

## Анализ поведения параметров перепутывания для трехкубитной модели Тависа–Каммингса с многофотонными процессами

А.Р. Багров<sup>1</sup>, Е.К. Башкиров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В данной работе мы детально проанализировали динамику критерия отрицательности, степени совпадения и полной согласованности для модели Тависа–Каммингса, в которой три кубита находятся в общем одномодовом идеальном резонаторе и взаимодействуют резонансно с модой поля посредством многофотонных процессов. Решив нестационарное уравнение Шрёдингера, мы приводим аналитические решения для истинно перепутанных состояний типа Вернера и Гринбергера–Хорна–Цайлингера. Показано, что кратность фотонных переходов может существенно стабилизировать истинно перепутанные состояния обоих типов. Выделены ключевые особенности в поведении динамики параметров перепутывания. Мы приходим к выводу, что критерий отрицательности непригоден для описания динамики перепутывания кубитов в случае трехкубитных состояний Гринбергера–Хорна–Цайлингера. Показаны главные преимущества полной согласованности над критерием отрицательности.

**Ключевые слова:** кубиты, многофотонные процессы, отрицательность, степень совпадения, полная согласованность, резонатор.

**Цитирование:** Багров, А.Р. Анализ поведения параметров перепутывания для трехкубитной модели Тависа–Каммингса с многофотонными процессами / А.Р. Багров, Е.К. Башкиров // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 6. – С. 899-908. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1679.

**Citation:** Bagrov AR, Bashkirov EK. Analysis of the behavior of entanglement parameters for the three-qubit Tavis–Cummings model with multiphoton processes. Computer Optics 2025; 49(6): 899-908. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1679.

### Введение

В настоящее время наблюдается значительный прогресс в разработке сверхпроводящих мультикубитных схем с большим временем когерентности, встроенных в одномерные, двумерные и трехмерные сверхпроводящие резонаторы [1], которые могут выполнять роль квантовых вентилях. Квантовые вентиля являются базовыми элементами современного квантового компьютера. При этом универсальные квантовые вентиля могут быть реализованы как на основе двухкубитных систем (например, C-NOT или C-Z двухкубитные вентиля) в сочетании с серией однокубитных вращений [2, 3], так и с использованием трехкубитных систем (вентили типа Тоффоли или Фредкина) [4]. Использование трехкубитных вентилях дает ряд существенных преимуществ при решении задач квантовой обработки информации, поскольку позволяет реализовать на квантовом компьютере более сложные квантовые алгоритмы, а также улучшать схемы квантовой коррекции ошибок [5]. Использование трехкубитных схем в качестве логических элементов квантовых компьютеров позволяет также решить и ряд других проблем физики квантовых вычислений. Так, например, внедрение третьего сверхпроводящего кубита в двухкубитный вентиль Z-типа позволило устранить перекрестное взаимодействие пары рабочих кубитов при однокубитных операциях [6]. Разработка квантовых

алгоритмов на основе трехкубитных вентилях стимулировало в последние годы особый интерес к изучению динамики трехкубитных систем, внедренных в сверхпроводящие резонаторы. Для теоретического описания динамики кубитов в сверхпроводящих резонаторах широко используют модели Джейнса–Каммингса (МДК) и ее многоатомные, многоуровневые и многофотонные обобщения, поскольку такие модели естественным образом описывают взаимодействие двухуровневых атомов (кубитов) с микроволновыми полями резонаторов. В последнее время особое внимание уделяется изучению нелинейных версий МДК и ее обобщений, описывающих недипольное взаимодействие света и материи, в частности многофотонные модели. Это связано с существенным прогрессом в технике эксперимента в области квантовой обработки информации, который позволил добиться режимов сильной и ультрасильной связи кубитов с полями резонаторов. Генерация и управление многофотонными состояниями представляет собой сложную задачу, поскольку многофотонные взаимодействия, как правило, очень слабы. Однако в связи с тем, что многофотонные взаимодействия находят широкое применение во многих областях, таких как квантовые вычисления, квантовая метрология, квантовая память, квантовая литография и даже биологические системы [7, 8], в последнее время было потрачено много усилий для разработки методов генерации многофотонных состояний в

самых разных системах, в частности системах квантовой электродинамики резонаторов (РКЭД) [9]. В РКЭД исследуется взаимодействие кубитов различной физической природы с выделенными модами электромагнитных полей 1D-, 2D- и 3D-резонаторов в условиях, которые максимально просто можно реализовать экспериментально.

В настоящее время наиболее востребованными для описания экспериментов, описывающих нелинейные взаимодействия кубитов различной физической природы (сверхпроводящих контуров с джозефсоновскими переходами, ионов в магнитных ловушках, нейтральных атомов, квантовых точек, примесных спинов) с полями сверхпроводящих резонаторов, оказались одно- и двухкубитные модели типа Джейнса–Каммингса с двухфотонными переходами (см. ссылки в [10, 11]). В частности, модели с двухфотонным взаимодействием использовались для описания результатов эксперимента по перепутыванию сверхпроводящих кубитов в копланарном резонаторе [12]. В последнее время появился ряд работ, в которых удалось экспериментально реализовать в области нелинейной микроволновой квантовой оптики многофотонные взаимодействия атомов с полем резонатора. Так, например, в работе [13] исследовано взаимодействие сверхпроводящего кубита с высокоимпедансным LC-контуром (аналогом копланарного резонатора), в котором процессы второго, третьего и четвертого порядка имеют сравнимую амплитуду. Реализация этих беспрецедентно высокопорядковых фотонных процессов открывает широкие перспективы в микроволновой многофотонной квантовой логике [14]. Появление таких экспериментов инициировало повышенный интерес к изучению моделей РКЭД с многофотонными переходами. В настоящее время имеется большое число работ, в которых исследовались различные аспекты динамики однокубитных и двухкубитных моделей типа Джейнса–Каммингса с многофотонными переходами [15].

В связи с возможностями использования трехкубитных систем для эффективного решения целого ряда задач в области квантовой обработки информации большое внимание также уделялось теоретическому и экспериментальному изучению динамики перепутанных состояний кубитов различной физической природы (см. ссылки в [16]). При этом основное внимание уделялось изучению трехкубитных систем РКЭД с однофотонными переходами. Поэтому представляет несомненный интерес изучение динамики перепутывания трехкубитных систем с многофотонными переходами. Заметим, что системы кубитов, наиболее широко используемые в квантовой обработке информации, встраиваются в сверхпроводящие резонаторы, поддерживаемые при очень низких температурах (например, около 10 мК для сверхпроводящих джозефсоновских кубитов). В этом случае тепловые фотоны в резонаторе практически отсутствуют.

Это позволяет при изучении динамики кубитов в резонаторах, используемых для квантовой обработки информации, в промежутках времени между воздействием на них управляющих или считывающих микроволновых импульсов, учитывать их взаимодействие только с вакуумным полем резонатора. В этом случае для трехкубитной многофотонной модели Джейнса–Каммингса (в отличие от случая когерентных, сжатых, тепловых полей резонатора) возможно получить не только точные аналитические выражения для известных критериев перепутывания подсистемы кубитов, но и найти временную волновую функцию системы для любых начальных состояний кубитов, что позволяет дать полный анализ особенностей динамики перепутывания подсистемы кубитов. Учитывая, что все известные параметры перепутывания трехкубитных систем не могут рассматриваться в качестве строгих количественных критериев, для рассматриваемой модели появляется также возможность проведения сравнения особенностей временного поведения таких параметров. В случае трехкубитных систем обычно выделяют три типа возможных состояний: сепарабельные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния Вернера ( $W$ -состояния) и состояния Гринбергера–Хорна–Цайлингера ( $GHZ$ -состояния) [17]. Наиболее интересными для современных квантовых технологий являются истинно перепутанные состояния.  $GHZ$ -состояния могут быть использованы для детерминированной телепортации и плотного кодирования, а  $W$ -состояния, которые пригодны для решения широкого класса задач, – в области квантовой обработки информации. На сегодняшний момент перепутанные состояния кубитов  $W$ - и  $GHZ$ -типа были экспериментально реализованы для различных физических систем: сверхпроводящих колец с джозефсоновскими переходами, ионов в магнитных ловушках и примесных спинов (см. ссылки в [16]).

В настоящей работе найдена точная динамика системы, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с общим одномодовым вакуумным полем микроволнового резонатора без потерь. На его основе дан полный анализ особенностей динамики перепутывания кубитов для начальных истинно перепутанных состояний  $W$ - и  $GHZ$ -типа. Для этого проведен детальный анализ как временных зависимостей ряда критериев перепутывания кубитов, так и временной волновой функции, содержащей максимум информации о состоянии модели.

### **1. Описание исследуемой модели**

Опишем интересующую нас модель. Мы исследуем динамику перепутывания трёх идентичных кубитов  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ , которые захвачены в общий копланарный резонатор и резонансно взаимодействуют с вакуумным полем данного резонатора посредством многофотонных переходов. Предполагается, что постоянные взаимодействия кубитов с полем резонатора

равны, то есть  $\gamma_{Q_1} = \gamma_{Q_2} = \gamma_{Q_3} \equiv \gamma$ . Мы также пренебрегаем различными диссипативными эффектами. Гамильтониан рассматриваемой модели в картине взаимодействия запишется в стандартных приближениях следующим образом:

$$\hat{H}_{int} = \hbar\gamma \sum_{i=1}^3 (\hat{a}^{+m} \hat{R}_i^- + \hat{R}_i^+ \hat{a}^m), \tag{1}$$

где введены стандартные обозначения:  $\hat{a}^+$  ( $\hat{a}$ ) – оператор рождения (уничтожения) фотона в моде резонатора,  $\hat{R}_i^+$  ( $\hat{R}_i^-$ ) – повышающий (понижающий) оператор в  $i$ -кубите,  $m$  – кратность фотонных переходов.

Мы предполагаем, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в одном из W-состояний следующего вида:

$$|W_1(0)\rangle = \cos\alpha |-, -, +\rangle + \sin\alpha \sin\beta |-, +, -\rangle + \sin\alpha \cos\beta \times |+, -, -\rangle, \tag{2}$$

$$|W_2(0)\rangle = \cos\alpha |+, +, -\rangle + \sin\alpha \sin\beta |+, -, +\rangle + \sin\alpha \cos\beta \times |-, +, +\rangle, \tag{3}$$

либо в GHZ-подобном состоянии

$$|G(0)\rangle = a |+, +, -\rangle + b |+, -, +\rangle + c |-, +, +\rangle + d \times |-, -, -\rangle. \tag{4}$$

Здесь  $\alpha, \beta, a, b, c$  и  $d$  – параметры, которые определяют начальную степень перепутывания кубитов и удовлетворяют условию нормировки. В качестве

начального состояния поля резонатора мы выбираем вакуумное поле  $|\Phi(0)\rangle_F = |0\rangle$ .

Исследовать динамику перепутывания кубитов для начальных состояний (2)–(4) и начального вакуумного состояния поля резонатора можно с использованием нестационарного уравнения Шрёдингера для  $|\Psi_1(t)\rangle = |\Psi\rangle_{ABC} \otimes |0\rangle$  – полной временной волновой функции, описывающей систему «три кубита+мода поля резонатора» в произвольный момент времени  $t$ . Запишем явный вид временных волновых функций для начальных состояний кубитов (2)–(4) соответственно:

$$|\Psi_1(t)\rangle = y_1(t) |+, -, -, 0\rangle + y_2(t) |-, +, -, 0\rangle + y_3(t) \times |-, -, +, 0\rangle + y_4(t) |-, -, -, m\rangle, \tag{5}$$

$$|\Psi_2(t)\rangle = x_1(t) |+, +, -, 0\rangle + x_2(t) |+, -, +, 0\rangle + x_3(t) \times |-, +, +, 0\rangle + x_4(t) |+, -, -, m\rangle + x_5(t) \times |-, +, -, m\rangle + x_6(t) |-, -, +, m\rangle + x_7(t) |-, -, -, 2m\rangle, \tag{6}$$

$$|\Psi_3(t)\rangle = z_1(t) |+, +, -, 0\rangle + z_2(t) \times |+, -, +, 0\rangle + z_3(t) |-, +, +, 0\rangle + z_4(t) |+, -, -, m\rangle + z_5(t) |-, +, -, m\rangle + z_6(t) |-, -, +, m\rangle + z_7(t) |-, -, -, 2m\rangle + d |-, -, -, 0\rangle. \tag{7}$$

Решая нестационарное уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (1), получаем следующие выражения для временных коэффициентов:

$$y_1(t) = \left[ C \left( \cos(\sqrt{3m!}\gamma t) + 2 \right) - 2(A+B) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3m!}\gamma t}{2} \right) \right] / 3,$$

$$y_2(t) = \left[ B \left( \cos(\sqrt{3m!}\gamma t) + 2 \right) - 2(A+C) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3m!}\gamma t}{2} \right) \right] / 3,$$

$$y_3(t) = \left[ A \left( \cos(\sqrt{3m!}\gamma t) + 2 \right) - 2(B+C) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3m!}\gamma t}{2} \right) \right] / 3,$$

$$y_4(t) = -i \left[ (A+B+C) \sin(\sqrt{3m!}\gamma t) \right] / \sqrt{3},$$

$$x_1(t) = \left\{ \frac{(A+B+C)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2A-B-C) \cos(\sqrt{m!}\gamma t) \right\} / 3,$$

$$x_2(t) = \left\{ \frac{(A+B+C)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2B-A-C) \cos(\sqrt{m!}\gamma t) \right\} / 3,$$

$$x_3(t) = \left\{ \frac{(A+B+C)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2C-A-B) \cos(\sqrt{m!}\gamma t) \right\} / 3,$$

$$x_4(t) = i \left\{ (2C-A-B) \sin(\sqrt{m!}\gamma t) - \frac{2(A+B+C)m! \sin(\omega\gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3,$$

$$\begin{aligned}
 x_5(t) &= i \left\{ (2B - A - C) \sin(\sqrt{m} \gamma t) - \frac{2(A + B + C)m! \sin(\omega \gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3, \\
 x_6(t) &= i \left\{ (2A - B - C) \sin(\sqrt{m} \gamma t) - \frac{2(A + B + C)m! \sin(\omega \gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3, \\
 x_7(t) &= \frac{2(A + B + C)m! \sqrt{(2m)!} [\cos(\omega \gamma t) - 1]}{4(m!)^2 + 3(2m)!}, \\
 z_1(t) &= \left\{ \frac{(a + b + c)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2a - b - c) \cos(\sqrt{m} \gamma t) \right\} / 3, \\
 z_2(t) &= \left\{ \frac{(a + b + c)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2b - a - c) \cos(\sqrt{m} \gamma t) \right\} / 3, \\
 z_3(t) &= \left\{ \frac{(a + b + c)f(t)}{4(m!)^2 + 3(2m)!} + (2c - a - b) \cos(\sqrt{m} \gamma t) \right\} / 3, \\
 z_4(t) &= i \left\{ (2c - a - b) \sin(\sqrt{m} \gamma t) - \frac{2(a + b + c)m! \sin(\omega \gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3, \\
 z_5(t) &= i \left\{ (2b - a - c) \sin(\sqrt{m} \gamma t) - \frac{2(a + b + c)m! \sin(\omega \gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3, \\
 z_6(t) &= i \left\{ (2a - b - c) \sin(\sqrt{m} \gamma t) - \frac{2(a + b + c)m! \sin(\omega \gamma t)}{\sqrt{4(m!)^2 + 3(2m)!}} \right\} / 3, \\
 z_7(t) &= \frac{2(a + b + c)m! \sqrt{(2m)!} [\cos(\omega \gamma t) - 1]}{4(m!)^2 + 3(2m)!},
 \end{aligned}$$

где новые коэффициенты

$$\begin{aligned}
 A &= \cos \alpha, B = \sin \alpha \sin \beta, C = \sin \alpha \cos \beta, \\
 f(t) &= [4 \cos(\omega \gamma t)(m!)^2 + 3(2m)!] \text{ и} \\
 \omega &= \sqrt{4m! + 3(2m)!} / m!.
 \end{aligned}$$

Теперь благодаря явному виду волновых функций (5)–(7) можно изучить динамику перепутывания кубитов.

Любые известные критерии перепутывания кубитов выражаются через элементы матрицы плотности указанной подсистемы, поскольку данный объект наиболее полно описывает динамику системы. Для вычисления матрицы плотности полной системы для начальных состояний (2)–(4) и вакуумного состояния поля резонатора мы используем следующее выражение  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ . В дальнейшем для расчёта критериев перепутывания кубитов нам понадобятся трех-, двух- и однокубитные матрицы плотности. Усреднив выражение  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)$  по переменным поля резонатора, можно получить трехкубитную матрицу плотности  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3} = Tr_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F} = Tr_F |\Psi\rangle \langle \Psi|$ . Двухкубитные и однокубитные матрицы плотности могут быть получены путем усреднения трехкубитной матрицы  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}$  по переменным одного или двух кубитов соответственно

$$\begin{aligned}
 \rho_{Q_i Q_j} &= Tr_{Q_l} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}, \rho_{Q_i} = \\
 &= Tr_{Q_j} Tr_{Q_l} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3} \quad (i \neq j, i \neq l, j \neq l).
 \end{aligned}$$

## 2. Выбор критериев перепутывания и их расчёт

Как известно, строгие критерии перепутывания в настоящее время введены только для двухкубитных систем. Для трехкубитных систем такие критерии отсутствуют. Поэтому для описания динамики перепутывания подсистемы кубитов в настоящей работе применяются несколько критериев, наиболее часто используемых для анализа перепутывания кубитов. В качестве первого из таких параметров выбран критерий попарной отрицательности кубитов, который определяем стандартным образом [18]:

$$\varepsilon_{Q_i Q_j} = -2 \sum_l \mu_{ij}^l,$$

где идёт суммирование отрицательных собственных значений  $\mu_{ij}^l$  двухкубитной матрицы плотности, частично транспонированной по переменным одного кубита  $\rho_{Q_i Q_j}^T$ . Используя выражение для двухкубитной матрицы плотности  $\rho_{Q_i Q_j}^T$  в случае W-состояний (2)–(3), мы получим следующую формулу для отрицательности:

$$\varepsilon_{Q_1 Q_2} = \sqrt{\left(\rho_{44}^{Q_1 Q_2} - \rho_{11}^{Q_1 Q_2}\right)^2 + 4\left|\rho_{23}^{Q_1 Q_2}\right|^2} - \rho_{44}^{Q_1 Q_2} - \rho_{11}^{Q_1 Q_2}, \quad (8)$$

где элементы матрицы плотности для первого  $Q_1$  и второго  $Q_2$  кубитов для W-состояния (2) принимают вид

$$\rho_{11}^{Q_1 Q_2} = 0, \rho_{44}^{Q_1 Q_2} = |y_3|^2 + |y_4|^2, \rho_{23}^{Q_1 Q_2} = y_1 y_2^*,$$

а для W-состояния (3) выражаются следующим образом

$$\rho_{11}^{Q_1 Q_2} = |x_1|^2, \rho_{44}^{Q_1 Q_2} = |x_6|^2 + |x_7|^2, \rho_{23}^{Q_1 Q_2} = x_2 x_3^* + x_4 x_5^*.$$

В случае GHZ-подобного состояния (4) отрицательность будет выражаться как

$$\varepsilon_{Q_1 Q_2} = \sqrt{\left(\rho_{44}^{Q_1 Q_2} - \rho_{11}^{Q_1 Q_2}\right)^2 + 4\left|\rho_{23}^{Q_1 Q_2}\right|^2} - \rho_{44}^{Q_1 Q_2} - \rho_{11}^{Q_1 Q_2} + \sqrt{\left(\rho_{22}^{Q_1 Q_2} - \rho_{33}^{Q_1 Q_2}\right)^2 + 4\left|\rho_{14}^{Q_1 Q_2}\right|^2} - \rho_{22}^{Q_1 Q_2} - \rho_{33}^{Q_1 Q_2}, \quad (9)$$

где элементы матрицы плотности для первого  $Q_1$  и второго  $Q_2$  кубитов в случае GHZ-подобного состояния (4) принимают вид

$$\rho_{11}^{Q_1 Q_2} = |z_1|^2, \rho_{22}^{Q_1 Q_2} = |z_2|^2 + |z_4|^2, \rho_{33}^{Q_1 Q_2} = |z_3|^2 + |z_5|^2, \rho_{44}^{Q_1 Q_2} = |z_6|^2 + |z_7|^2 + d^2, \rho_{23}^{Q_1 Q_2} = z_2 z_3^* + z_4 z_5^*, \rho_{14}^{Q_1 Q_2} = dz_1.$$

Для исследования трехкубитного перепутывания мы будем также использовать еще два параметра: степень совпадения и полную согласованность. Для чистых состояний степень совпадения принимает следующий вид [19]:  $\Phi(\rho, \rho') = Tr(\rho\rho')$ . Таким образом, степень совпадения определяется как операция следа от произведения начальной матрицы плотности  $\rho$  и матрицы плотности  $\rho'$ , описывающей систему в произвольный момент времени  $t$ . Приведем аналитические выражения для параметра перепутывания  $\Phi$  для всех начальных состояний (2)–(4):

1) Для W-состояния (2) степень совпадения  $\Phi$  принимает вид

$$\Phi = C^2 \rho_{55} + B^2 \rho_{66} + A^2 \rho_{77} + 2ACRep_{75} + 2ABRep_{76} + 2BCRep_{65}, \quad (10)$$

где элементы трехкубитной матрицы плотности  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}$ :

$$\rho_{55} = |y_1|^2, \rho_{66} = |y_2|^2, \rho_{77} = |y_3|^2, \rho_{56} = y_1 y_2^*, \rho_{57} = y_1 y_3^*, \rho_{67} = y_2 y_3^*, \rho_{65} = \rho_{56}^*, \rho_{75} = \rho_{57}^*, \rho_{76} = \rho_{67}^*.$$

2) Для W-состояния (3) степень совпадения  $\Phi$  принимает вид

$$\Phi = A^2 \rho_{22} + B^2 \rho_{33} + C^2 \rho_{44} + 2ABRep_{23} + 2ACRep_{24} + 2BCRep_{34}, \quad (11)$$

где элементы трехкубитной матрицы плотности  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}$ :

$$\rho_{22} = |x_1|^2, \rho_{33} = |x_2|^2, \rho_{44} = |x_3|^2, \rho_{23} = x_1 x_2^*, \rho_{24} = x_1 x_3^*, \rho_{34} = x_2 x_3^*, \rho_{32} = \rho_{23}^*, \rho_{42} = \rho_{24}^*, \rho_{43} = \rho_{34}^*.$$

3) Наконец, степень совпадения  $\Phi$  для GHZ-подобного состояния (4)

$$\Phi = a^2 \rho_{22} + b^2 \rho_{33} + c^2 \rho_{44} + d^2 \rho_{88} + 2abRep_{23} + 2acRep_{24} + 2adRep_{28} + 2bcRep_{34} + 2bdRep_{38} + 2cdRep_{48}, \quad (12)$$

где соответствующие элементы матрицы плотности  $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}$  есть

$$\rho_{22} = |z_1|^2, \rho_{33} = |z_2|^2, \rho_{44} = |z_3|^2, \rho_{88} = |z_7|^2 + d^2, \rho_{23} = z_1 z_2^*, \rho_{24} = z_1 z_3^*, \rho_{28} = dz_1, \rho_{34} = z_2 z_3^*, \rho_{38} = dz_2, \rho_{48} = dz_3, \rho_{32} = \rho_{23}^*, \rho_{42} = \rho_{24}^*, \rho_{82} = \rho_{28}^*, \rho_{43} = \rho_{34}^*, \rho_{83} = \rho_{38}^*, \rho_{84} = \rho_{48}^*.$$

Полная согласованность  $\Delta$  была введена Се и Эберли в работе [20]:

$$\Delta = \left[ \frac{16}{3} P \left( P - C_{Q_1(Q_2 Q_3)}^2 \right) \left( P - C_{Q_2(Q_1 Q_3)}^2 \right) \times \left( P - C_{Q_3(Q_1 Q_2)}^2 \right) \right]^{1/4}, \quad (13)$$

где

$$P = 1/2 \left( C_{Q_1(Q_2 Q_3)}^2 + C_{Q_2(Q_1 Q_3)}^2 + C_{Q_3(Q_1 Q_2)}^2 \right)$$

– это половина периметра, в то время как множитель  $16/3$  обеспечивает нормировку параметра  $0 \leq \Delta \leq 1$ . Таким образом, полная согласованность определяется как площадь треугольника, сторонами которого являются квадраты согласованности:

$$C_{Q_1(Q_2 Q_3)}^2 = 4\rho_{11}^{Q_1} \rho_{22}^{Q_1}.$$

Для вычисления параметра  $\Delta$  в случае начальных состояний (2)–(4) достаточно знать элементы однокубитной матрицы плотности  $\rho_{Q_1}$ , которые имеют вид:

1) Для W-состояния (2):

$$\rho_{11}^{Q_1} = |y_1|^2, \rho_{22}^{Q_1} = |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2.$$

2) Для W-состояния (3):

$$\rho_{11}^{Q_1} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_4|^2, \rho_{22}^{Q_1} = |x_3|^2 + |x_5|^2 + |x_6|^2 + |x_7|^2.$$

3) Для GHZ-подобного состояния (4):

$$\rho_{11}^{Q_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_4|^2, \rho_{22}^{Q_1} = |z_3|^2 + |z_5|^2 + |z_6|^2 + |z_7|^2 + d^2.$$

### 3. Обсуждение результатов компьютерного моделирования

На рис. 1 мы строим зависимости степени совпадения  $\Phi(\gamma t)$ , критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_i}(\gamma t)$  и полной согласованности  $\Delta(\gamma t)$  от приведённого времени  $\gamma t$  для начального истинно перепутанного W-состояния (2) для различных значений кратности фотонных переходов  $m$ . Мы будем изучать динамику системы для максимально перепутанных состояний (2)–(4), т.е. для начальных параметров  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ ,  $\beta = \pi/4$ . Важно отметить, что для W-состояний (2), (3) критерий отрицательности в начальный момент времени принимает значение, равное  $\varepsilon_{Q,Q_i} = (\sqrt{5}-1)/3$ , степень совпадения  $\Phi = 1$ , а полная согласованность  $\Delta = 8/9$ . Из рисунка хорошо видно, что увеличение кратности фотонных переходов не стабилизирует перепутывание, а лишь уменьшает период колебаний параметров перепутывания. Поведение степени совпадения, критерия отрицательности и полной согласованности идентично для W-состояния (2). Из рис. 1 также видно, что через некоторые моменты времени все три параметра возвращаются к своим исходным значениям  $\varepsilon_{Q,Q_i} = (\sqrt{5}-1)/3$ ,  $\Delta = 8/9$  и  $\Phi = 1$ . Используя выражения (8), (10), (13) и соответствующие элементы матрицы плотности, мы нашли аналитические выражения для параметров  $\Phi$ ,  $\Delta$  и  $\varepsilon_{Q,Q_i}$ :

$$\Phi(T) = v^2(T), \Delta(T) = 2v^2(T)[5 - v(2T)]/9, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{Q,Q_i}(T) = [\sqrt{6 + v(4T) - 2v(2T)} + v(2T) - 2]/3, \quad (15)$$

где  $v(T) = \cos(\sqrt{3m!}T)$ ,  $T \equiv \gamma t$ . Анализ выражений (14), (15) показывает, что моментам времени  $t_1 = \pi k_1 / (\sqrt{3m!}\gamma)$  ( $k_1 = 0, 1, 2, \dots$ ) соответствуют максимальные значения параметров перепутывания кубитов  $\varepsilon_{Q,Q_i}(\gamma t_1) = (\sqrt{5}-1)/3$ ,  $\Delta(\gamma t_1) = 8/9$  и  $\Phi(\gamma t_1) = 1$ . Важно отметить, что чётному параметру  $k_1^+ = 0, 2, \dots$  соответствует возвращение системы в исходное W-состояние (2), в то время как нечётному параметру  $k_1^- = 1, 3, \dots$  соответствует W-состояние другого вида. Для произвольного параметра  $k_1$  волновая функция (5) в момент времени  $t_1$  запишется в виде

$$|\Psi_1(t_1)\rangle = (-1)^{k_1} [ |+, -, -, 0\rangle + |-, +, -, 0\rangle + |-, -, +, 0\rangle ] / \sqrt{3}.$$

Моментам времени  $t_2 = \pi(1 + 2k_2) / 2\gamma\sqrt{3m!}$  ( $k_2 = 0, 1, 2, \dots$ ) соответствуют минимальные значения параметров перепутывания

$$\varepsilon_{Q,Q_i}(\gamma t_2) = \Delta(\gamma t_2) = \Phi(\gamma t_2) = 0.$$

В эти моменты времени система трех кубитов переходит в сепарабельное состояние, а поле – в состояние с  $m$  фотонами. Это полностью согласуется с рис. 1в, поскольку полная согласованность  $\Delta$  равна

нулю только в том случае, когда система кубитов находится либо в сепарабельном состоянии, либо в би-сепарабельном состоянии. Как и в предыдущем случае, значение параметра  $k_2$  влияет на вид сепарабельного состояния, в котором будет находиться система. В общем случае волновая функция  $|\Psi_1\rangle$  в момент времени  $t_2$  есть

$$|\Psi_1(t_2)\rangle = -i(-1)^{k_2} |-, -, -, m\rangle.$$

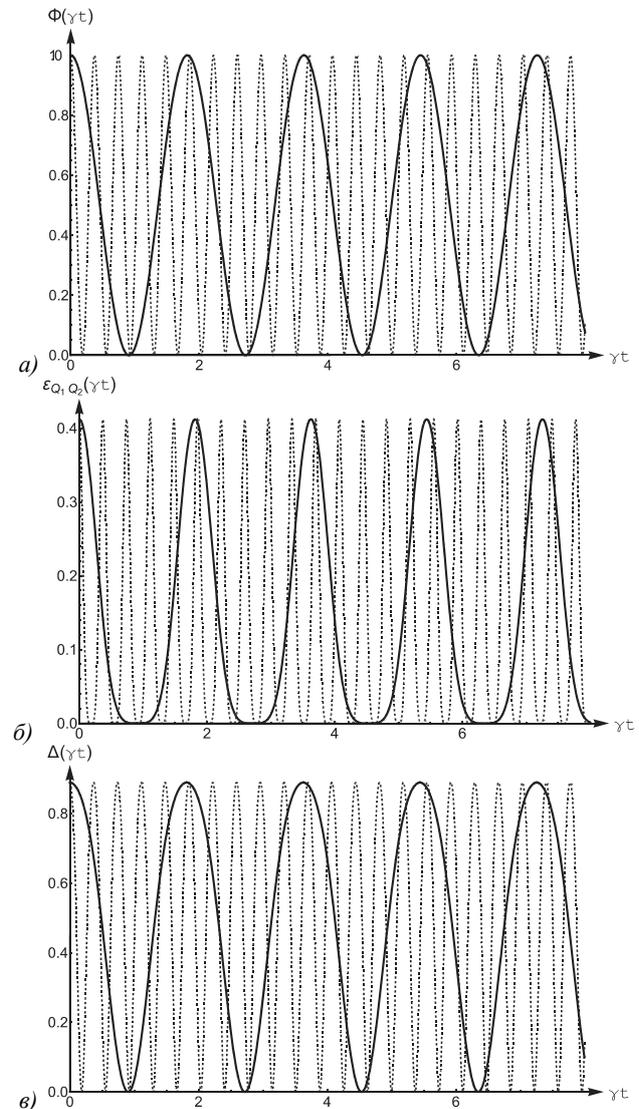


Рис. 1. Зависимость степени совпадения  $\Phi$  (а), критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_i}$  (б) и полной согласованности  $\Delta$  (в) от приведённого времени  $\gamma t$  для W-состояния (2) в случае  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ ,  $\beta = \pi/4$ . Кратность переходов:  $m = 1$  (сплошная линия),  $m = 4$  (штриховая линия)

На рис. 2 мы строим аналогичные зависимости для тех же параметров, что и на рис. 2, но для W-состояния (3). Из сравнения рис. 2 и рис. 3 можно сделать следующие выводы. Во-первых, в отличие от W-состояния (2) увеличение кратности фотонных переходов  $m$  существенно стабилизирует истинно перепутанное W-состояние (3), поэтому данное состояние крайне перспективно для квантовой обработки информации в случае  $m \geq 4$ .

Во-вторых, полная согласованность в случае W-состояния (3) никогда не принимает значение, равное нулю  $\Delta \neq 0$ , то есть данное состояние ни в какие моменты времени  $t$  не переходит в сепарабельное или бисепарабельное состояние, что принципиально отличается от W-состояния (2). В-третьих, для W-состояния (3) поведение критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}$ , степени совпадения  $\Phi$  и полной согласованности  $\Delta$  достаточно сильно отличается. Например, на рис. 2б видно, что в некоторые моменты времени  $t$  критерий отрицательности зануляется  $\varepsilon_{Q,Q_j} = 0$ , в то время как степень совпадения  $\Phi$  и полная согласованность  $\Delta$  не принимают значения, равные нулю. Для того чтобы более чётко и наглядно объяснить выше приведённые факты, запишем аналитические выражения с помощью выражений (8), (11), (13) для начального W-состояния (3) в случае  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ ,  $\beta = \pi/4$  для параметров  $\Phi$ ,  $\Delta$  и  $\varepsilon_{Q,Q_j}$ :

$$\Phi(T) = \left[ \frac{4(m!)^2 \cos(\omega T) + 3(2m)!}{4(m!)^2 + 3(2m)!} \right]^2, \tag{16}$$

$$\Delta(T) = \frac{8\delta_1\delta_2}{9[4(m!)^2 + 3(2m)!]^4},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q,Q_j}(T) = & \{12\sigma[4\cos(\omega T) - \cos(2\omega T) - 5] - 16(m!)^4 - \\ & - 9((2m!)^2 + \sqrt{4\eta_1 + \eta_2}) / 3[4(m!)^2 + 3(2m)!]^2, \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\sigma = (m!)^2 (2m)!$  и

$$\begin{aligned} \eta_1 = & [16(m!)^4 + \\ & + 6\sigma(4\cos(\omega T) - \cos(2\omega T) + 1) + 9((2m!)^2)]^2, \\ \eta_2 = & [16(m!)^4 \cos(2\omega T) - \\ & - 12\sigma(\cos(2\omega T) - 8\cos(\omega T) + 5) + 9((2m!)^2)]^2, \\ \delta_1 = & 4(m!)^4[\cos(2\omega T) + 3] + \\ & + 3\sigma[8\cos(\omega T) - \cos(2\omega T) + 9((2m!)^2 + 1)], \\ \delta_2 = & 8(m!)^4[3 - \cos(\omega T)] + \\ & + 6\sigma[\cos(2\omega T) - 8\cos(\omega T) + 11] + 9((2m!)^2). \end{aligned}$$

Используя выражения (16)–(17), нетрудно показать, что при  $m \rightarrow \infty$  параметры перепутывания стремятся к значениям  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{Q,Q_j} = (\sqrt{5} - 1)/3$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta = 8/9$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi = 1$ . Таким образом, все три параметра для начального W-состояния (3) ведут себя идентично только в случае больших значений кратности фотонных переходов  $m$ , то есть все параметры начинают колебаться около значений, которые соответствуют начальному состоянию (3), что полностью согласуется с рис. 2. Из выражения (16) можно найти моменты времени  $t_3$  и  $t_4$ , когда полная согласованность принимает значение  $\Delta = 1$  при  $m = 1$ :

$$t_3 = \left[ 2\arctan\left(\frac{1}{71}\sqrt{20\sqrt{5}-15}\right) + 2\pi k_3 \right] / \gamma\sqrt{10},$$

$$t_4 = \left[ 2\pi(k_4 + 1) - 2\arctan\left(\frac{1}{71}\sqrt{20\sqrt{5}-15}\right) \right] / \gamma\sqrt{10},$$

где  $k_{3,4} = 0, 1, \dots$ . Подставив моменты времени  $t_3$  и  $t_4$  в формулы (16), (17), получим  $\Phi(\gamma t_{3,4}) = 14 - 6\sqrt{5}$ ,  $\varepsilon_{Q,Q_j}(\gamma t_{3,4}) = 8\sqrt{5} - 53/3$ . Важно отметить, что полная согласованность принимает значение  $\Delta = 1$  только для GHZ- и GHZ-подобных состояний. Таким образом, данный параметр позволяет выделить некоторые дополнительные особенности динамики перепутывания кубитов в процессе эволюции. Более того, из рис. 2б, в видно, что в период времени от 0 до  $t_3$  трёхчастичное перепутывание растёт от  $\Delta = 8/9$  до  $\Delta = 1$ , в то время как критерий отрицательности монотонно снижается. Соответствующие моментам времени  $t_3$  и  $t_4$  волновые функции есть:

$$\begin{aligned} |\Psi_2(t_{3,4})\rangle = & (\sqrt{3} - \sqrt{5/3})[|+, +, -, 0\rangle + |+, -, +, 0\rangle + \\ & + |-, +, +, 0\rangle] \mp i\sqrt{4\sqrt{5}-53/6}[|+, -, -, m\rangle + | \\ & + |-, +, -, m\rangle + |-, -, +, m\rangle] - \sqrt{27/2 - 6\sqrt{5}}|-, -, -, 2m\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, в моменты времени  $t_3$  и  $t_4$  система находится в сложном перепутанном состоянии. Стоит отметить, что при  $m = 2$  все выводы аналогичны. В случае  $m \geq 3$  корни  $t_3$  и  $t_4$  полностью исчезают и полная согласованность  $\Delta$  в процессе эволюции никогда не достигает значения, равного единице, и начинает колебаться около значения  $\Delta = 8/9$ . Анализ выражений (16)–(17) также показывает, что моментам времени  $t_5 = 2\pi k_5 / \gamma\sqrt{(4(m!)^2 + 3(2m)!)/m!}$  ( $k_5 = 0, 1, \dots$ ) соответствуют следующие значения параметров  $\varepsilon_{Q,Q_j}(\gamma t_5) = (\sqrt{5} - 1)/3$ ,  $\Phi(\gamma t_5) = 1$  и  $\Delta(\gamma t_5) = 8/9$  при любом значении кратности фотонных переходов  $m$ . В указанные моменты времени  $t_5$  волновая функция (6) возвращается в исходное W-состояние (3), а поле – в вакуумное состояние

$$|\Psi_2(t_5)\rangle = 1/\sqrt{3}[|+, +, -, 0\rangle + |+, -, +, 0\rangle + |-, +, +, 0\rangle].$$

Моментам времени

$$t_6 = \pi(2k_6 + 1) / \gamma\sqrt{(4(m!)^2 + 3(2m)!)/m!}$$

( $k_6 = 0, 1, \dots$ )

соответствуют следующие значения параметров перепутывания, зависящие от кратности фотонных переходов  $m$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma t_6) = & \frac{[4(m!)^2 - 3(2m)!]^2}{[4(m!)^2 + 3(2m)!]^2}, \\ \Delta(\gamma t_6) = & \frac{8[4(m!)^2 - 3(2m)!][16(m!)^4 + 120(m!)^2(2m)! + 9((2m!)^2)]}{9[4(m!)^2 + 3(2m)!]^4}. \end{aligned}$$

Формула для отрицательности не приводится для экономии места. Соответствующая волновая функция есть

$$|\Psi(t_6)\rangle = k_{1,m}[|+, +, -, 0\rangle + |+, -, +, 0\rangle + |-, +, +, 0\rangle] + k_{2,m}|-, -, -, 2m\rangle,$$

где

$$k_{1,m} = \frac{3(2m)! - 4(m!)^2}{\sqrt{3[4(m!)^2 + 3(2m)!]}}, k_{2,m} = -\frac{4\sqrt{3}m!\sqrt{(2m)!}}{4(m!)^2 + 3(2m)!}.$$

Таким образом, полная система «три кубита+мода поля» в момент времени  $t_6$  находится в атом-полевом перепутанном состоянии. Однако данное атом-полевое перепутанное состояние достаточно быстро угасает с увеличением параметра кратности фотонных переходов  $m$ , поскольку коэффициент  $k_{2,m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Следовательно, состояние  $|\Psi(t_6)\rangle$  становится всё ближе к состоянию (3), что видно на рис. 2. Важно отметить, что в случае  $m \geq 3$  максимумам степени совпадения  $\Phi(\gamma t_5) = 1$  и отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}(\gamma t_5) = (\sqrt{5}-1)/3$  соответствует минимум полной согласованности  $\Delta(\gamma t_5) = 8/9$  и наоборот, максимуму полной согласованности  $\Delta(\gamma t_6)$  соответствуют минимумы степени совпадения  $\Phi(\gamma t_6)$  и критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}(\gamma t_6)$ .

На рис. 3 мы строим аналогичные зависимости, как и на рис. 2, но для GHZ-подобного состояния (4) в случае  $a = b = c = d = 1/2$ . Данное состояние также отличается стабилизацией перепутывания в случае увеличения параметра кратности фотонных переходов  $m$ , что делает данное состояние перспективным для квантовой информатики. Более того, амплитуда колебаний всех параметров перепутывания  $\Phi$ ,  $\Delta$  и  $\varepsilon_{Q,Q_j}$  быстрее уменьшается для GHZ-подобного состояния (4), чем для W-состояния (3). Это прекрасно видно, например, из сравнения рис. 2в и рис. 3в при  $m = 4$ . В отличие от предыдущего случая, для GHZ-подобного состояния (4) поведение степени совпадения  $\Phi$  и полной согласованности  $\Delta$  качественно согласуется. Однако поведение отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}$  сильно отличается. Используя выражения (9), (12), (13), можно показать, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{Q,Q_j} = 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta = 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi = 1$ . Таким образом, мы видим принципиальную разницу между отрицательностью  $\varepsilon_{Q,Q_j}$  и степенью совпадения  $\Phi$  или полной согласованностью  $\Delta$ . Критерий отрицательности говорит об уменьшении перепутывания при увеличении  $m \geq 3$ , в то время как степень совпадения  $\Phi$  и полная согласованность  $\Delta$  говорят о сильном увеличении степени перепутывания при увеличении параметра  $m$ , что полностью согласуется с поведением временной волновой функции. На основе выше приведённых расчётов мы делаем вывод о том, что отрицательность не пригодна для оценки перепутывания в трехкубитных GHZ- и GHZ-подобных состояниях и менее информативна в случае W-состояний по сравнению с полной согласованностью.

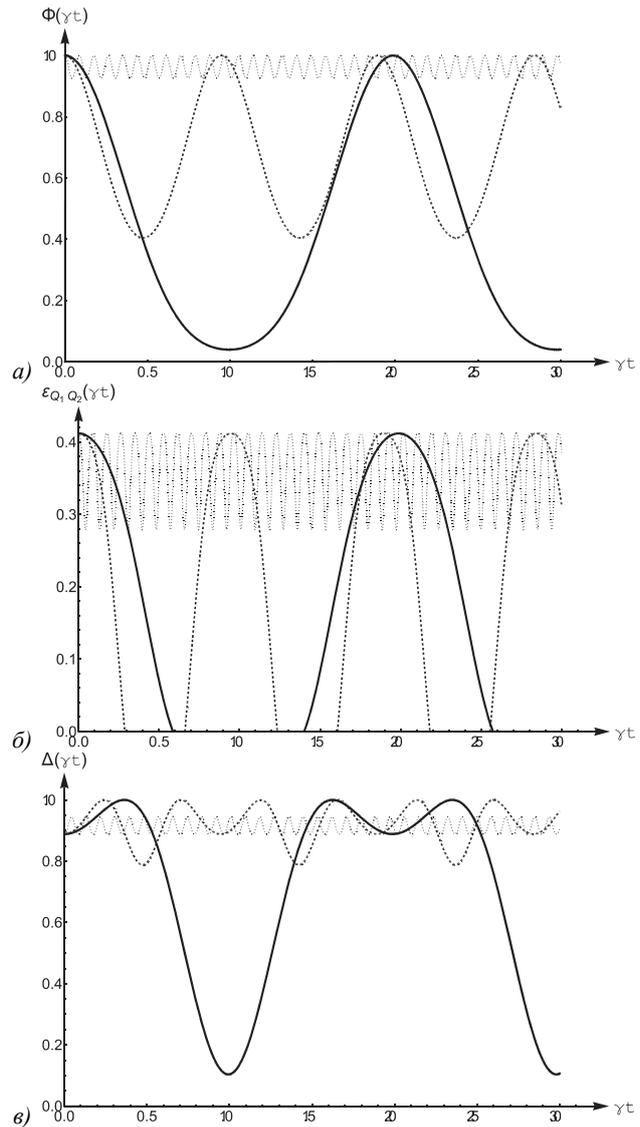


Рис. 2. Зависимость степени совпадения  $\Phi$  (а) критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}$ , (б) и полной согласованности  $\Delta$  (в) от приведённого времени  $\gamma t$  для W-состояния (3) в случае  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ ,  $\beta = \pi/4$ . Кратность переходов:  $m = 1$  (сплошная линия),  $m = 2$  (штриховая линия),  $m = 4$  (точечная линия)

### Заключение

В данной работе нами была точно решена динамика модели Тависа–Каммингса, в которой три идентичных кубита были заперты в резонатор с бесконечной добротностью и резонансно взаимодействовали с модой поля этого резонатора посредством многофотонных процессов. В качестве объекта исследования выступали истинно перепутанные состояния Вернера и Гринбергера–Хорна–Цайлингера. Для поиска временных волновых функций данных состояний мы воспользовались нестационарным уравнением Шрёдингера. С помощью указанных волновых функций были получены аналитические выражения для трех параметров перепутывания: степени совпадения  $\Phi$ , критерия отрицательности  $\varepsilon_{Q,Q_j}$  и полной согласованности  $\Delta$ .

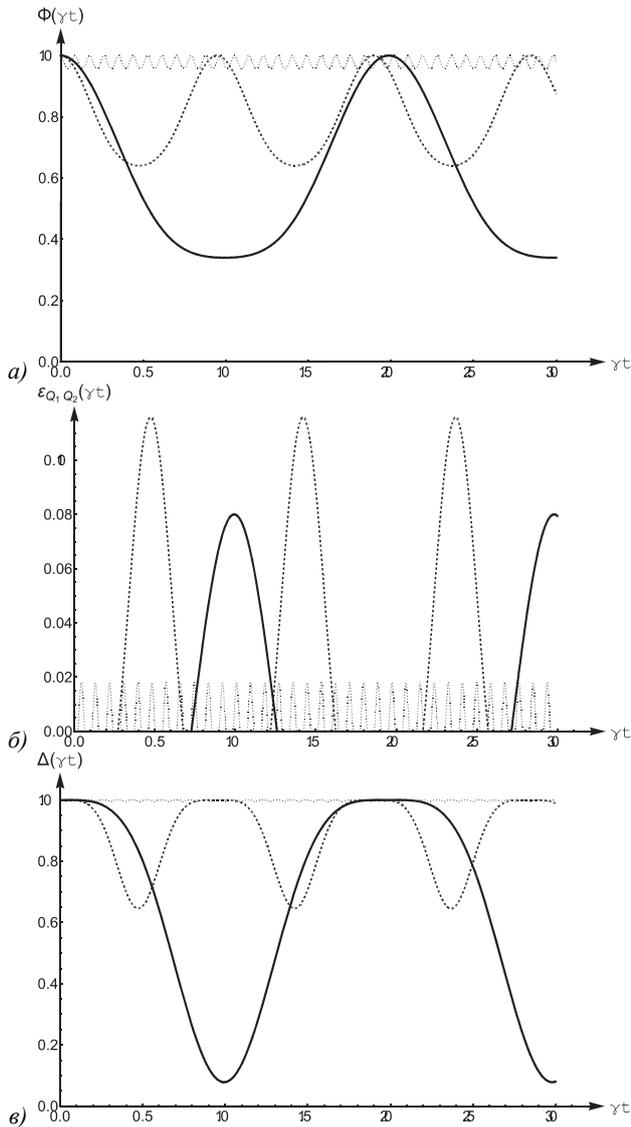


Рис. 3. Аналогично рис. 2, но для GHZ-подобного состояния (4) в случае  $a = b = c = d = 1/2$

Расчёты показали, что увеличение кратности фотонных переходов может существенно стабилизировать перепутывание для истинно перепутанных состояний (3) и (4) в отличие от W-состояния (2). Таким образом, трехкубитные состояния (3), (4) могут использоваться в квантовой обработке информации. Было также показано, что состояния (3) и (4) никогда не приходят в процессе эволюции в сепарабельное либо в бисепарабельное состояние в отличие от W-состояния (2). Мы также провели сравнительный анализ для трёх параметров перепутывания. Мы приходим к выводу, что для количественной оценки перепутывания кубитов отрицательность малоинформативна, поскольку на некоторых промежутках времени попарная отрицательность  $\varepsilon_{Q_i Q_j}$  монотонно уменьшается, в то время как полная согласованность  $\Delta$  увеличивается. Более того, в случае W-состояния (3) и GHZ-подобного состояния (4) отрицательность  $\varepsilon_{Q_i Q_j}$  на протяжении достаточно большого промежутка времени может быть

равна нулю, в то время как полная согласованность  $\Delta$  принимает ненулевые значения. Поведение полной согласованности полностью согласуется с поведением полной временной волновой функции. Таким образом, полная согласованность является более надёжным параметром для количественной оценки перепутывания кубитов.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, N FSSS-2025-0003.

### References

- [1] Chia C, Huang D, Leong V, Kong JF, Goh KEJ. Hybrid quantum systems with artificial atoms in solid state. *Adv Quantum Technol* 2024; 7: 2300461. DOI: 10.1002/qute.202300461.
- [2] Nielsen MA, Chuang IL. *Quantum computation and quantum information*. 10th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2010. ISBN: 9781107002173.
- [3] Barshak EV, Lapin BP, Vikulin DV, Alieva SS, Alexeyev CN, Yavorsky MA. All-fiber SWAP-CNOT gate for optical vortices. *Computer Optics* 2021; 45(6): 853-859. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-938.
- [4] Barnes E, Arenz C, Pitchford AJG, Economou SE. Fast microwave-driven three-qubit gates for cavity-coupled superconducting qubits. *Phys Rev B* 2017; 96(2): 024504. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.024504.
- [5] Reed MD, DiCarlo L, Nigg SE, Sun L, Frunzio L, Girvin SM, Schoelkopf RJ. Realization of three-qubit quantum error correction with superconducting circuits. *Nature* 2012; 482: 382-385. DOI: 10.1038/nature10786.
- [6] Moskalenko IN, Simakov IA, Abramov NN, et al. High fidelity two-qubit gates on fluxoniums using a tunable coupler. *Npj Quantum Inf* 2022; 8: 130. DOI: 10.1038/s41534-022-00644-x.
- [7] Wei H, Tang J, Deng Y. N-photon bundles emission in high-spin Jaynes–Cummings model. *New J Phys* 2024; 26(12): 123024. DOI: 10.1088/1367-2630/ad9d6e.
- [8] Perminov NS, Petrovkin KV, Gerasimov KI, Kirillov RS, Latypov RR, Sherstyukov ON, Moiseev SA. Spectroscopy of cascade multiresonator quantum memory. *Computer Optics* 2018; 42(4): 614-619. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-614-619.
- [9] Muñoz CS, Del Valle Tudela EAG, Müller K, Lichtmannecker S, Kaniber M, Tejedor C, Finley J, Laussy F. Emitters of N-photon bundles. *Nat Photon* 2014; 8(7): 550-555. DOI: 10.1038/nphoton.2014.114.
- [10] Bashkirov EK, Mastyugin MS. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field. *Computer Optics* 2013; 37(3): 278-285. DOI: 10.18287/0134-2452-2013-37-3-278-285.
- [11] Bashkirov EK. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. *Computer Optics* 2020; 44(2): 167-176. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-595.
- [12] Campagne-Ibarcq P, Zalys-Geller E, Narla A, Shankar S, Reinhold P, Burkhardt L, Axline C, Pfaff W, Frunzio L, Schoelkopf RJ, Devoret MH. Deterministic remote entanglement of superconducting circuits through microwave two-photon transitions. *Phys Rev Lett* 2018; 120: 200501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.200501.

- [13] Smith WC, Borgognoni A, Villiers M, Roverc'h E, Palomo J, Delbecq MR, Kontos P, Campagne-Ibarcq TP, Doucot B, Leghtas Z. Spectral signature of high-order photon processes mediated by Cooper-pair pairing. arXiv Preprint. 2023. Source: <<https://arxiv.org/abs/2312.15075>>. DOI: 10.48550/arXiv.2312.15075.
- [14] Adhikari P, Hafezi M, Taylor JM. Nonlinear optics quantum computing with circuit QED. Phys Rev Lett 2013; 110(6): 060503. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.060503.
- [15] Villas-Boas1 CJ, Rossatto DZ. Multiphoton Jaynes-Cummings model: Arbitrary rotations in fock space and quantum filters. Phys Rev Lett 2019; 122: 123604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.123604.
- [16] Bagrov AR, Bashkirov EK. Thermal entanglement in the three-qubit Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity. Computer Optics 2025; 49(1): 53-59. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1544.
- [17] Dür W, Vidal G, Cirac JI. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. Phys Rev A 2000; 62(6): 062314. DOI: 10.1103/PhysRevA.62.062314.
- [18] Biryukov AA, Shleenkov MA. Mathematical modeling of processes in quantum computer elements based on methods of quantum theory to improve their efficiency. Computer Optics 2024; 48(6): 889-893. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1489.
- [19] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states. J Mod Opt 1994; 41(12): 2315-2323. DOI: 10.1080/09500349414552171.
- [20] Xie S, Eberly JH. Triangle measure of tripartite entanglement. Phys Rev Lett 2021; 127: 040403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.040403.

### *Сведения об авторах*

**Багров Александр Романович** с отличием окончил Самарский национальный исследовательский университет (2023) по специальности «Физика». Магистр кафедры общей и теоретической физики Самарского университета. Основные научные интересы – квантовая оптика, математическое моделирование. E-mail: [alexander.bagrov00@mail.ru](mailto:alexander.bagrov00@mail.ru)

**Башкиров Евгений Константинович** с отличием окончил (1978) Куйбышевский государственный университет (ныне Самарский национальный исследовательский университет) по специальности «Физика». В 2007 году получил степень доктора физико-математических наук в Саратовском государственном университете. Профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского университета. Основные научные интересы: квантовая оптика, кооперативные и когерентные явления, оптическая синергетика. E-mail: [bashkirov.ek@ssau.ru](mailto:bashkirov.ek@ssau.ru)

ГРНТИ: 29.29.39

Поступила в редакцию 14 февраля 2025 г. Окончательный вариант – 14 апреля 2025 г.

---

# Analysis of the behavior of entanglement parameters for the three-qubit Tavis-Cummings model with multiphoton processes

A.R. Bagrov<sup>1</sup>, E.K. Bashkirov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Samara National Research University,  
Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

## Abstract

In this paper, we analyze in detail the dynamics of the negativity criterion, fidelity and concurrence fill for the Tavis-Cummings model in which three qubits are in a common single-mode ideal resonator and interact resonantly with the field mode via multiphoton processes. By solving the unsteady Schrödinger equation, we give analytic solutions for genuine entangled Werner- and Greenberger-Horn-Zeilinger states. It is shown that the multiplicity of photon transitions can significantly stabilize the genuine entangled states of both types. Key features in the dynamics pattern of the entanglement parameters are highlighted. We conclude that the negativity criterion is not suitable for describing the dynamics of entanglement of qubits in the case of three-qubit Greenberger-Horn-Zeilinger states. Main advantages of the concurrence fill over the negativity criterion are shown.

**Keywords:** qubits, multiphoton processes, negativity, fidelity, concurrence fill, resonator.

**Citation:** Bagrov AR, Bashkirov EK. Analysis of the behavior of entanglement parameters for the three-qubit Tavis-Cummings model with multiphoton processes. *Computer Optics* 2025; 49(6): 899-908. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1679.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the government project N FSSS-2025-0003.

---

## Author's information

**Alexander Romanovich Bagrov**, graduated with honors (2023) from Samara National Research University majoring in Physics. Master of the Department of the General and Theoretical Physics of Samara University. His leading research interests are quantum optics, mathematical modeling. E-mail: [alexander.bagrov00@mail.ru](mailto:alexander.bagrov00@mail.ru)

**Eugene Konstantinovich Bashkirov** graduated with honors (1978) from Kuibyshev State University (presently, Samara National Research University), majoring in Physics. He received his Doctor in Physics & Maths (2007) degree from Saratov State University. Professor of the Department of the General and Theoretical Physics of Samara University. His leading research interests include quantum optics, cooperative and coherent phenomena, optical synergetics. E-mail: [bashkirov.ek@ssau.ru](mailto:bashkirov.ek@ssau.ru)

---

Received February 14, 2025. The final version – April 14, 2025.

---