

## Орбитальный угловой момент векторных световых полей

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе в дополнение к известному вектору орбитального углового момента (ОУМ), который характеризует азимутальную скорость изменения фазы каждой компоненты вектора напряженности электрического поля, добавлены еще два вектора ОУМ (поляризаационный и гибридный), которые характеризуют азимутальные скорости изменения направления осей эллипса поляризации и изменения степени эллиптичности эллипса поляризации. Рассчитаны продольные проекции трех рассмотренных векторов ОУМ в плоскости фокуса при острой фокусировке оптического вихря с линейной поляризацией и цилиндрического векторного пучка высокого порядка. Показано, что отличными от нуля в плоскости фокуса для оптического вихря с круговой поляризацией являются только обычный и поляризаационный ОУМ, а для цилиндрического поля отличными от нуля является только поляризаационный ОУМ. Интересно, что поляризаационный ОУМ для линейной поляризации в начальной плоскости равен нулю, а в плоскости острого фокуса света с линейной поляризацией этот ОУМ отличен от нуля.

**Ключевые слова:** орбитальный угловой момент, векторное световое поле, поляризаационный орбитальный угловой момент, гибридный орбитальный угловой момент, острая фокусировка, цилиндрический векторный пучок.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент векторных световых полей / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 2. – 1705. – DOI: 10.18287/COJ1705.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of vector light fields. Computer Optics 2026; 50(2): 1705. DOI: 10.18287/COJ1705.

### Введение

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию сред и материалов, чувствительных к поляризации. По данной теме имеется несколько обзоров [1 – 3]. Интерес к таким средам обусловлен их широким применением в голографии [1], томографии [4], 2D-материалах [5, 6], фотодетекторах, чувствительных к поляризации [7, 8]. Также среды, чувствительные к поляризации, используются для формирования микрорельефа в полупроводниках [9, 10] и особенно в пленках азополимеров [11 – 16]. Формирование микрорельефа в таких средах при поглощении света с разными состояниями поляризации происходит из-за деформации молекул, возникновения градиента концентрации молекул и в результате массопереноса вещества [17 – 19]. В некоторых работах [15, 16] с помощью света с неоднородной поляризацией формировался спиральный микрорельеф.

Движение молекул вещества под действием неоднородно-поляризованного света во многом аналогично движению отдельных микрочастиц под действием света, несущего орбитальный угловой момент (ОУМ). То, что свет обладает ОУМ, известно начиная с работы [20]. Свет, несущий ОУМ, имеет также определенный целый топологический заряд (ТЗ) [21]. Обе эти величины характеризуют разные стороны скалярных оптических вихрей. ТЗ равен целому числу скачков фазы на  $2\pi$  при обходе по замкнутому контуру в сечении лазерного пучка. А ОУМ показывает изменение направления волнового вектора фотонов, которые распространяются по прямым линиям, скрещенным по отношению к оптической оси. Такие фотоны, поглощаясь микрочастицей, толкают ее по круговой траектории в сечении лазерного пучка. Пучки с ОУМ обладают фазовой сингулярностью [22] – это точки в сечении пучка, в которых не определена фаза. У неоднородных векторных световых полей есть аналогичные точки поляризаационной сингулярности [23]. Например, если в сечении лазерного пучка в каждой точке вектор линейной поляризации меняет свое направление, то может появиться точка, в которой направление вектора линейной поляризации не определено (V-точки) [23]. Такие точки поляризаационной сингулярности имеются у цилиндрических векторных полей [24]. Они характеризуются индексами поляризаационной сингулярности [23], которые аналогичны ТЗ скалярных оптических вихрей [21]. Индекс поляризаационной сингулярности равен целому числу полных поворотов вектора линейной поляризации при обходе по замкнутому контуру в сечении векторного лазерного пучка. Но второй характеристики, аналогичной ОУМ, которая бы описывала азимутальную скорость изменения поляризаационного состояния света, пока нет. Хотя рассмотрение такой характеристики направляется потому, что свет с разными поляризаационными состояниями может приводить к движению молекул и формированию микрорельефа.

В данной работе рассматриваются две новые характеристики векторных световых полей, аналогичные ОУМ скалярных световых полей. Это поляризационный и гибридный ОУМ векторных световых полей. Аналогично тому, как обычный ОУМ показывает угловую (азимутальную) скорость изменения фазы скалярного оптического вихря, так и поляризационный ОУМ показывает азимутальную скорость изменения направления вектора большой оси эллипса поляризации. А гибридный ОУМ показывает азимутальную скорость изменения степени эллиптичности эллипса поляризации в сечении векторного пучка. В работе не только рассматриваются продольные компоненты этих векторов ОУМ, но и приведены общие выражения для всех трех проекций векторов ОУМ. В качестве примера рассчитаны поляризационный и гибридный ОУМ в остром фокусе оптического вихря с круговой поляризацией и цилиндрического векторного пучка высокого порядка.

**1. Выражения для трех видов ОУМ параксиального векторного поля**

Скалярное параксиальное световое поле описывается комплексной амплитудой или комплексной функцией  $E(r, \varphi)$  от полярных координат. Орбитальный угловой момент (ОУМ) скалярного поля равен одному числу:

$$J_z = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi) r dr d\varphi. \tag{1}$$

Векторные параксиальные световые поля имеют две поперечные проекции электрического поля и описываются двумя комплексными функциями (вектор Джонса):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x(r, \varphi) \\ E_y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x + iB_x \\ A_y + iB_y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для векторного поля (2) можно ввести три числа, которые описывают три разных ОУМ: обычный векторный ОУМ [25]

$$J_{v,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x - B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x + A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y - B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y \right] r dr d\varphi, \tag{3}$$

поляризационный ОУМ

$$J_{p,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y - A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x + B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y - B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x \right) r dr d\varphi \tag{4}$$

и гибридный ОУМ

$$J_{h,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y + A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x - B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y - B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x \right) r dr d\varphi. \tag{5}$$

Выражения (3)–(5) являются только продольными проекциями соответствующих векторов ОУМ, но для параксиальных векторных полей других проекций векторов ОУМ нет. Выражения (3)–(5) являются инвариантами распространения и не изменяются при распространении параксиального светового поля в свободном пространстве. Обычный ОУМ пропорционален азимутальной скорости изменения фазы светового поля (2). Поляризационный ОУМ (4) пропорционален азимутальной скорости изменения направления векторов линейной поляризации, или направления векторов большой оси эллипса эллиптической поляризации, или мгновенного направления вектора круговой поляризации. Гибридный ОУМ (5) пропорционален угловой скорости изменения степени эллиптичности эллипса поляризации. На основе (3)–(5) можно рассмотреть другие определения ОУМ для векторных полей

$$J_{v2,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x + B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x + A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y + B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y \right] r dr d\varphi, \tag{6}$$

$$J_{h2,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y - B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y - A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x + B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x \right] r dr d\varphi, \tag{7}$$

$$J_{p2,z} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ A_x \frac{\partial}{\partial \varphi} A_y + B_x \frac{\partial}{\partial \varphi} B_y + A_y \frac{\partial}{\partial \varphi} A_x + B_y \frac{\partial}{\partial \varphi} B_x \right] r dr d\varphi. \tag{8}$$

Но выражения (6)–(8) тождественно равны нулю, а других аналогичных комбинаций из проекций поля (2) построить нельзя. На основе выражений (3)–(5) рассмотрим некоторые простые примеры. Далее мы будем показывать нормированные ОУМ, то есть выражения (3)–(5) будем делить на полную мощность пучка:

$$W = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (|E_x|^2 + |E_y|^2) r dr d\varphi. \quad (9)$$

## 2. Поляризационный ОУМ векторного пучка Пуанкаре

Вектор Джонса для семейства пучков Пуанкаре имеет вид [26]:

$$\mathbf{E}_p = \frac{e^{-(r/w)^2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-in\varphi - i\psi} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{in\varphi + i\psi} \\ i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-in\varphi - i\psi} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{in\varphi + i\psi} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $\theta$  и  $\psi$  – полярный и азимутальный углы на сфере Пуанкаре [26],  $n$  – целое число (топологический заряд) оптического вихря,  $(r, \varphi)$  – по-прежнему полярные координаты в сечении пучка,  $w$  – радиус перетяжки гауссова пучка. Подставим реальную и мнимую части комплексных функций в (10) в выражения для поляризационных нормированных ОУМ (3)–(5), получим:

$$\begin{aligned} J_{v,z} &= -n \cos(\theta), \\ J_{p,z} &= n, \\ J_{h,z} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Мощность (9) пучка (10) равна  $W = \pi w^2/2$ . Из (11) видно, что обычный ОУМ зависит от полярного угла на сфере Пуанкаре, а поляризационный ОУМ не зависит от углов сферы Пуанкаре и равен топологическому заряду оптического вихря, входящего в пучок Пуанкаре (10). Гибридный ОУМ равен нулю.

## 3. Поляризационный ОУМ для вихревого, цилиндрического и гибридного векторных пучков

Рассмотрим примеры векторных полей, у которых отличным от нуля является только один тип ОУМ из трех (3) – (5). Так, у оптического вихря с линейной поляризацией, направленной вдоль декартовых осей, отличным от нуля будет обычный ОУМ (3):

$$\mathbf{E}_1 = e^{im\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_{v,z} = m, \quad J_{p,z} = 0, \quad J_{h,z} = 0. \quad (12)$$

Цилиндрический векторный пучок будет иметь отличным от нуля только поляризационный ОУМ (4) [24]:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}, \quad J_{v,z} = 0, \quad J_{p,z} = n, \quad J_{h,z} = 0. \quad (13)$$

А гибридный векторный пучок, у которого при изменении азимутального угла  $\varphi$  изменяется степень эллиптичности, то есть линейная поляризация сменяется эллиптической и потом круговой, будет иметь отличным от нуля только гибридный ОУМ (5):

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} \cos(p\varphi) \\ i \sin(p\varphi) \end{pmatrix}, \quad J_{v,z} = 0, \quad J_{p,z} = 0, \quad J_{h,z} = p. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь пример более сложного векторного поля, которое имеет отличным от нуля все три ОУМ (3) – (5), нормированных на мощность пучка ( $m, n, p$  – целые число, неравные между собой)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 &= e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) + \cos(p\varphi) \\ \sin(n\varphi) + i \sin(p\varphi) \end{pmatrix}, \\ J_{v,z} &= m, \quad J_{p,z} = \frac{n}{2}, \quad J_{h,z} = \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полуцелые значения поляризационного и гибридного ОУМ в (15) получились потому, что мощность пучка в 2 раза больше, чем мощность пучков (12) – (14), и равна  $W = \pi w^2$ . Из (15) видно, что у векторного поля при изменении азимутального угла изменяется и фаза каждой компоненты, и направление вектора линейной поляризации, и степень эллиптичности поляризации.

#### 4. Поляризационный и гибридный ОУМ у полей с эллиптической и линейной поляризацией в присутствии оптического вихря

Рассмотрим примеры векторных полей, у которых отличным от нуля являются два ОУМ из трех (3)–(5). Оптический вихрь с эллиптической поляризацией имеет отличным от нуля обычный (3) и поляризационный (4) ОУМ:

$$\mathbf{E}_5 = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{1+\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\beta \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$J_{v,z} = m, \quad J_{p,z} = -\frac{2m\beta}{1+\beta^2}, \quad J_{h,z} = 0.$$

Из (16) видно, что поляризационный ОУМ (4) для вихревого эллиптического векторного пучка зависит от степени эллиптичности  $\beta$ : ОУМ максимальный по модулю  $J_{p,z} = -m$  для круговой поляризации ( $\beta = 1$ ) и равен нулю для линейной поляризации вдоль горизонтальной оси ( $\beta = 0$ ). Получается, что в присутствии оптического вихря у круговой поляризации мгновенное направление вектора поляризации меняется в зависимости от азимутального угла, но в обратную сторону. Чтобы понять, почему в (16) поляризационный ОУМ имеет противоположенный знак по отношению к вихревому ОУМ, запишем вектор Джонса поля в (16) в виде:

$$e^{im\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В (17) первый вектор Джонса описывает неоднородное цилиндрическое векторное поле (радиальное)  $-m$ -го порядка. Поэтому при увеличении азимутального угла  $\varphi$  вектор линейной поляризации будет вращаться по часовой стрелке. Второй вектор Джонса в (17) имеет направление, перпендикулярное первому, и задержку по фазе на  $\pi/2$ . То есть и второй вектор будет при увеличении азимутального угла  $\varphi$  вращаться по часовой стрелке, только с задержкой по фазе. Поэтому продольный поляризационный нормированный ОУМ поля (17) направлен против оптической оси  $z$ , то есть отрицательный,  $J_{p,z} = -m$ .

Также присутствие оптического вихря у поля с линейной поляризацией приводит к тому, что у поля появляется отличный от нуля гибридный ОУМ (5):

$$\mathbf{E}_6 = e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$J_{v,z} = m, \quad J_{p,z} = 0, \quad J_{h,z} = m \sin 2\gamma.$$

Из (18) видно, что гибридный ОУМ у оптического вихря с линейной поляризацией зависит от угла наклона вектора линейной поляризации к декартовым осям  $\gamma$ . Если угол наклона вектора линейной поляризации равен нулю  $\gamma = 0$  или  $\pi/2$ , то гибридный ОУМ равен нулю, а максимум гибридного ОУМ, равный  $m$ , достигается при угле наклона в 45 градусов. Чтобы понять, почему в (18) гибридный ОУМ отличен от нуля, запишем вектор Джонса в (18) виде ( $\gamma = \pi/4$ ):

$$e^{im\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ i \sin m\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Первый вектор Джонса в (19) совпадает с вектором (14) и описывает изменение степени эллиптичности поляризации при изменении азимутального угла  $\varphi$ . Второй вектор похож на первый, но его эллипс поляризации вытянут в направлении, перпендикулярном направлению, в котором вытянут первый эллипс поляризации. Поэтому оптический вихрь с линейной поляризацией под углом 45 градусов эквивалентен сумме двух эллиптически поляризованных пучков, у которых степень эллиптичности поляризации зависит от азимутального угла. Поэтому и гибридный ОУМ в (18) отличен от нуля,  $J_{h,z} = m$ .

Примеры других начальных световых полей можно найти в работе [25]. Для некоторых из них все три ОУМ (3) – (5) равны нулю. Но для одного начального поля отличным от нуля будут два ОУМ (3) и (4):

$$\mathbf{E}_7 = \begin{pmatrix} A \cos p\varphi + iB \sin p\varphi \\ A \sin p\varphi - iB \cos p\varphi \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$J_{v,z} = 2pAB, \quad J_{p,z} = p(A^2 + B^2), \quad J_{h,z} = 0.$$

#### 5. Обобщение продольных поляризационных ОУМ для непараксиального векторного поля

Обычный вектор ОУМ для векторного непараксиального поля с точностью до постоянной  $1/(8\pi\omega)$ , где  $\omega$  – угловая частота монохроматического света, имеет вид [25]:

$$\mathbf{J}_{2v} = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{p=x,y,z} E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p r dr d\varphi, \quad (21)$$

где в скобках написано векторное произведение радиуса вектора  $\mathbf{r}$  на вектор набла,  $\nabla$ . По аналогии можно определить вектора поляризационного и гибридного ОУМ:

$$\mathbf{J}_{2p} = \text{Re} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{i,j,k} \theta_{ijk} E_i^* (\mathbf{r} \times \nabla) (E_j - E_k) r dr d\varphi, \quad (22)$$

$$\mathbf{J}_{2h} = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{i,j,k} \theta_{ijk} E_i^* (\mathbf{r} \times \nabla) (E_j + E_k) r dr d\varphi, \quad (23)$$

где

$$\theta_{ijk} = \begin{cases} 1; & (i, j, k) = (x, y, z), = (y, z, x), = (z, x, y); \\ 0; & \text{иначе.} \end{cases} \quad (24)$$

Подробнее распишем только продольные проекции векторов поляризационных ОУМ (21) – (23):

$$\begin{aligned} J_{2v,z} &= \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( E_x^* \frac{\partial E_x}{\partial \varphi} + E_y^* \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} + E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi, \\ J_{2p,z} &= \text{Re} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ \left( E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y - E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x \right) + \left( E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z - E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y \right) + \left( E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x - E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right) \right] r dr d\varphi, \\ J_{2h,z} &= \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ \left( E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y + E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x \right) + \left( E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z + E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y \right) + \left( E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x + E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right) \right] r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

### 6. Поляризационный ОУМ для оптического вихря с круговой поляризацией в остром фокусе

При острой фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом  $m$  и правой круговой поляризацией  $\mathbf{E}_5$  из (16) при  $\alpha = 1$  в плоскости фокуса проекции электрического вектора имеют вид [28]:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i^{m-1}}{\sqrt{2}} e^{im\varphi} (I_{0,m} + e^{2i\varphi} I_{2,m+2}), \\ E_y &= \frac{i^m}{\sqrt{2}} e^{im\varphi} (I_{0,m} - e^{2i\varphi} I_{2,m+2}), \\ E_z &= -\sqrt{2} i^m e^{i(m+1)\varphi} I_{1,m+1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$I_{\alpha,\beta} = \left( \frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\alpha} \int_0^{\theta_0} \sin^{\alpha+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\alpha} \left( \frac{\theta}{2} \right) \times \cos^{1/2}(\theta) B(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\beta(\xi) d\theta, \quad (27)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f$  – фокусное расстояние апланатической системы,  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $\theta_0$  – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую апертуру апланатической оптической системы  $NA = \sin(\theta_0)$ ,  $\xi = kr \sin(\theta)$ ,  $B(\theta)$  – действительная функция, зависящая только от полярного угла и описывающая распределение амплитуды фокусируемого пучка света. Подставим выражения (26) под интегралы в (25), получим:

$$\begin{aligned} J_{2v,z} &= mW_0 + (m+2)W_2 + 2(m+1)W_1, \\ J_{2p,z} &= -mW_0 + (m+2)W_2, \\ J_{2h,z} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) использованы обозначения для следующих интегралов [29]:

$$W_\alpha = 2\pi \int_0^\infty |I_{\alpha,\beta}(r)|^2 r dr = 4\pi f^2 \int_0^{\theta_0} \sin^{2\alpha+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{5-2\alpha} \left( \frac{\theta}{2} \right) |B(\theta)|^2 d\theta. \quad (29)$$

Из (28) видно, что обычный векторный ОУМ  $J_{2v,z}$  совпадает с полученным ранее выражением в [28] и показывает, что даже при отсутствии оптического вихря ( $m=0$ ) в фокусе из-за спин-орбитальной конверсии имеет место продольная компонента обычного ОУМ:

$$J_{2v,z}(m=0) = 2(W_2 + W_1). \tag{30}$$

Из (28) также видно, что в фокусе отличным от нуля будет и продольная компонента вектора поляризаационного ОУМ  $J_{2p,z}$ . Отличие этих двух ОУМ в том, что продольная составляющая поля  $E_z$  не дает вклад в  $J_{2p,z}$  и изменяется знак первого (основного) слагаемого  $mW_0$ . Причину изменения знака у поляризаационного ОУМ мы ранее объясняли после уравнения (17). Она заключается в том, что при увеличении фазы оптического вихря с ростом (против часовой стрелки) азимутального угла, мгновенный вектор поляризации вращается по часовой стрелке. Также из (28) видно, что продольная компонента электрического поля не дает вклад в поляризаационный ОУМ потому, что не влияет на азимутальные повороты поперечного вектора поляризации в плоскости фокуса. Гибридный ОУМ в (28)  $J_{2h,z}$  равен нулю, так как при изменении азимутального угла не происходит изменение степени эллиптичности поляризации (мгновенная поляризация в каждой точке линейная).

### 7. Поляризаационный ОУМ в остром фокусе цилиндрического векторного поля

Рассмотрим еще один пример острой фокусировки цилиндрического векторного поля (13). В плоскости фокуса получим выражения для трех проекций электрического вектора [30]:

$$\begin{aligned} E_x &= i^{m-1} (I_{0,m} \cos m\varphi + I_{2,m-2} \cos(m-2)\varphi), \\ E_y &= i^{m-1} (I_{0,m} \sin m\varphi - I_{2,m-2} \sin(m-2)\varphi), \\ E_z &= 2i^m I_{1,m-1} \cos(m-1)\varphi. \end{aligned} \tag{31}$$

Подставим проекции поля в фокусе (31) в выражения для ОУМ (25), получим:

$$J_{2v,z} = 0, \quad J_{2p,z} = mW_0 - (m-2)W_2, \quad J_{2h,z} = 0. \tag{32}$$

Из (32) видно, что продольная проекция ОУМ в плоскости фокуса для поля (31) будет отлична от нуля только для поляризаационного ОУМ. Из (32) следует, что продольная проекция поляризаационного ОУМ не сохраняется при острой фокусировке. Действительно, для начального поля (13) поляризаационный ОУМ был равен  $J_{p,z} = mW$ , где  $W$  – мощность пучка (13) в начальной плоскости. А в плоскости фокуса он равен (32):  $J_{2p,z} = mW_0 - (m-2)W_2$ , где энергия в плоскости фокуса равна [28]:  $W = W_0 + W_2 + 2W_1$ . Возможно, это связано с тем, что в начальной плоскости поля (13) у ОУМ была только одна продольная проекция, а в фокусе у ОУМ будут отличны от нуля все три проекции. Интересно также, что при  $m=0$  поле (13) становится линейно поляризованным и поляризаационный ОУМ равен нулю. А в плоскости фокуса у такого поля ОУМ отличен от нуля и равен:  $J_{2p,z} = 2W_2$ . Это связано с тем, что при подстановке  $m=0$  в (31) в плоскости фокуса имеются все три компоненты электрического поля, которые зависят от азимутального угла [31]:

$$\begin{aligned} E_x &= -i(I_{0,0} + I_{2,2} \cos 2\varphi), \\ E_y &= -iI_{2,2} \sin 2\varphi, \\ E_z &= 2I_{1,1} \cos \varphi. \end{aligned} \tag{33}$$

Из (33) видно, что при изменении азимутального угла в плоскости фокуса вектор линейной поляризации будет вращаться (изменять свое направление). Это и отражается в том, что поляризаационный ОУМ отличен от нуля, хотя в начальной плоскости он равен нулю.

### 8. Моделирование

На рис. 1 показан гауссов пучок с поляризацией (15) в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея. Для расчётов были выбраны следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w = 1$  мм, порядки поляризации (15):  $m = 3, n = 2, p = 5$ , расстояние распространения  $-z = z_0 = \pi w^2 / \lambda$  – расстояние Рэлея, размер показанной области  $2,5 \times 2,5$  мм (рис. 1а) и  $20 \times 20$  мм (рис. 1б).

Для выбранных параметров, так как  $n$  и  $p$  разной чётности, поляризация справа от центра линейная горизонтальная, а слева поле вовсе равно нулю. Сверху от центра поляризация левая круговая, так как при полярном угле  $\varphi = \pi/2$  вектор Джонса (15) равен  $\mathbf{E}_4 = [i, 1]^T$  (верхний индекс T означает транспонирование). Аналогично снизу от центра поляризация правая круговая, так как при полярном угле  $\varphi = -\pi/2$  вектор Джонса (15) равен  $\mathbf{E}_4 = [-i, 1]^T$ .

Для рис. 1а были получены следующие значения нормированного ОУМ:  $J_{v,z} = 2,919 \approx m = 3$  (традиционный векторный ОУМ),  $J_{p,z} = 0,981 \approx n/2 = 1$  (поляризаационный ОУМ),  $J_{h,z} = 2,434 \approx p/2 = 2,5$  (гибридный ОУМ). На расстоянии Рэлея получились похожие, но несколько меньшие значения:  $J_{v,z} = 2,545, J_{p,z} = 0,942, J_{h,z} = 2,148$ . Уменьшение значений ОУМ вызвано расширением пучка, и поэтому при вычислении ОУМ периферийные области с небольшой интенсивностью не попали в расчётную область.

Рассмотрим теперь все три ОУМ при фокусировке.

На рис. 2 показана интенсивность в остром фокусе светового поля с правой круговой поляризацией (вектор Джонса (16), рис. 2а) и с радиальной поляризацией (вектор Джонса (13), рис. 2б). Для расчётов использовались

следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, фокусное расстояние фокусирующей линзы  $f = 20\lambda = 10,64$  мкм, порядок фазового вихря у поля с круговой поляризацией  $m = 3$ , порядок поляризации у радиально поляризованного поля  $m = 3$ , числовая апертура  $NA = \arcsin 0,95$ , радиальное распределение амплитуды постоянно,  $B(\theta) \equiv 1$ , размер показанной области –  $2,5 \times 2,5$  мкм.

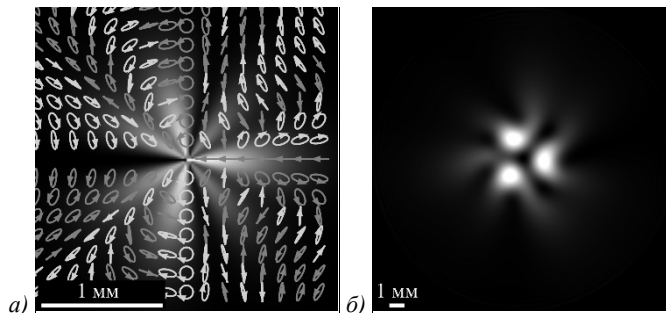


Рис. 1. Распределение интенсивности (а,б) и поляризации (а) в начальной плоскости гауссова пучка с поляризацией (15). Серые и белые эллипсы означают соответственно левую и правую эллиптическую поляризацию

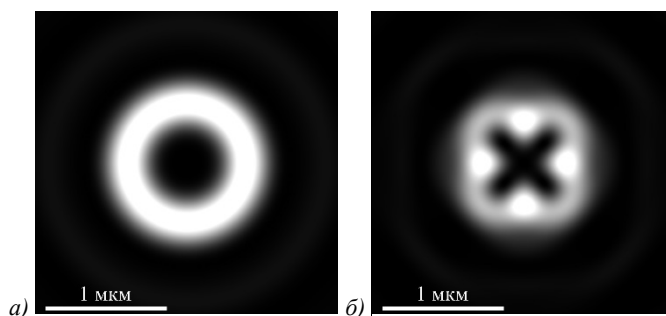


Рис. 2. Распределения интенсивности в остром фокусе светового поля с правой круговой (а) и с радиальной поляризацией (б)

Согласно [28], при числовой апертуре 0,95 и равномерном начальном поле энергия всего поля равна  $W = 2\pi f^2(1 - \cos \alpha) = 489,21$  (в безразмерных единицах). При этом она складывается из следующих компонент, определяющих в (28) и в (32) соответственно энергии вихрей  $m$ -го,  $(m \pm 1)$ -го и  $(m \pm 2)$ -го порядков:  $W_0 = (4\pi/3)f^2 [1 - \cos^6(\alpha/2)] = 340,26$ ,  $W_1 = (2\pi/3)f^2 \sin^4(\alpha/2) [1 + 2\cos^2(\alpha/2)] = 64,83$ ,  $W_2 = (4\pi/3)f^2 \sin^6(\alpha/2) = 19,283$ .

Согласно теории (формула (28)), для поля с правой круговой поляризацией (рис. 2а) должны получиться следующие значения ОУМ (не нормированные на энергию):  $J_{v,z} = 1635,8$  (традиционный векторный ОУМ),  $J_{p,z} = -924,37$  (поляризационный ОУМ),  $J_{h,z} = 0$  (гибридный ОУМ). При расчёте получились похожие значения:  $J_{v,z} = 1598,06$ ,  $J_{p,z} = -915,27$ ,  $J_{h,z} = 0,00$ . Расчетные значения немного меньше, чем теоретические из-за того, что суммирование (интегрирование) по формулам (25) происходило в ограниченной области размером  $2,5 \times 2,5$  мкм на рис. 2а.

Аналогично для поля с радиальной поляризацией (рис. 2б) значения ОУМ должны совпасть с формулой (32). Согласно этой формуле должны получиться следующие значения ОУМ:  $J_{v,z} = 0$  (традиционный векторный ОУМ),  $J_{p,z} = 1001,5$  (поляризационный ОУМ),  $J_{h,z} = 0$  (гибридный ОУМ). При расчёте получились похожие значения:  $J_{v,z} = 0,0$ ,  $J_{p,z} = 988,19$ ,  $J_{h,z} = 0,00$ . Расчетные значения немного меньше, чем теоретические из-за того, что суммирование (интегрирование) по формулам (25) происходило в ограниченной области размером  $2,5 \times 2,5$  мкм на рис. 2б.

### Заключение

В работе совместно рассмотрены три разных ОУМ, применимых к описанию парааксиальных векторных полей (3)–(5). Показано, что другие аналогичные ОУМ (6)–(8) тождественно равны нулю. Три рассмотренные ОУМ являются инвариантами и сохраняются при парааксиальном распространении пучка. Показано, что для пучков Пуанкаре (10) в начальной плоскости отличными от нуля являются только обычный и поляризационный ОУМ, гибридный ОУМ равен нулю (11). Приведен пример векторного поля, у которого отличными от нуля являются все три ОУМ (15). Показано, что оптический вихрь с эллиптической поляризацией обладает поляризационным ОУМ (16), а оптический вихрь с линейной поляризацией обладает гибридным ОУМ (19). Приведены определения векторов поляризационного и гибридного ОУМ (22), (23). Аналитически рассчитаны продольные проекции поляризационного ОУМ в плоскости острого фокуса для оптического вихря с круговой поляризацией (28) и цилиндрического векторного пучка произвольного порядка (32). Показано, что продольные проекции ОУМ не сохраняются, так как поляризационный ОУМ в начальной плоскости (13) отличается от ОУМ в плоскости фокуса (32). На наш взгляд, это связано с тем, что в начальной плоскости у ОУМ имеется только одна продольная проекция, а в плоскости фокуса отличными от нуля являются и поперечные проекции ОУМ. Поляризационный и гибридный ОУМ показывают, что векторное световое поле при поглощении в среде, чувствительной к поляризации, должно приводить к массопереносу вещества по окружности или по спирали [15, 16].

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 26-12-00117) (теория) и в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» (моделирование).

### References

- [1] Zhai Y, Cao L, Liu Y, Tan X. A review of polarization-sensitive materials for polarization holography. *Materials* 2020; 13(23): 5562. DOI: 10.3390/ma13235562.
- [2] Achimova E. Direct surface relief formation in nanomultilayers based on chalcogenide glasses: A review. *Surf Eng Appl Electr* 2016; 52: 456-468. DOI: 10.3103/S1068375516050021.
- [3] Du X, Wu H, Peng Z, Tan C, Yang L, Wang Z. Room-temperature polarization-sensitive photodetectors: Materials, device physics, and applications. *Mat Sci Eng R Rep* 2024; 161: 100839. DOI: 10.1016/j.mser.2024.100839.
- [4] Song S, Kim J, Moon T, Seong B, Kim W, Yoo CH, Choi JK, Joo C. Polarization-sensitive intensity diffraction tomography. *Light Sci Appl* 2023; 12(1): 124. DOI: 10.1038/s41377-023-01151-0.
- [5] Li Z, Xu B, Liang D, Pan A. Polarization-dependent optical properties and optoelectronic devices of 2D materials. *Research* 2020; 2020: 5464258. DOI: 10.34133/2020/5464258.
- [6] Lin Z, Yang X, He J, Dong N, Li B. Structural and optoelectronic characterization of anisotropic two-dimensional materials and applications in polarization-sensitive photodetectors. *Appl Phys Rev* 2025; 12(1): 011301. DOI: 10.1063/5.0226193.
- [7] He Z, Guan H, Liang X, Chen J, Xie M, Luo K, An R, Ma L, Ma F, Yang T, Lu H. Broadband, polarization-sensitive, and self-powered high-performance photodetection of hetero-integrated MoS<sub>2</sub> on lithium niobate. *Research* 2023; 6: 0199. DOI: 10.34133/research.0199.
- [8] Tripathi RPN, Yang X, Gao J. Polarization-sensitive optical responses from natural layered hydrated sodium sulfosalts gerstleyite. *Sci Rep* 2022; 12: 4242. DOI: 10.1038/s41598-022-08235-8.
- [9] Gertners U, Teteris J. The impact of light polarization on the direct relief forming processes in As<sub>2</sub>S<sub>3</sub> thin films. *IOP Conf Ser: Mater Sci Eng* 2012; 38: 012026. DOI: 10.1088/1757-899X/38/1/012026.
- [10] Trunov ML. Polarization-dependent laser-induced giant mass transport in glassy semiconductors. *JETP Lett* 2007; 86(5): 313-316. DOI: 10.1134/S0021364007170079.
- [11] Hubert C, Fiorini-Debuisschert C, Maurin I, Nunzi JM, Raimond P. Spontaneous patterning of hexagonal structure in an azopolymer using light-controlled mass transport. *Adv Mater* 2002; 14(10): 729-732. DOI: 10.1002/1521-4095(20020517)14:10<729::AID-ADMA729>3.0.CO;2-1
- [12] Hubert C, Fiorini-Debuisschert C, Rocha L, Raimond P, Nunzi JM. Spontaneous photoinduced patterning of azo-dye polymer films: the facts. *J Opt Soc Am B* 2007; 24(8): 1839-1846. DOI: 10.1364/JOSAB.24.001839.
- [13] Li YB, He YN, Tong XL, Wang XG. Stretching effect of linearly polarized Ar<sup>+</sup> laser single-beam on azo polymer colloidal spheres. *Langmuir* 2006; 22(5): 2288-2291. DOI: 10.1021/la052884b.
- [14] Wang Z, Hsu C, Wang X. Topographical transition of submicron pillar array of azo molecular glass induced by circularly polarized light. *Sci Rep* 2021; 11: 7327. DOI: 10.1038/s41598-021-86794-y.
- [15] Porfirev AP, Khonina SN, Khorin PA, Ivliev NA. Polarization-sensitive direct laser patterning of azopolymer thin films with vortex beams. *Opt Lett* 2022; 47(19): 5080-5083. DOI: 10.1364/OL.471236.
- [16] Porfirev AP, Khonina SN, Ivliev NA, Fomchenkov SA, Porfirev DP, Karpeev SV. Polarization-sensitive patterning of azopolymer thin films using multiple structured laser beams. *Sensors* 2023; 23(1): 112. DOI: 10.3390/s23010112.
- [17] Huang H, Wang Z, Li X, Yang F, Su Y, Xu J, Wang X. Directional mass transfer of azo molecular glass microsphere induced by polarized light in aqueous immersion media. *RSC Adv* 2021; 11: 15387-15399. DOI: 10.1039/D1RA01904J.
- [18] Pawlik G, Mitus AC. Photoinduced mass transport in azo-polymers in 2D: Monte Carlo study of polarization effects. *Materials* 2020; 13(21): 4724. DOI: 10.3390/ma13214724.
- [19] Huang H, Su Y, Xu J, Wang X. Asymmetric morphology transformation of azo molecular glass microspheres induced by polarized light. *Langmuir* 2019; 35(47): 15295-15305. DOI: 10.1021/acs.langmuir.9b02882.
- [20] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/physreva.45.8185.
- [21] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [22] Berry MV. Index formulae for singular lines of polarization. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(7): 675-678. DOI: 10.1088/1464-4258/6/7/003.
- [23] Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams. *Opt Commun* 2002; 201(4-6): 251-270. DOI: 10.1016/s0030-4018(01)01725-4.
- [24] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [25] Fang L, Wang J. Optical angular momentum derivation and evolution from vector field superposition. *Opt Express* 2017; 25(19): 23364-23375. DOI: 10.1364/OE.25.023364.
- [26] Beckley AM, Brown TG, Alonso MA. Full Poincaré beams. *Opt Express* 2010; 18(10): 10777-10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.
- [27] Khonina SN, Ustinov AV, Porfirev AP. Generation of light fields with controlled non-uniform elliptical polarization when focusing on structured laser beams. *Photonics* 2023; 10(10): 1112. DOI: 10.3390/photonics10101112.
- [28] Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Telegin AM. Orbital angular momentum at the tight focus of a circularly polarized Gaussian beam. *J Opt Soc Am A* 2025; 42(1): 52-58. DOI: 10.1364/JOSAA.543260.
- [29] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. *Micromachines* 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.

- [30] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA, Zaitsev VD. Spin Hall effect before and after the Focus of a high-order cylindrical vector beam. Appl Sci 2022; 12(23): 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
- [31] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc R Soc Lond A Math Phys Sci 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.

---

#### *Сведения об авторах*

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0003-1737-0393.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает ведущим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0002-0488-4267.

---

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 20 декабря 2022 г. Окончательный вариант – 16 июня 2023 г.

---

---

# Orbital angular momentum of vector light fields

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",  
Molodogvardeyskaya str. 151, Samara, 443001, Russia;

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

## Abstract

In this work, in addition to the well-known orbital angular momentum (OAM) vector, which characterizes azimuthal rate of phase change of each electric field component, we introduce two novel OAM vectors, polarization and hybrid ones, to characterize, respectively, azimuthal rates of change of the direction of the polarization ellipse axes and change of the ellipticity degree of the polarization ellipse. Longitudinal components of the three afore-mentioned OAM vectors in the focal plane are calculated at the sharp focus of a circularly polarized optical vortex and a higher-order cylindrical vector beam. It is shown that for the circularly polarized optical vortex, only the conventional and polarization OAMs are nonzero in the focal plane, meanwhile for the cylindrical field, it is the polarization OAM which is nonzero. The longitudinal component of the electric field does not contribute to the polarization OAM. It is interesting that the polarization OAM for the linearly polarized beam in the initial plane is zero, but in the plane of sharp focus of linearly polarized light this OAM is nonzero.

**Keywords:** orbital angular momentum, vector light field, polarization orbital angular momentum, hybrid orbital angular momentum, sharp focusing, cylindrical vector beam.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of vector light fields. *Computer Optics* 2026; 50(2): 1705. DOI: 10.18287/COJ1705.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant 26-12-00117 (Sections Theoretical background and Numerical simulation) and within a government project of NRC "Kurchatov Institute" (Sections Introduction and Conclusion).

---

## Author's information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0003-1737-0393.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University. He is co-author of more than 200 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0002-0488-4267.

---

Received December 20, 2022. The final version – June 16, 2023.

---