависимости от параметра ϵ (уравнения (21) и в предельных случаях (уравнение (18)). В общем виде показано, что зависимость ОАМ от параметра ϵ является чётной функцией (уравнение (29)). Показано, что при $\epsilon = 0$ топологический заряд вихревых мод АГ равен топологическому заряду моды ЛГ, то есть второму номеру q , а при $\epsilon = +\infty$ равен первому номеру p . Численное моделирование это подтверждает при условии, что топологический заряд вычисляется по окружности, охватывающей область существенной интенсивности пучка. Тем самым, топологический заряд вихревых мод АГ не сохраняется при изменении параметра ϵ .

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00236 (в части теории) и в

рамках Государственного задания НИЦ«Курчатовский институт» (в части моделирования).

References

- [1] Boyer CP, Kalnins EG, Miller Jr W. Lie theory and separation of variables. 7. The harmonic oscillator in elliptic coordinates and Ince polynomials. *J Math Phys* 1975; 16(3): 512-517. DOI: 10.1063/1.522574.
- [2] Miller Jr W. Symmetry and separation of variables. London: Addison-Wesley; 1977.
- [3] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince–Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *J Opt Soc Am A* 2004; 21(5): 873-880. DOI: 10.1364/JOSAA.21.000873.
- [4] Plick WN, Krenn M, Fickler R, Ramelow S, Zeilinger A. Quantum orbital angular momentum of elliptically symmetric light. *Phys Rev A* 2013; 87(3): 033806. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.033806.
- [5] Votto LF, Chafiq A, Gouesbet G, Ambrosio LA, Belafhal A. Ince-Gaussian beams in the generalized Lorenz-Mie theory through finite series Laguerre-Gaussian beam shape coefficients. *J Quant Spectrosc Radiat Transf* 2023; 302: 108565. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2023.108565.
- [6] Abramochkin EG, Kotlyar VV, Kovalev AA. Structurally invariant higher-order Ince-Gaussian beams and their expansions into Hermite-Gaussian or Laguerre-Gaussian beams. *Appl Sci* 2024; 14(5): 1759. DOI: 10.3390/app14051759.
- [7] Nomoto S, Goldstein A, Vyas R, Singh S. Polarization properties of Ince-Gaussian laser beams. *J Opt Soc Am A* 2017; 34(12): 2261-2265. DOI: 10.1364/JOSAA.34.002261.
- [8] Ahmed H, Ansari MA, Paterson L, Li J, Chen X. Metasurface for engineering superimposed Ince-Gaussian beams. *Adv Mater* 2024; 2312853. DOI: 10.1002/adma.202312853.
- [9] Ren YX, Fang ZX, Gong L, Huang K, Chen Y, Lu RD. Dynamic generation of Ince-Gaussian modes with a digital micromirror device. *J Appl Phys* 2015; 117(13): 133106. DOI: 10.1063/1.4915478.
- [10] Baghdasaryan B, Fritzsche S. Enhanced entanglement from Ince-Gaussian pump beams in spontaneous parametric down-conversion. *Phys Rev A* 2020; 102(5): 052412. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.052412.
- [11] Chu SC, Yang CS, Otsuka K. Vortex array laser beam generation from a Dove prism-embedded unbalanced Mach-Zehnder interferometer. *Opt Express* 2008; 16(24): 19934-19949. DOI: 10.1364/OE.16.019934.
- [12] Ohtomo T, Kamikariya K, Otsuka K, Chu SC. Single-frequency Ince-Gaussian mode operations of laser-diode-pumped microchip solid-state lasers. *Opt Express* 2007; 15(17): 10705-10717. DOI: 10.1364/OE.15.010705.
- [13] Schwarz UT, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators. *Opt Lett* 2004; 29(16): 1870-1872. DOI: 10.1364/OL.29.001870.
- [14] Wang MY, Tang J, Wang HJ, Ming Y, Zhang Y, Cui GX, Lu YQ. Generation of second-harmonic Ince-Gaussian beams. *Appl Phys Lett* 2018; 113(8): 081105. DOI: 10.1063/1.5041986.
- [15] Yao-Li, Hu XB, Perez-Garcia B, Bo-Zhao, Gao W, Zhu ZH, Rosales-Guzmán C. Classically entangled Ince–Gaussian modes. *Appl Phys Lett* 2020; 116(22): 221105. DOI: 10.1063/5.0011142.
- [16] Narváez Castañeda E, Guerra Vázquez JC, Ramírez Alarcón R, Agha I, Zhan Q, Plick WN. Ince-Gauss beams in a turbulent atmosphere: the effect of structural parameters on beam resilience. *Opt Continuum* 2022; 1(8): 1777-1794. DOI: 10.1364/OPTCON.461875.
- [17] Woerdemann M, Alpmann C, Denz C. Optical assembly of microparticles into highly ordered structures using Ince–Gaussian beams. *Appl Phys Lett* 2011; 98(11): 111101. DOI: 10.1063/1.3561770.
- [18] Lopez-Aguayo S, Gutiérrez-Vega JC. Elliptically modulated self-trapped singular beams in nonlocal nonlinear media: ellipticons. *Opt Express* 2007; 15(26): 18326-18338. DOI: 10.1364/OE.15.018326.
- [19] Sakpal S, Milione G, Li MJ, Nouri M, Shahoei H, LaFave Jr T, Ashrafi F, MacFarlane D. Stability of Ince–Gaussian beams in elliptical core few-mode fibers. *Opt Lett* 2018; 43(11): 2656-2659. DOI: 10.1364/OL.43.002656.
- [20] Yu Y, Chen Y, Wang C, Wang J, Sun Z, Cao M, Gao H, Li F. Optical storage of Ince–Gaussian modes in warm atomic vapor. *Opt Lett* 2021; 46(5): 1021-1024. DOI: 10.1364/OL.414762.
- [21] Abramochkin E, Razuvaeva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [22] Rodrigo JA, Alieva T, Calvo ML. Gyrator transform: properties and applications. *Opt Express* 2007; 15(5): 2190-2203. DOI: 10.1364/OE.15.002190.
- [23] Abramochkin E, Alieva T, Rodrigo JA. Solutions of paraxial equations and families of Gaussian beams. In Book: Lakshminarayanan V, Calvo ML, Alieva T, eds. *Mathematical optics: classical, quantum, and computational methods*. Boca Raton: CRC Press; 2012: 143-192. ISBN: 143986960X.
- [24] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(5): S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [25] Shen Y., Meng Y, Fu X, Gong M. Hybrid topological evolution of multi-singularity vortex beams: generalized nature for helical-Ince–Gaussian and Hermite–Laguerre–Gaussian modes. *J Opt Soc Am A* 2024; 36(4): 578-587. DOI: 10.1364/JOSAA.36.000578.
- [26] Abramochkin EG, Kotlyar VV, Kovalev AA. Structurally invariant higher-order Ince-Gaussian beams and their expansions into Hermite-Gaussian or Laguerre-Gaussian beams. *Appl Sci* 2024; 14(5): 1759. DOI: 10.3390/app14051759.
- [27] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.
- [28] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
- [29] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.

Приложение А

Ниже мы приведём выражения ОУМ вихревых мод АГ для случаев $p=4$ и 5 . Оба случая требуют нахождения характеристических чисел как корней некоторых кубических уравнений (см. далее). Выглядят все формулы

довольно громоздко, и мы не будем здесь выписывать ни сами корни, ни соответствующие чётные и нечётные моды АГ (они приведены в нашей работе [25]), приведём только выражения ОУМ.

Пусть $p = 4$. Тогда $q = 2m = 0, 2, 4$. Для $q = 0$ мода $\mathbf{hIG}_{4,0}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)$ вещественна, поэтому $\text{ОАМ} = 0$. Для индексов $q = 2$ и $q = 4$ результаты следующие:

$$\begin{aligned} \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{4,2}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] &= \frac{4\varepsilon(d-1) - (\lambda_1^e - 16)(d+1)}{\sqrt{D(\lambda_1^e, \varepsilon)} \cdot \sqrt{1+d^2}} \cdot \varepsilon\sqrt{6}, \\ \text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{4,4}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] &= \frac{4\varepsilon(d+1) + (\lambda_2^e - 16)(d-1)}{\sqrt{D(\lambda_2^e, \varepsilon)} \cdot \sqrt{1+d^2}} \cdot \varepsilon\sqrt{6}. \end{aligned} \tag{A1}$$

$$\text{Здесь } d = d(\varepsilon) = (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 9})/3,$$

$$D(\lambda, \varepsilon) = (16 + 5\varepsilon^2)\lambda^2 - 8(40 + 23\varepsilon^2)\lambda + 6(64 + 100\varepsilon^2 + \varepsilon^4)$$

и $\lambda_m^e(\varepsilon)$ ($m = 0, 1, 2$) – корни характеристического уравнения для чётных мод АГ:

$$\lambda^3 - 20\lambda^2 + (64 - 16\varepsilon^2)\lambda + 192\varepsilon^2 = 0, \tag{A2}$$

пронумерованные в порядке возрастания, $\lambda_0^e < \lambda_1^e < \lambda_2^e$. В частности, $\lambda_0^e(0) = 0$, $\lambda_1^e(0) = 4$, $\lambda_2^e(0) = 16$.

Пусть $p = 5$. Тогда $q = 2m + 1 = 1, 3, 5$ и выражения для ОУМ становятся ещё более громоздкими:

$$\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{5,2m+1}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] = \frac{Q}{4\sqrt{D(\lambda_m^e(\varepsilon), \varepsilon)} \cdot \sqrt{D(\lambda_m^o(\varepsilon), -\varepsilon)}}. \tag{A3}$$

Здесь

$$Q = \{(\lambda_m^e - 9)(\lambda_m^e - 25) - 5\varepsilon^2\} \times \{(\lambda_m^o - 9)(\lambda_m^o - 25) - 5\varepsilon^2\} + 24\varepsilon^2(\lambda_m^e - 25)(\lambda_m^o - 25) + 200\varepsilon^4,$$

$$D(\lambda, \varepsilon) = (48 - 24\varepsilon + 5\varepsilon^2)\lambda^2 - 2(816 - 408\varepsilon + 125\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3)\lambda + 5(2160 - 1080\varepsilon + 577\varepsilon^2 - 6\varepsilon^3 + \varepsilon^4),$$

$\lambda_m^e(\varepsilon)$ ($m = 0, 1, 2$) – корни характеристического уравнения для чётных мод АГ:

$$\lambda^3 - (35 + 3\varepsilon)\lambda^2 + (259 + 102\varepsilon - 13\varepsilon^2)\lambda - (225 + 675\varepsilon - 205\varepsilon^2 - 15\varepsilon^3) = 0, \tag{A4}$$

а $\lambda_m^o(\varepsilon)$ ($m = 0, 1, 2$) – корни характеристического уравнения для нечётных мод АГ, которое получается из (A4) заменой $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$. Как обычно, корни нумеруются в порядке возрастания. В частности, $\lambda_0^{(e,o)}(0) = 1$, $\lambda_1^{(e,o)}(0) = 9$, $\lambda_2^{(e,o)}(0) = 25$.

Отметим, что в предельных случаях (т.е. при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \pm\infty$) для вычисления ОАМ на основе формул (A1), (A3) приходится раскрывать неопределённости вида $0/0$ или ∞/∞ . Например, для $(p, q) = (4, 2)$, если $\varepsilon \sim 0$, то $d \sim 1 + \varepsilon/3$, $\lambda_1 \sim 4 + 8\varepsilon^2/3 - 56\varepsilon^4/27$, $D(\lambda_1, \varepsilon) \sim 432\varepsilon^2 - 2288\varepsilon^4/9$. Поэтому $\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{4,2}^+(\mathbf{r}, \varepsilon)] \sim 2 + 221\varepsilon^2/972$. В частности, при $\varepsilon = 0$ получаем известный результат $\text{ОАМ}[\mathbf{hIG}_{4,2}^+(\mathbf{r}, 0)] = 2$, т.к. $\mathbf{hIG}_{4,2}^+(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{LG}_{1,2}(\mathbf{r})$.

Сведения об авторах

Абрамочкин Евгений Григорьевич, 1962 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Математическая физика». Доктор физико-математических наук (2006 год), работает ведущим научным сотрудником Самарского филиала ФГБУН «Физический институт имени П.Н. Лебедева РАН». В списке научных работ около 50 статей. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: ega@fian.smr.ru ORCID: 0000-0002-7813-8363

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Института систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 21 ноября 2024 г. Окончательный вариант – 09 января 2025 г.

Helical Ince-Gaussian modes as superpositions of Hermite-Gaussian modes

E.G. Abramochkin¹, V.V. Kotlyar^{2,3}

¹ Lebedev Physical Institute, Novo-Sadovaya Str. 221, Samara, 443011, Russia;

² Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",
Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia;

³ Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

We theoretically and numerically investigate helical Ince-Gaussian modes, $\mathbf{hIG}_{p,q}(x, y, \varepsilon)$. Explicit analytical expressions are derived that describe dependence of the orbital angular momentum of the helical Ince-Gaussian modes at $p=2, 3, 4, 5$ on the ellipticity parameter ε . For this purpose, the earlier obtained expansions of Ince-Gaussian modes in terms of Hermite-Gaussian modes are used. We demonstrate that in general the orbital angular momentum is an even function of ε , which changes non-monotonically when ε varies from zero to infinity. At zero ε , the orbital angular momentum is equal to the index q of the Ince-Gaussian mode, whereas at $\varepsilon=\infty$, the orbital angular momentum is $[q(p-q+1)]^{1/2}$. Topological charge of the helical Ince-Gaussian mode depends on ε and is equal to the index q at $\varepsilon=0$ and to the index p at $\varepsilon=\infty$.

Keywords: mode beams, Ince-Gaussian modes, optical vortices, Hermite-Gaussian beams, Laguerre-Gaussian beams, orbital angular momentum, topological charge.

Citation: Abramochkin EG, Kotlyar VV. Helical Ince-Gaussian modes as superpositions of Hermite-Gaussian modes. *Computer Optics* 2025; 49(6): 867-875. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1647.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #23-12-00236 (theory) and within a government project of the NRC "Kurchatov Institute" (numerical simulation).

Author's information

Eugeny Grigor'evich Abramochkin (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: ega@fian.smr.ru ORCID: 0000-0002-7813-8363

Victor Victorovich Kotlyar is a head of laboratory at NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393

Received November 21, 2024. The final version – January 09, 2025.
