

# Измерение орбитальных параметров Стокса структурированных астигматических пучков в критических плоскостях оптической системы первого порядка

А.В. Воляр<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, С.И. Халилов<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

## Аннотация

Разработан и экспериментально воплощен метод измерения орбитальных параметров Стокса, включая орбитальный угловой момент как неоднородного астигматического пучка, так и однородного неастигматического структурированного пучка, в оптической системе первого порядка. В процессе измерений мы использовали свойства первой и второй критических плоскостей, возникающих вблизи фокуса сферической линзы и ее двойного фокуса соответственно, которые являются плоскостями наблюдения. Теоретически и экспериментально обнаружено, что в критических плоскостях возникает не только равенство радиусов пучков в  $x$ - и  $y$ -направлениях, но также разность фаз Гуи в  $x$ - и  $y$ -компонентах испытывает резкие изменения на  $\pi/2$  и  $2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , в первой и второй критических плоскостях соответственно. Кроме того, в критических плоскостях проявляется эффект взаимности между поперечным моментом интенсивности  $W_{xy}$  и орбитальным угловым моментом, а также эффект самовосстановления всех параметров пучка во второй критической плоскости, присущих исходному пучку. Эти свойства структурированного пучка позволяют найти все три орбитальных параметра Стокса посредством измерения трех  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{xy}$  моментов интенсивности с 4 % погрешности измерений, а также отобразить состояния пучка в виде прямого и обратного вращения траектории на орбитальную сферу Пуанкаре.

**Ключевые слова:** пучки Лагерра–Гаусса, ABCD-матрица, структурированный свет, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Измерение орбитальных параметров Стокса структурированных астигматических пучков в критических плоскостях оптической системы первого порядка / А.В. Воляр, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 6. – С. 876-884. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1677.

**Citation:** Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Measurement of the orbital Stokes parameters in structured astigmatic beams in critical planes of the first-order optical system. Computer Optics 2025; 49(6): 876-884. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1677.

## Введение

Распространение лазерного пучка через оптическую систему, содержащую астигматические линзы, сопровождается радикальной перестройкой его фазовой и амплитудной структуры, в частности, орбитального углового момента (ОУМ) [1 – 4]. Так, например, свободный от оптических вихрей лазерный пучок может приобрести аномально большой ОУМ под действием цилиндрической линзы [5, 6]. Важным этапом в этих исследованиях стало открытие конверсии ОУМ в оптической системе из двух цилиндрических линз [7 – 10], где пучки Эрмита–Гаусса (ЭГ) преобразуются в пучки Лагерра–Гаусса (ЛГ) или наоборот, а также можно осуществлять конверсию знака ОУМ. Однако конверсию ОУМ можно осуществлять даже в простейшей системе, состоящей из двух сферических линз и цилиндрической линзы, как это предсказали авторы статьи [11]. Одна из таких оптических схем рассмотрена в работе [12], состоящей из двух последовательно расположенных сферических линз и третьей цилиндрической линзы. Несколько иначе происходит

преобразование цилиндрической линзой устойчивых структурированных пучков Лагерра–Гаусса (сЛГ) [13 – 15], состоящих из множества ЭГ-пучков с управляемыми фазами и амплитудами [16]. Оказывается, что некоторые состояния сЛГ сохраняют свою внутреннюю структуру даже под действием цилиндрической линзы [17], конечно, исключая ее собственные ЭГ-моды. Авторы статьи [18] подошли к этой проблеме с другой стороны, используя цилиндрическую линзу для определения топологического заряда оптического вихря. Этот подход был расширен до измерения орбитальных параметров Стокса (включающих ОУМ) в однородных, свободных от астигматизма структурированных сЛГ-пучках [19]. Однако этот подход можно использовать исключительно для неастигматических пучков. Но, с другой стороны, было обнаружено [20], что Фурье-преобразование астигматического пучка в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы освобождает пучок от астигматизма, т.е. превращает астигматический пучок в исходный, идентичный пучку на входе в цилиндрическую линзу. Исследование такого необычного действия сферической

линзы, наряду с корректирующим преобразованием на астигматический пучок, может обладать еще дополнительными геометрическими свойствами в определенных критических плоскостях, где тонкая структура пучка радикально изменяется.

Сразу поясним, что непосредственно, в любом сечении структурированного пучка, можно измерять только три элемента матрицы моментов интенсивности второго порядка  $\mathbf{P}$ , а именно средние квадратичные отклонения картины интенсивности  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{xy}$  вдоль различных направлений сечения структурированного пучка [21], образующие первые два  $S_1$  и  $S_2$  орбитальные параметры Стокса. Измерение третьего орбитального параметра Стокса  $S_3$ , связанного с ОУМ  $\ell_z$ , требует специальных условий, при которых его можно связать с измеряемыми матричными элементами. Как мы покажем, такая связь возникает в критических плоскостях.

Таким образом, цель нашей статьи имеет два уровня – вспомогательный и основной. Вспомогательная цель статьи направлена на детальное теоретическое и экспериментальное исследование преобразований астигматического пучка в его критических плоскостях, где все состояния астигматического пучка можно задать через физически измеримые величины. Основной целью статьи является разработка и воплощение способа измерения орбитальных параметров Стокса в астигматических структурированных пучках с использованием свойств критических плоскостей и последующим отображением состояний пучка на орбитальную сферу Пуанкаре.

### 1. Теоретическое обоснование и компьютерное моделирование

Астигматические преобразования вырожденных однопараметрических гибридных пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) подробно рассмотрены в ряде статей Абрамочкина и соавторов [22]. Пространственное вырождение ЭЛГ-пучков снимается в сЛГ-пучках, которые можно представить в виде суммы наклоненного под углом  $3\pi/4$  стандартного ЭЛГ-пучка и ЛГ-пучка, делая его двухпараметрической волновой структурой [20].

#### 1.1. ABCD матричный формализм

Распространение однородного структурированного сЛГ-пучка через оптическую систему на рис. 1 с двумя сферическими линзами  $L_1$ ,  $L_2$  и цилиндрической линзой  $CL$ , расположенной между ними, сопровождается рядом астигматических преобразований.

Первая линза  $L_1$  формирует на входе цилиндрической линзы  $CL$  сЛГ-пучок с радиусом перетяжки  $w_0$  при условии  $z_0 = (kw_0/2) = 2f_{cl}$ , где  $f_{cl}$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Цилиндрическая линза превращает сЛГ-пучок в асЛГ-пучок с простым астигматизмом. Сферическая линза  $L_2$  проецирует картину поля пучка из плоскости, расположенной на расстоянии  $Z_1 = z_1/z_0$  перед  $L_2$  линзой, в плоскость,

расположенную на расстоянии  $Z_2 = z_2/z_0$  после  $L_2$  линзы. Эта последовательность преобразований задает комплексную амплитуду асЛГ-пучка в виде [20]

$$asLG_{n,\ell}(x, y, z | \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_{x2}\bar{w}_{y2}}} \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_{x2}} + \frac{y^2}{\bar{q}_{y2}}\right]\right) e^{i\Phi_{n,\ell}} \sum_{k=0}^{2n+\ell} C_k H_{2n+\ell-k}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_{x2}}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_{y2}}\right), \quad (1)$$

где  $x, y \rightarrow x/w_0, y/w_0$ ,  $Z = z/z_0$ .

$$C_k = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0) \varepsilon_k \exp(ik\Gamma_{xy}), \quad (2)$$

где  $\Phi_{n,\ell} = (2n + \ell + 1/2)\Gamma_x/2 + \Gamma_y/2$ ,  $\varepsilon_k = (1 + \varepsilon e^{ik\theta})$ ,

$$\bar{q}_{x2} = \frac{\bar{q}_x}{-z_0/f_{sh}\bar{q}_x + 1} + Z_2, \quad (3)$$

$$\bar{q}_{y2} = \frac{(1 - Z_2\kappa_{sh})(Z - i) + Z_2}{1 + i\kappa_{sh}(iZ + 1)},$$

$$\bar{q}_x(z) = \frac{[Z(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i}{\kappa_x^2 + 1}, \quad q_y(z_1) = Z_1 - i, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\bar{w}_{x2}^2} = -\text{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{x2}}\right), \quad \frac{1}{w_{y2}^2} = -\text{Re}\left(\frac{i}{\bar{q}_{y2}}\right), \quad (5)$$

$$\Gamma_x = \arg\sqrt{\frac{1}{\bar{q}_{x2}}}, \quad \Gamma_y = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{q}_{y2}}}\right), \quad (6)$$

где  $\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y$ ,  $P_k^{(n,m)}(\cdot)$  – полином Якоби,  $\varepsilon_k = (1 + \varepsilon \exp(ik\theta))$ .

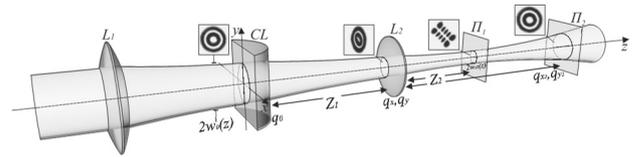


Рис. 1. Эскиз оптической системы из двух сферических линз  $L_1$  и  $L_2$  и цилиндрической линзы  $CL$ , расположенной между ними

В основу наших исследований преобразования однородного пучка в оптической системе с цилиндрической и сферической линзой положены два условия для их  $x$ - и  $y$ - пространственных компонент, а именно, условие равенства радиусов перетяжек  $\bar{w}_x = \bar{w}_y$  и условие наличия особенностей в разности фаз Гуй  $\Gamma_{xy}$  в (1) после сферической линзы. Проявление этих условий иллюстрируют кривые на рис. 2а-в. Оказывается, что их выполнение зависит от положения сферической линзы  $Z_1$  и положения плоскости наблюдения  $Z_2 = \Pi_{1,2}$ , как это видно из рис. 2а, б. Если положение сферической линзы  $L_2$   $Z_1 \leq f_{sh}$  меньше ее фокусного расстояния, то наблюдается только одно условие равенства радиусов  $\bar{w}_x(Z) = \bar{w}_y(Z)$ , как видно из рис. 2а. Если же  $Z_1 > f_{sh}$ , то возникает уже два случая,

где выполняется это условие в различных положениях  $Z_2$  плоскости наблюдения. При положении плоскости наблюдения  $Z_2 = \Pi_1 = 0,09$  м одновременно выполняются два критических условия: равенство  $x$ - и  $y$ -радиусов пучков  $\bar{w}_x(\Pi_2 = 0,09) = \bar{w}_y(\Pi_2 = 0,09)$  (рис. 2б) и разность фаз Гуй  $\Gamma_{xy}(Z_2 = \Pi_1 = 0,09) = -\pi/2$  для пучка с  $n = 3, \ell = 5$  на рис. 2в. Сдвиг плоскости наблюдения в положение  $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$  м вновь приводит к новому выполнению критических условий:  $\bar{w}_x(\Pi_2 = 0,2) = \bar{w}_y(\Pi_2 = 0,2)$ , так что разность фаз  $\Gamma_{xy}(Z_2 = \Pi_2 = 0,2 \text{ м}) = 0$  обращается в ноль. Фактически в области  $\Pi_2 = 0,09$  разность фаз Гуй носит резонансный характер в виде узкого всплеска, до  $\Gamma_{xy} = \pi/2$ , а затем быстро снижается. Положения плоскостей наблюдения, где одновременно выполняются как условие равенства  $x$ - и  $y$ -радиусов, так и кратность разности фаз Гуй  $\pi/2$  или 0, будем называть первой и второй критической плоскостью соответственно. Ниже мы покажем, что в этих плоскостях возникает радикальная перестройка тонкой структуры пучков.

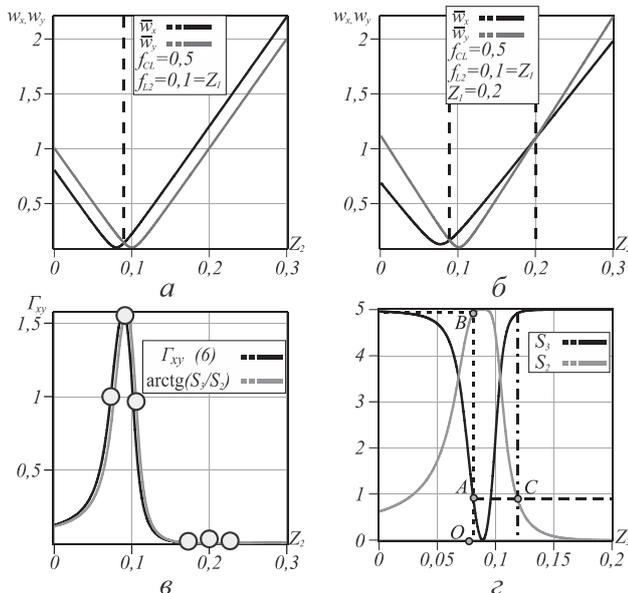


Рис. 2. Зависимость: (а, б)  $w_x$  и  $w_y$  радиусов перетяжек пучков от положения  $Z_2$  плоскости наблюдения при различных положениях  $Z_1$  сферической линзы, (в) фаза Гуй  $\Gamma_{xy}$ , (черная кривая) рассчитанная по стандартной формуле (б) и (серая кривая) через отношение  $\arctg(S_3/S_2)$ ; (г) пунктирные и точечные прямые в точках пересечения с  $S_3$  и с  $S_2$  кривыми указывают на положение первой и второй плоскостей измерения  $S_3 = \ell$  и  $S_2 = 4W_{xy}$  для  $n = 3, \ell = 5$

### 1.2. Преобразования ЛГ- и ЭГ-мод

Сначала рассмотрим детали процесса конверсии ОУМ и восстановление исходной тонкой структуры ЛГ-пучка после прохождения цилиндрической и сферической линзы, а далее распространим эти условия на весь класс структурированных сЛГ-пучков. ОУМ структурированного пучка рассчитывался по формуле (15) из нашей недавней статьи [20] с учетом амплитуд

мод (2). Для исходного ЛГ-пучка в формуле (1) полагалось  $\varepsilon = 0$ . Преобразование ОУМ в плоскости наблюдения  $Z_2$  представлено на рис. 3а-г. На входе цилиндрической линзы формировался ЛГ-пучок с картиной интенсивности на расстоянии  $Z_2 = 0$ , который представлен на рис. 3б, г. На рис.3в приведена сетка линий равной фазы, характерная для идеального вихря с ОУМ  $\ell_z = 5$  и тремя кольцевыми дислокациями с  $n = 3$ . В окрестности первого фокуса сферической линзы  $L_2$  при  $Z_1 = f_{sh} = 0,1$  м возникает резкий провал ОУМ, который достигает нуля  $\ell_z = 0$  при  $\Pi_2 = 0,09$ , который соответствует выполнению первого условия для равенства радиусов перетяжек пучка  $\bar{w}_x = \bar{w}_y$  и разности фаз Гуй, равной  $\pi/2$  на рис. 2в. Такое положение плоскости наблюдения  $Z_2 = \Pi_1$  после сферической линзы соответствует формированию ЭГ-моды, картина интенсивности которой приведена на рис. 2в, г. Небольшой сдвиг от  $Z_2 = 0,09$  приводит к резкому увеличению ОУМ до  $\ell_z \approx 5$ . Однако структура исходной ЛГ-моды полностью не восстанавливается. Полное восстановление структуры ЛГ-моды возникает только в плоскости  $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$ , что соответствует второму условию равенства радиусов перетяжек пучка  $\bar{w}_x = \bar{w}_y$  на рис. 2б и нулевой разности фаз  $\Gamma_{xy}$  на рис. 2з. Небольшое отклонение плоскости наблюдения от этого положения приводит к слабой эллиптической деформации картины интенсивности и распаду осевого вихря с топологическим зарядом (ТЗ)  $T_3 = 5$  на пять единичных вихрей, что слабо сказывается на величине ОУМ. Эллипс интенсивности [2, 4, 21] на рис.3в при  $Z_2 = 0,4$ , охватывающий пять единичных вихрей, соответствует экспериментальным характеристическим эллипсам, полученным при измерении орбитальных параметров Стокса (см. статью [19] и следующий параграф «Эксперимент»). Важно отметить, что конверсия знака ОУМ не возникает ни при каких значениях  $Z_1$  и плоскости наблюдения  $Z_2$  сферической линзы  $L_2$ . В дополнение к кривой ОУМ на рис. 3а приведена пунктирная кривая зависимости нормированного поперечного момента интенсивности  $4W_{xy}^{norm}$ , который, как мы покажем далее, играет ключевую роль в процессе измерения. Важно подчеркнуть, что  $W_{xy}$  в первой критической  $\Pi_1 = 0,09$  плоскости имеет выраженный максимум.

### 1.3. Отображение астигматических преобразований сЛГ пучка

Прежде чем углубиться в исследование процесса измерения, сфокусируемся не едином представлении множества состояний asLG-пучка и его отображении на орбитальной сфере Пуанкаре, заданной в декартовых координатах орбитальных параметров Стокса [19]:

$$S_1 = W_{xx}(Z_1, Z_2) - W_{yy}(Z_1, Z_2), \tag{7}$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_1, Z_2) - W_{yx}(Z_1, Z_2), \tag{8}$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xx} \\ W_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_1, Z_2) dx dy, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} W_{xy} \\ W_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_1, Z_2) dx dy. \quad (10)$$

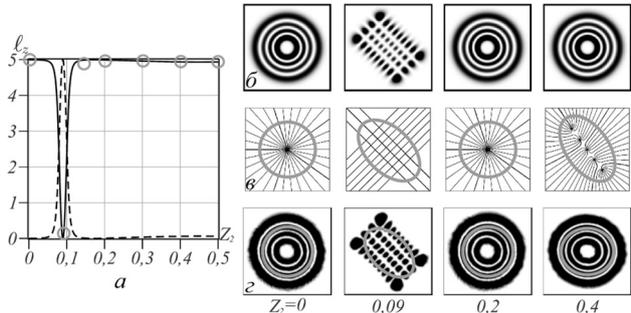


Рис. 3. (а) Преобразование ОУМ (сплошная кривая) и поперечный момент интенсивности  $4W_{xy}$  (пунктирная кривая) в ЛГ-пучке с  $n = 3$ ,  $\ell = 5$  после цилиндрической линзы с  $f_{cl} = 0,5$  м и сферической линзы с  $f_{sp} = Z_1 = 0,1$  м. (б) Компьютерное моделирование картины интенсивности пучка при различных  $Z_2$ . (в) Эллипс интенсивности на фоне сетки линий равной фазы пучка при различных  $Z_2$  (г) Экспериментальные картины интенсивности пучка и их эллипсы интенсивности при различных  $Z_2$

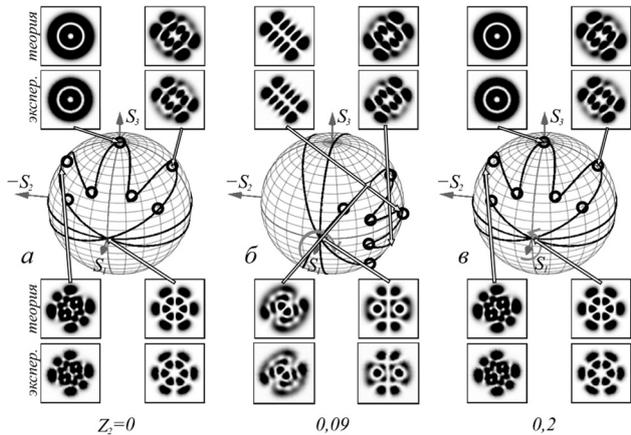


Рис. 4. Отображение состояний сЛГ-пучка при различных значениях  $\theta$  с  $n = 1$ ,  $\ell = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  на орбитальную сферу Пуанкаре в трехлинзовой системе: (а) сЛГ-пучок на входе цилиндрической линзы  $Z_1 = 0,1$ ,  $Z_2 = 0$ ; (б)  $Z_1 = 0,1$ ,  $Z_2 = 0,09$ , (в)  $Z_1 = 0,1$ ,  $Z_2 = 0,2$ ;  $f_{cl} = 0,5$  м,  $f_{sp} = 0,1$  м,  $z_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Сверху и снизу сферы представлены теоретические и экспериментальные картины интенсивности состояний пучка, указанных стрелками, на сфере экспериментальные точки (черные кружки)

Термин орбитальные параметры Стокса введен благодаря третьему параметру, связанному на недиагональные элементы  $M_{xy}$  и  $M_{yx}$  матрицы моментов интенсивности  $\mathbf{P}$  [20], характеризующие ОУМ  $\ell_z$

$$S_3 = \ell_z = M_{xy}(Z_1, Z_2) - M_{yx}(Z_1, Z_2), \quad (11)$$

где

$$\begin{pmatrix} M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} asLG^*(x, y, Z_1, Z_2) \times \begin{pmatrix} x\partial_y \\ y\partial_x \end{pmatrix} asLG(x, y, Z_1, Z_2) dx dy. \quad (12)$$

К сожалению, его нельзя измерить непосредственно на эксперименте, но, как мы покажем ниже, он жестко связан с физически измеряемыми элементами матрицы  $\mathbf{P}$  на критических плоскостях.

Вычисление параметров (9) – (12) с учетом выражения (1) дает:

$$W_{xx} = \left( \bar{w}_x^2(z) / 4J_{00} \right) \sum_{j=0}^N (2N - 2j + 1) \times (N - j)! |C_j|^2, \quad (13)$$

$$W_{yy} = \left( \bar{w}_y^2(z) / 4J_{00} \right) \sum_{j=0}^N (2j + 1)(N - j)! |C_j|^2, \quad (14)$$

$$W_{xy} = \left( \frac{\bar{w}_x(z)\bar{w}_y(z)}{2J_{00}} \right) \sum_{j=0}^{N-1} (N - j)! \times (j + 1)! \text{Re}(C_j C_{j+1}^*), \quad (15)$$

$$\ell_z = \frac{2}{J_{00}} \sum_{j=0}^{N-1} (j + 1)(N - j)! \text{Im}(C_j C_{j+1}^*). \quad (16)$$

Полученные выражения позволяют единым образом показать действие оптической системы из трех линз на все возможные состояния сЛГ-пучка, представленные в виде траектории на орбитальной сфере Пуанкаре на рис. 4 (построение траекторий детально рассмотрено в работе [19]). Напомним, что Северному полюсу  $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 1\}$  соответствуют положительные максимальные значения ОУМ, а Южному полюсу – отрицательные значения  $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -1\}$ . На экваторе  $S_3 = 0$  ОУМ всех состояний равно нулю. Движение точки по экватору или параллелям соответствует вращению оси характеристического эллипса моментов интенсивности без изменения ОУМ, а движение вдоль меридианов сопровождается изменением ОУМ при постоянной ориентации характеристического эллипса. На рис. 4 представлены траектории состояний сЛГ-пучка с  $n = 1$ ,  $\ell = 3$  для трех положений плоскости наблюдения  $Z_2$  и постоянном положении сферической линзы  $L_2$  с  $Z_1 = 0,1$ : (а) асЛГ-пучок перед цилиндрической линзой, (б)  $Z_2 = \Pi_1 = 0,09$  – первая критическая плоскость; (в)  $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$  – вторая критическая плоскость. Траектория асЛГ-пучка перед цилиндрической линзой (рис. 4а) на сфере Пуанкаре имеет три лепестка. При  $Z_2 = 0$  трехлисточник ориентирован вертикально, так что верх центрального лепестка достигает максимального  $S_3 = \text{ОУМ}$ . При сдвиге плоскости наблюдения в положение первой критической плоскости  $Z_2 = \Pi_1 \rightarrow 0,09$  траектория на сфере начинает вращаться вокруг оси  $S_1$  как единое целое и поворачивается на  $\pi/2$  для пучка в первой

критической плоскости  $\Pi_2 = 0,09$  (рис. 4б). Здесь центральный лепесток ориентирован вблизи экватора, а его максимальный ОУМ стал равным нулю, в то время как точка на экваторе  $\{S_1 = 0, S_2 = -1, S_3 = 0\}$  преобразовалась в точку на Южном полюсе с минимальным ОУМ  $\{S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -1\}$ . Неподвижными точками при вращении остаются только состояния с нулевым ОУМ  $\{S_1 = \pm 1, S_2 = 0, S_3 = 0\}$ . Дальнейший сдвиг плоскости наблюдения  $Z_2 \rightarrow 0,2$  м приводит к обратному вращению траектории. При сдвиге плоскости наблюдения в положение второй критической плоскости  $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$  траектории на орбитальной сфере Пуанкаре (рис. 4в) полностью совмещаются с исходной траекторией, так что все состояния сЛГ-пучка полностью воспроизводятся. Расчет степени корреляции экспериментальных и теоретических картин интенсивности на рис. 4а–в составляет  $\eta \approx 0,96$  (см. параграф «Эксперимент»).

1.4. Эффекты взаимного самосогласования и самовосстановления в критических плоскостях

Приведенная геометрическая интерпретация роли критических плоскостей в астигматических преобразованиях структурированного пучка подчеркивает глубинную связь между орбитальными параметрами Стокса и физически измеряемыми средними квадратичными отклонениями  $W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}$ , в частности, между ними и ОУМ. Но это утверждение требует также и количественного подтверждения как при компьютерном моделировании, так и на эксперименте. Как мы показали, в первой критической плоскости, где при повороте на  $\pi/2$  меняются местами параметры  $S_3$  и  $S_2$ , которые задаются поперечным моментом интенсивности  $\ell_z \rightarrow 4W_{xy}$ . Назовем этот процесс *эффектом самосогласования* ОУМ и поперечного углового момента. Во второй критической плоскости происходит обратный процесс замены  $\ell_z \leftarrow 4W_{xy}$ , при котором восстанавливается исходное состояние структурированного пучка перед цилиндрической линзой. Мы назвали этот процесс *эффектом самовосстановления*. Количественное соответствие для этих эффектов иллюстрирует рис. 5.

Самовосстановление структуры пучка, в частности, совмещение ОУМ  $S_3(Z=0) = \ell_z(\Pi_2 = 0,2)$  в плоскости цилиндрической линзы  $Z=0$  и во второй критической  $Z_2 = \Pi_2 = 0,2$  плоскости иллюстрирует рис. 5а. Самосогласование ОУМ и поперечного момента интенсивности во второй и первой критических плоскостях  $\ell_z(\Pi_2 = 0,09) = 4W_{xy}(\Pi_1 = 0,2)$  показано на рис. 5б. Можно показать, что этот процесс воспроизводится для любых  $n$  и  $\ell$  квантовых чисел. Аналогичные совмещения кривых на рис. 5в, г показывают, что эффекты самосогласования и самовосстановления проявляются при любых амплитудных параметрах, в частности для  $\varepsilon = 1$ . Взаимосвязь между ОУМ  $S_3 = \ell_z$  и физически измеряемым поперечным моментом

интенсивности  $4W_{xy}$  объясняется достаточно просто. Дело в том, что  $\ell_z$  и  $W_{xy}$  являются мнимой (Im) и действительной (Re) частью одной и той же функции комплексного переменного, различающимися только умножением на  $i$  – мнимую единицу [20], без учета масштабного множителя. Изменение разности фаз между  $x$ - и  $y$ -направлениями амплитуд соседних,  $k$ -й и  $k+1$ -й, ЭГ-модами в (1) контролируется разностью фаз Гуй  $\pi/2$ , которая наблюдается в первой критической плоскости (см. рис. 2в, г).

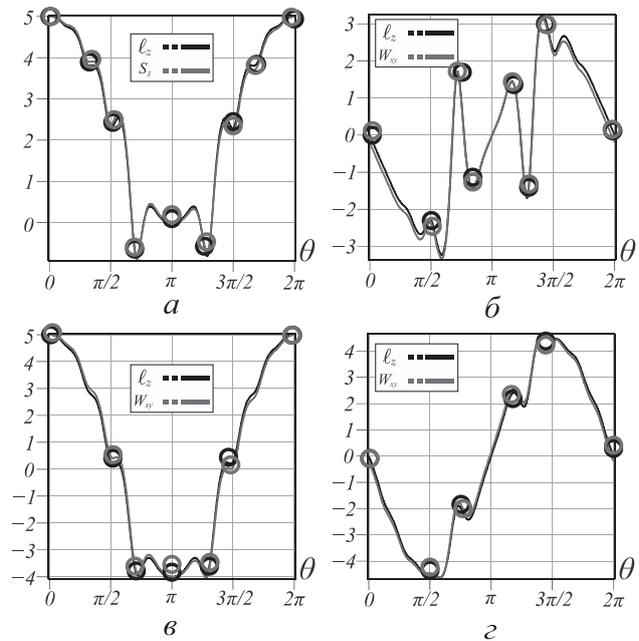


Рис. 5. (а) Самовосстановление ОУМ  $\ell_z(Z=0) = S_3(\Pi_2 = 0,2)$  и (б) самосогласование ОУМ и поперечного момента интенсивности  $4W_{xy} : 4W_{xy}(\Pi_2 = 0,2) = \ell_z(\Pi_1 = 0,09)$ . Чтобы кривые были различимы между собой, они искусственно сдвинуты на  $\pi/40$ . Кружки соответствуют экспериментальным точкам

Симметрии прямого и обратного вращения на орбитальной сфере Пуанкаре и эффектам самовосстановления и самосогласования в системе из двух сферических и цилиндрической линзы между ними соответствует два инварианта

$$\begin{aligned} Inv_1 &= S_1(Z_1, Z_2) = const, \\ Inv_2 &= S_2^2(Z_1, Z_2) + 16W_{xy}^2(Z_1, Z_2) = const, \end{aligned} \tag{17}$$

при заданных  $\varepsilon$  и  $\theta$  управляющих параметрах. Ключевым моментом процесса измерений является преобразование моды ЛГ в моду ЭГ и наоборот в первой и второй критических плоскостях. Такими преобразованиями управляет астигматическая разность фаз Гуй  $\Gamma_{xy}$ , возникающая при распространении пучка через цилиндрическую и сферическую линзу. Если воспользоваться общими свойствами параметров Стокса [26], то  $S_2 \sim \cos \Gamma_{xy}$  и  $S_3 \sim \sin \Gamma_{xy}$ , так что астигматическая разность фаз задается как  $\Gamma_{xy} = \arctg(S_3 / S_2)$ . Контуры кривых практически совпадают, что указывает на

возможность как вычисления, так и измерения астигматической фазы через момент интенсивности  $W_{xy}$ . В первой критической плоскости  $Z_2=0,09$  астигматическая фаза  $\Gamma_{xy}=\pi/2$ . Во второй критической плоскости астигматическая фаза компенсируется  $\Gamma_{xy}=0$ , что соответствует восстановлению исходного состояния пучка.

Полученные результаты позволяют распространить метод измерения орбитальных параметров Стокса, разработанный для пучков, свободных от астигматизма (см. статьи [19, 20]), и на астигматические пучки, как мы увидим в следующем параграфе.

## 2. Модифицированный метод измерения орбитальных параметров Стокса сЛГ- и асЛГ-пучков

Ранее нами был разработан экспериментальный метод измерения орбитальных параметров Стокса структурированных пучков, который работает по аналогии с измерением поляризационных параметров Стокса [19]. Здесь роль поляризатора выполняют физически измеряемые моменты интенсивности  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{xy}$  пучка на входной плоскости цилиндрической линзы, которые определяют первые два орбитальных параметра  $S_1$  и  $S_2$ . Для измерения третьего орбитального параметра Стокса  $S_3 = \ell_z$  необходимо, чтобы выполнялось условие  $z_0 = 2f_{cl}$  на цилиндрической линзе. Кроме того, измерение поперечного момента интенсивности  $W_{xy}$  проводится в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы  $Z = 2f_{cl}$ . Оказывается, что плоскость перед цилиндрической линзой и плоскость в ее двойной плоскости являются критическими плоскостями, где выполняется условие  $\ell_z = 4W_{xy}$  с точностью до масштаба множителя. Таким образом, цилиндрическая линза и свободное пространство до плоскости ее двойного фокуса играют роль четвертьволновой пластинки в поляризационной оптике.

В данном параграфе мы рассмотрим модификацию существующего метода, а также распространим его как на астигматические, так и свободные от астигматизма структурированные пучки. Главное отличие модифицированного метода измерения орбитальных параметров Стокса от ранее известного метода для неастигматических пучков связано с оптимальным выбором критических плоскостей в оптической системе первого порядка. Рассмотрим два примера измерения орбитальных параметров Стокса:

- 1) в неастигматическом сЛГ-пучке;
- 2) в астигматическом асЛГ-пучке [20]. Обозначим через  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  положение первой и второй критических плоскостей.

### 2.1. Измерение сЛГ-пучка

В этом случае первые два орбитальных параметра Стокса  $S_1$  и  $S_2$  необходимо измерять во второй критической плоскости  $Z_2 = \Pi_2$ . Для этого достаточно сделать только один снимок картины интенсивности в этой плоскости. Далее осуществить компьютерную

обработку картины интенсивности в соответствии с формулами

$$S_1 = W_{xx}(Z = \Pi_2) - W_{yy}(Z = \Pi_2), \quad (18)$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_2) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_2), \quad (19)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xx} \\ W_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} I(x, y, Z_2 = \Pi_2) dx dy, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} W_{xy}(D_2) \\ W_{yx}(D_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} \times \\ \times I(x, y, Z_2 = \Pi_2) dx dy. \quad (21)$$

Для измерения  $S_3$  воспользуемся эффектом взаимности  $\ell_z$  и  $W_{xy}$ , и измерения проводим в первой критической плоскости  $Z_2 = \Pi_1$

$$S_3 = 4[W_{xy}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_1)], \quad (22)$$

где

$$\begin{pmatrix} W_{xy}(\Pi_1) \\ W_{yx}(\Pi_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix} \times \\ \times I(x, y, Z_2 = \Pi_1) dx dy. \quad (23)$$

### 2.2. Измерение асЛГ-пучка

Для измерения астигматического асЛГ-пучка воспользуемся эффектом самовосстановления перед цилиндрической линзой и в двойном фокусе цилиндрической линзы и заменим критическую плоскость  $\Pi_2$  на  $\Pi_1$  в уравнениях (18) – (21):

$$S_1 = W_{xx}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yy}(Z_2 = \Pi_1), \quad (24)$$

$$S_2 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_1) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_1). \quad (25)$$

Для измерения  $S_3$  асЛГ-пучка воспользуемся эффектом самосогласования и переместимся во вторую критическую плоскость  $Z_2 = \Pi_2$  и аналогично (22) найдем  $S_3$  параметр:

$$S_3 = W_{xy}(Z_2 = \Pi_2) - W_{yx}(Z_2 = \Pi_2). \quad (26)$$

Важной частью наших экспериментальных исследований явилось измерение астигматической разности фаз Гуи как в первой и второй критических плоскостях, так и в их окрестности. Очевидно, что смещение от критических плоскостей требует уточнения метода измерений. Последовательность измерительного процесса иллюстрирует рис. 2з. Предположим, что нам требуется измерить параметры  $S_2$  и  $S_3$  в точке  $O = Z_2 = 0,08$ . Перпендикуляр к точке  $O$  (точечная линия  $OB$  на рис. 2з) пересечет кривую  $S_3$  в точке  $A$  и кривую  $S_2$  в точке  $B$ . Поскольку мы не можем непосредственно измерить  $OUM = S_3$ , мы измеряем  $S_2$  в точке  $B$  (на самом деле измеряется поперечный момент

интенсивности  $W_{xy}$  в этой плоскости, через который вычисляется  $S_2$  по формуле (25), где  $\Pi_1 = 0,08$ ). Для измерения параметра  $S_3$  вернемся к точке  $A$  и проведем через нее прямую  $AC$ , параллельную оси  $Z_2$ , пересекающую кривую  $S_2(Z_2)$  в точке  $C = Z_2 = 0,13$ . В этой второй плоскости измеряется поперечный момент интенсивности в соответствии с формулой (26), где  $\Pi_2 = 0,13$ . Измерение параметров  $S_2$  и  $S_3$  позволяет рассчитать астигматическую разность фаз  $\Gamma_{xy}$ . Результаты измерений приведены кружочками на рис. 2в.

### 3. Эксперимент

#### 3.1. Положение критических плоскостей

Как мы уже отмечали, для определения орбитальных параметров Стокса требуется только два снимка картины интенсивности в критических плоскостях оптической системы. Но для того, чтобы найти их положение, мы можем измерять исключительно моменты интенсивности  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$  как средние квадратичные отклонения в картине интенсивности структурированного пучка. Как станет понятно далее, для этого придется воспользоваться дополнительными геометрическими свойствами моментов интенсивности астигматических пучков. Основную роль в процессе измерения будет играть эллипс интенсивности [19–25]

$$W_{yy}x^2 + W_{xx}y^2 - 2W_{xy}xy = \det \mathbf{W}, \quad (27)$$

$\det \mathbf{W} = W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2$ , который задает эллиптичность  $Q$  как отношение его полуосей (см. например, формулы (12) – (6) в параграфе 7 в [24 – 25])

$$Q = \frac{\sqrt{W_{xx} + W_{yy} + \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}}}{\sqrt{W_{xx} + W_{yy} - \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}}}, \quad (28)$$

и угол наклона  $\psi$  большой оси эллипса

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2W_{xy}}{W_{xx} - W_{yy}}. \quad (29)$$

Чтобы найти на эксперименте положение критических плоскостей, обратимся к преобразованию ОУМ  $\ell_z(Z_2)$  исходного ЛГ-пучка вдоль длины  $Z_2$  после сферической линзы, изображенного на рис. 3. Так, в первой критической плоскости  $\Pi_2 = 0,09$  наблюдается узкий провал ОУМ, в то время как поперечный момент интенсивности  $W_{xy}$  испытывает резкий всплеск, изображенный на рис. 6а. Однако наиболее оптимальным является измерения эллиптичности  $Q(Z_2)$  и угла наклона  $\psi(Z_2)$ , где проявляются их особенности. Так, эллиптичность  $Q$  в окрестности первой критической плоскости на рис. 6б имеет М-образную форму в виде двух максимумов и минимума, в то время как угол наклона эллипса  $\psi$  резко изменяется. Эти изменения связаны с быстрыми преобразованиями структуры пучка в этих точках, представленными

на рис. 6в. Определению положения второй критической плоскости также способствуют особенности  $Q(Z_2)$  и  $\psi(Z_2)$ , возникающие в ее окрестности. Здесь эллиптичность равна единице  $Q(Z_2 = 0,2) = 1$ , где угол наклона становится неопределенным, что проявляется в повороте эллипса на  $\pi/2$  в окрестности плоскости. Как видно из рис. 6г, эти изменения легко отследить через измерения моментов интенсивности  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$ .

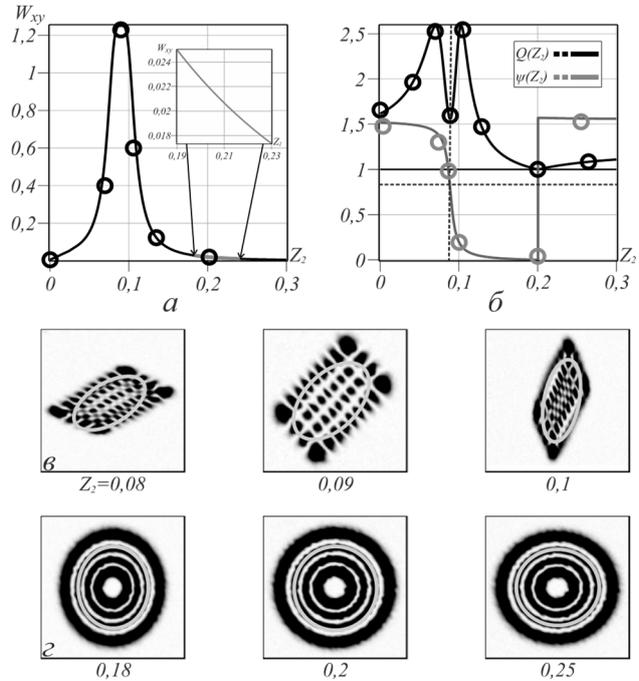


Рис. 6. (а) Изменения перекрестного момента интенсивности  $W_{xy}$  вдоль длины  $Z_2$ , на вставке показано изменение  $W_{xy}$  вблизи второй критической плоскости  $Z_2 = 0,2$ ; (б) изменение эллиптичности  $Q$  и угла наклона  $\psi$  эллипса интенсивности вдоль длины  $Z_2$ ; (в) Экспериментальные картины интенсивности в окрестности первой критической плоскости  $Z_2 = 0,09$  и (г) в окрестности второй критической плоскости  $Z_2 = 0,2$ . Экспериментальные эллипсы интенсивности на рисунке (в, г) представлены на фоне картин интенсивности. Кружки на кривых (а, б) соответствуют результатам измерений

#### 3.2. Измерение орбитальных параметров Стокса

В основу процесса измерений положена экспериментальная установка, которая подробно обсуждалась в наших статьях [19 – 22]. Эскиз рабочей части экспериментальной установки показан на рис. 1. В качестве голографического устройства для формирования структурированных пучков использовался пространственный модулятор света типа Thorlabs EXULUS-4K1/M, а детекторами служили полупроводниковые металлооксидные сенсоры типа Michrome 20. Цилиндрическая линза с фокусным расстоянием  $f_{cl} = 0,5$  м устанавливалась неподвижно, тогда как сферическая линза с фокусным расстоянием  $f_{sp} = 0,1$  м и фотодетектор закреплялись на оптических столиках типа

Thorlabs, USA “MAX603D” с 3D продольными смещениями и 3D-вращениями. Это позволяло устанавливать положение линзы и фотодетектора в плоскости наблюдения с точностью  $\Delta z \approx 0,1$  мм. Во входной плоскости цилиндрической линзы формировалось пятно гауссова пучка так, чтобы его длина Релея была порядка  $z_0 = 1 \pm 1,5 \cdot 10^{-3}$  м.

Сначала измерялись положения критических плоскостей посредством измерения  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$  моментов интенсивности в окрестности теоретического положения критических плоскостей. Для этого осуществлялось до 5 снимков картин интенсивности для положения как первой  $\Pi_1 = 0,09$ , так и второй  $\Pi_2 = 0,2$  критических плоскостей с шагом 1 мм. Компьютерная обработка картин интенсивности в соответствии с формулами (20) и (21) осуществлялась при  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$  момента интенсивности. Полученные экспериментальные результаты сравнивались с результатами компьютерного моделирования. Выбирались наиболее оптимальные значения моментов интенсивности, которые отличались от результатов компьютерного моделирования на величину не более 4%. На основе этих результатов вычислялись первые два  $S_1$  и  $S_2$  орбитальных параметров Стокса по формулам (18), (19), (22) как для сЛГ-пучка, так и для асЛГ-пучка, изменяя лишь порядок анализа критических плоскостей, далее строились характеристические эллипсы интенсивности (27), эллиптичность и угол наклона большой оси эллипса по формулам (28) и (29) соответственно. Для расчета третьих  $S_3$  параметров Стокса использовались формулы (22) для первой критической плоскости и (26) для второй критической плоскости. Результаты измерений представлены экспериментальными точками на рис. 3 и рис. 6а, б и характеристическими эллипсами на рис. 7в, г. Кроме того, все картины интенсивности на рисунках получены экспериментально. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов дает рассогласование не более 4%.

### Выводы

В нашей статье разработан и воплощен метод измерения орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ как для обычных структурированных пучков света [19], так и для астигматических структурированных пучков в оптической системе первого порядка. Основными элементами оптической системы являются две сферические линзы и цилиндрическая линза между ними. Первым условием измерительного процесса является требование, чтобы длина Релея  $z_0$  гауссова пучка на входе цилиндрической линзы была равна ее двойному фокусу. Важным этапом процесса измерений является определение положения критических плоскостей, где проявляются четыре свойства структурированных пучков. Первым свойством является равенство радиусов пучков в  $x$ - и  $y$ -направлениях. Второе свойство относится к разности фаз Гуй  $\Gamma_{xy}$  в  $x$ - и

$y$ -компонентах астигматического пучка, так что в первой плоскости выполняется условие кратности разности фаз  $\Gamma_{xy} = \pi/2$ , и во второй плоскости разность фаз равна  $\Gamma_{xy} = 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Третье свойство проявляется в эффекте взаимности между ОУМ  $\ell_z$  и поперечным моментом интенсивности  $W_{xy}$  в первой и второй критической плоскости. Четвертым свойством является эффект самовоспроизведения структурированного пучка во второй критической плоскости, идентичного пучку и на входе цилиндрической линзы. Геометрической иллюстрацией преобразования астигматического структурированного пучка между критическими плоскостями является прямое и обратное вращение его траектории как единого целого на орбитальной сфере Пуанкаре. Теоретически обнаружено и экспериментально подтверждено, что распространение структурированного пучка между второй сферической линзой и первой критической плоскостью отображается поворотом траектории его состояний на  $90^\circ$ . Распространение пучка между первой и второй критическими плоскостями сопровождается обратным вращением траектории до полного совмещения с исходной на второй критической плоскости. Мы также провели измерение астигматической разности фаз Гуй  $\Gamma_{xy}$ , ответственной за эволюцию третьего орбитального параметра Стокса  $\ell_z = S_3$ . Астигматическая разность фаз определялась как арктангенс отношения  $S_3/S_2$ .

Эти свойства позволяют измерять орбитальные параметры Стокса по аналогии с измерением поляризационных параметров Стокса, где роль поляризатора и четвертьволновой пластинки играют моменты интенсивности  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$ , как средние квадратичные отклонения в картине интенсивности. Результаты измерений согласуются с компьютерным моделированием с 4-процентной погрешностью.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-22-00278).

### References

- [1] Luneburg RK. Mathematical theory of optics. Berkeley, CA, USA: University of California Press; 1966.
- [2] Arnaud JA, Kogelnik H. Gaussian light beams with general astigmatism. Appl Opt 1969; 8(8): 1687-1693. DOI: 10.1364/AO.8.001687.
- [3] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. Opt Commun 1991; 83(1): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [4] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. J Opt Soc Am A 2003; 20(8): 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [5] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. Opt Commun 1997; 144(4): 210-213. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.

- [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
- [7] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [8] Franke-Arnold S, Allen L, Padgett M. Advances in optical angular momentum. *Laser Photon Rev* 2008; 2(4): 299-313. DOI: 10.1002/lpor.200810007.
- [9] Zhang K, Wang Y, Yuan Y, Burokur SN. A review of orbital angular momentum vortex beams generation: From traditional methods to metasurfaces. *Appl Sci* 2020; 10(3): 1015. DOI: 10.3390/app10031015.
- [10] Karpeev SV, Alferov S, Khonina SN. Generation and conversion of mode beams and their polarization states on the basis of diffractive optical elements application. *Opt Eng* 2013; 52(9): 091718. DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091718.
- [11] Abramochkin EG, Razueva EV, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams and its transformation in astigmatic optical systems. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya* 2006; 2(42): 103-121.
- [12] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [13] Shvedov V, Krolikowski W, Volyar A, Neshev DN, Desyatnikov AS, Kivshar YuS. Focusing and correlation properties of white-light optical vortices. *Opt Express* 2005; 13(19): 7393-7398. DOI: 10.1364/OPEX.13.007393.
- [14] Porfirev AP, Khonina SN, Ivliev NA, Porfirev DP. Formation of laser beams with a structured polarization distribution for the fabrication of spiral microreliefs in thin films of chalcogenide glasses. *Computer Optics* 2024; 48(5): 676-680. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1501.
- [15] Volyar A, Shvedov V, Fadeyeva T, Desyatnikov AS, Neshev DN, Krolikowski W, Kivshar YuS. Generation of single-charge optical vortices with an uniaxial crystal. *Opt Express* 2006; 14(9): 3724-3729. DOI: 10.1364/OE.14.003724.
- [16] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M. Control of the orbital angular momentum via radial numbers of structured Laguerre-Gaussian beams. *Opt Lett* 2022; 47(10): 2402-2405. DOI: 10.1364/OL.459404.
- [17] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Y, Bretsko M. Superbursts of the orbital angular momentum in astigmatic-invariant structured LG beams. *Opt Lett* 2022; 47(21): 5537-5540. DOI: 10.1364/OL.474385.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [19] Volyar A, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Y. Simple direct measurement of the orbital stokes parameters in structured vortex beams. *Photonics* 2024; 11(11): 1095. DOI: 10.3390/photonics11111095.
- [20] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Y. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. DOI: 10.3390/photonics11030191.
- [21] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(8): 2257-2264. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002257.
- [22] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(5): S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [23] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. *Computer Optics* 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
- [24] Anan'ev YuA, Bekshaev AY. Theory of intensity moments for arbitrary light beams. *Opt Spectrosc* 1994; 76(4): 558-568.
- [25] ISO 11146-2:2021. Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 2: General astigmatic beams. Geneva, Switzerland: ISO; 2021.

#### Сведения об авторах

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика.  
E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Брецько Михаил Владимирович** – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика.  
E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

**Халилов Сервер Искандарович** – ассистент кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика.  
E-mail: [server.khalilov.94@mail.ru](mailto:server.khalilov.94@mail.ru)

**Акимова Яна Евгеньевна** – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика.  
E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru)

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 09 февраля 2025 г. Окончательный вариант – 16 марта 2025 г.

---

# Measurement of the orbital Stokes parameters in structured astigmatic beams in critical planes of a first-order optical system

A.V. Volyar<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, S.I. Khalilov<sup>1</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,  
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4

## Abstract

In this work, a method for measuring the orbital Stokes parameters of an inhomogeneous astigmatic beam in an optical system of the first order is developed and experimentally implemented. Unlike the method of measuring orbital parameters in homogeneous beams, our technique employs properties of critical planes that arise in a space between cylindrical and spherical lenses, as well as the observation plane. Theoretically and experimentally, it is revealed that in the critical planes, not only is there equality of beam radii in the  $x$  and  $y$  directions, but also the Gouy phase difference in the  $x$  and  $y$  components is equal to  $\pi/2$  and  $2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  in the first and second critical planes, respectively. Additionally, in the critical planes, the reciprocity principle between the transverse intensity moment  $W_{xy}$  and OAM is fulfilled, as well as the correspondence principle between all beam parameters in the second critical plane and the front plane of the cylindrical lens. These properties of the structured beam make it possible to find all three orbital Stokes parameters by measuring three  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ , and  $W_{xy}$  intensity moments with a 4% measurement error, as well as to map the beam states onto the orbital Poincare sphere.

**Keywords:** vortex beams, ABCD-matrix, structured light; orbital angular momentum.

**Citation:** Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Measurement of the orbital Stokes parameters in structured astigmatic beams in critical planes of the first-order optical system. *Computer Optics* 2025; 49(6): 876-884. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1677.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00278.

---

## Author's information

**Alexander Vladimirovich Volyar**, (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Mikhail Vladimirovich Bretsko**, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. He is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics.

E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

**Server Iskandarovich Khalilov**, (b. 1994) assistant of Business Informatics and Mathematical Modeling department of the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky. Research interests: singular optics, laser physics.

E-mail: [server.khalilov.94@mail.ru](mailto:server.khalilov.94@mail.ru)

**Yana Evgenievna Akimova**, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. She is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics.

E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru)

---

Received February 09, 2025. The final version – March 16, 2025.

---