

Алгоритм расчета спектров рассеяния на солитонных потенциалах для системы Захарова–Шабата

А.Е. Чернявский^{1,2}, Л.Л. Фрумин¹

¹ Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
630090, Россия, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, д. 1;

² Новосибирский государственный университет,
630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2

Аннотация

Представлен алгоритм решения прямой задачи рассеяния для дискретного спектра системы уравнений Захарова–Шабата, соответствующего солитонным потенциалам – решениям нелинейного уравнения Шрёдингера. Алгоритм предназначен для декодирования информации в солитонных оптических линиях связи. Солитонные потенциалы являются безотражательными. Рассеяние на них порождает эванесцентные (затухающие) волны. Для расчета спектров рассеяния применен метод трансфер-матриц. Интегральным способом дискретной аппроксимации матриц построена неявная разностная схема. Устойчивость схемы подтверждают оценки операторной нормы произведения трансфер-матриц. Алгоритм находит спектральные коэффициенты рассеяния и комплексные нормировочные параметры N-солитонного решения нелинейного уравнения Шрёдингера, сводя задачу к расчету произведений полиномов, зависящих от спектрального параметра. Для ускорения расчетов применяются стратегия дублирования, теорема о свертке и быстрое преобразование Фурье. Численное моделирование для N-солитонного дискретного спектра системы Захарова–Шабата подтвердило устойчивость, высокую скорость расчетов и второй порядок точности алгоритма.

Ключевые слова: система Захарова–Шабата, задача рассеяния, неявная схема, дискретный спектр, солитон, алгоритм.

Цитирование: Чернявский, А.Е. Алгоритм расчета спектров рассеяния на солитонных потенциалах для системы Захарова–Шабата / А.Е. Чернявский, Л.Л. Фрумин // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 2. – 1716. – DOI: 10.18287/COJ1716.

Citation: Chernyavsky AE, Frumin LL. Algorithm for calculating scattering spectra on soliton potentials for the Zakharov-Shabat system. Computer Optics 2026; 50(2): 1716. DOI: 10.18287/COJ1716.

Введение

Современные волоконно-оптические линии связи составляют технологическую основу глобальной сети интернет. Для передачи цифровой информации в них используется модуляция огибающей электрического поля высокочастотного оптического сигнала [1]. На рубеже XXI века наблюдался стремительный прогресс и развитие технологии волоконной оптической связи. Рост производительности (скорости передачи информации) оптических линий обеспечивался ростом частоты и амплитуды модуляции, что привело к усилению дисперсионных и нелинейных искажений информационного сигнала, передаваемого по оптическому волокну [2]. В скалярном (не учитывающем эффекты поляризации) случае, при условии компенсации затухания сигнала в волокне, эволюция сигнала q под воздействием эффектов дисперсии и нелинейности описывается фокусирующим нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) [3, 4], которое для случая оптической линии обычно записывают в нормализованном виде:

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + |q|^2 q = 0, \quad (1)$$

где $q(z, t)$ – решение НУШ, i – мнимая единица, z – расстояние вдоль оптической линии (эволюционная переменная), t – временной параметр в сопутствующей сигналу системе координат (см. [1]).

НУШ (1) принадлежит к числу т.н. интегрируемых уравнений, для исследования которых используется метод обратной задачи рассеяния [3, 4]. С вычислительной точки зрения этот метод, позволивший аналитически исследовать целый ряд нелинейных волновых уравнений, оказался мощным инструментом для эффективного численного решения задачи Коши для этих нелинейных уравнений, причем без каких-либо итераций.

Метод обратной задачи рассеяния сводит решение нелинейного уравнения к исследованию спектральных задач рассеяния (прямых и обратных) для некоторой линейной системы, ассоциированной с нелинейным уравнением. Система уравнений Захарова–Шабата служит такой ассоциированной линейной системой для скалярного НУШ:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -i\zeta & q(t) \\ -q^*(t) & i\zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ – двумерный собственный вектор волновых амплитуд, в котором u – амплитуда падающей волны, v – амплитуда отраженной волны, ζ – комплексное собственное значение, а астериск обозначает комплексное сопряжение. Система Захарова–Шабата рассматривается при фиксированном значении эволюционного параметра z , который для краткости не указан в аргументах функций. Решения фокусирующей системы Захарова–Шабата (2) могут содержать как непрерывный, так и дискретный спектры. Непрерывный спектр имеет действительные собственные значения ($\zeta = \xi + i0$) и описывает диспергирующие волны. Дискретный спектр системы с набором комплексных собственных значений $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n, n = 1, 2, \dots, N, \eta_n > 0$, соответствует набору солитонных компонент решения НУШ (рассеивающего потенциала). В случае отсутствия непрерывного спектра говорят, что потенциал является N -солитонным решением НУШ, которое можно представить в следующем виде [5, 6]:

$$q_N = -2i \sum_{n,j=1}^{n,j=N} \rho_n e^{i\zeta_n t} [(E + G^*G)^{-1}]_{n,j} e^{i\zeta_j t}, \quad (3)$$

где E – единичная матрица размером $N \times N$, а элементы матрицы G заданы формулой:

$$G_{n,j} = \frac{i\rho_j}{(\zeta_n^* - \zeta_j)} e^{i(\zeta_n^* - \zeta_j)t}, \quad j, n = 1, \dots, N.$$

Комплексные нормировочные параметры ρ_j определяют N смещений t_{0j} и N фаз θ_j каждой из солитонных компонент N -солитонного потенциала НУШ:

$$\rho_j = -2i\eta_j \exp(2\eta_j t_{0j} - i\theta_j). \quad (4)$$

Зависимость N -солитонного решения НУШ от параметра z для задачи рассеяния полностью определяется эволюционными фазовыми множителями $\exp(-2i\zeta_j^2 z)$ нормировочных параметров ρ_j [3, 4, 5].

Одиночный солитон – 1-солитонное решение (3), движется с постоянной скоростью, а его форма не меняется в процессе эволюции. Это свойство солитона было предложено использовать для передачи информации по нелинейно-дисперсионным каналам связи сотрудниками лаборатории Белла [7] еще за несколько лет до появления волоконно-оптических линий. Эта идея – использование солитонов для компенсации нелинейно-дисперсионных искажений сигнала – в дальнейшем привела к развитию солитонных линий связи [8]. В современных прототипах солитонных линий, содержащих кодирующее устройство (кодер), оптическое волокно и декодер, информация передается с помощью цуга солитонов с известным собственным значением. Для кодирования информации обычно используется модуляция фаз θ и начальных смещений t_0 солитонов. В процессе исследования солитонных линий было обнаружено, что соседние солитоны в цуге взаимодействуют между собой, что приводит к такому явлению, как джиттер (дрожание сигнала). Для подавления джиттера требуются защитные интервалы между солитонами, которые снижают производительность солитонных линий связи и их спектральную эффективность (скорость передачи, отнесенную к выделенному частотному диапазону).

Для повышения производительности и спектральной эффективности солитонных линий в работе [9] было предложено использовать не одиночные солитоны, а N -солитонные решения НУШ (3), которые автоматически учитывают взаимодействие солитонов между собой. Основу декодера в такой N -солитонной линии должен обеспечить эффективный (точный и быстрый) алгоритм решения прямой задачи рассеяния. Этот подход позволяет использовать современные схемы мультиплексирования с ортогональным частотным разделением каналов – OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing) [9]. Чем больше число N солитонов в N -солитонном решении НУШ, тем выше спектральная эффективность такого подхода.

Сравнительно недавно в работах [6, 10] для решения прямой задачи рассеяния для дискретного спектра фокусирующей системы Захарова–Шабата были предложены алгоритмы, использующие экспоненциальные интеграторы [11] высоких (четвертого и шестого) порядков точности, основанные на разложениях Магнуса. Это, определенно, одни из лучших алгоритмов, позволяющих продвинуться в решении задач рассеяния в область больших значений N для N -солитонных потенциалов. Вместе с тем в расчетах спектральных задач рассеяния этими алгоритмами была обнаружена численная неустойчивость. По-видимому, эта неустойчивость обусловлена тем, что в [6, 10] использовалась явная разностная схема для системы Захарова–Шабата.

В данной работе рассматривается алгоритм решения прямой задачи рассеяния для солитонного спектра системы Захарова–Шабата, основанный на интегральном способе дискретной аппроксимации системы Захарова–Шабата [12], приводящий к неявной схеме, в рамках метода трансфер-матриц [13]. Получены оценки операторной (спектральной) нормы произведения трансфер-матриц и показана устойчивость неявной разностной схемы. Для ускорения расчетов применяются стратегия дублирования, теорема о свертке и быстрое преобразование Фурье.

1. Постановка прямой задачи рассеяния

Как известно [5], чисто дискретные N -солитонные потенциалы являются безотражательными: в процессе рассеяния волн отраженная волна отсутствует вдали от рассеивающего потенциала, где коэффициент отражения от такого потенциала обращается в нуль. Однако вблизи такого потенциала имеются рассеянные волны – это

эванесцентные волны, неоднородные, быстро затухающие вдали от него. Таким образом, задача рассеяния для дискретного спектра, в отличие от случая непрерывного спектра, должна ставиться как задача рассеяния не однородных, а эванесцентных волн – волн с комплексными волновыми числами. Задача рассеяния для эванесцентных волн дискретного спектра для конечного носителя аналогична задаче рассеяния однородных волн для случая непрерывного спектра. Для решения прямой задачи рассеяния в случае дискретного спектра предлагается использовать метод трансфер-матриц (МТМ), называемый также методом матриц переноса или методом T-матриц [13]. Этот метод широко применяется в компьютерной оптике для расчета спектров рассеяния многослойных покрытий, лазерных зеркал, оптических фильтров, просветляющих элементов, волоконных брэгговских решеток.

В отличие от случая непрерывного спектра, для дискретного спектра трансфер-матрицы определяются не для однородной, а для эванесцентной волны. МТМ сводит решение прямой задачи рассеяния к перемножению трансфер-матриц. Точность и производительность метода зависит от способа расчета матриц и скорости вычисления их произведения. Расчет трансфер-матриц основан на дискретной аппроксимации задачи рассеяния. Высокую точность аппроксимации, удобные и устойчивые расчетные схемы дают интегральные подходы к дискретизации задачи, например, метод конечных объемов [14].

Граничные условия задачи рассеяния опираются на асимптотики решений вдали от рассеивателя. Рассмотрим для определенности левую задачу рассеяния, когда бегущая вправо волна $u(t)$ падает слева на рассеивающий потенциал, порождая бегущую влево эванесцентную волну отражения $v(t)$.

Для заданного коэффициента прохождения ($d(\zeta) = 1$) запишем асимптотики волновых амплитуд вдали от рассеивателя в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\zeta t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} b(\zeta)e^{-i\zeta t} \\ a(\zeta)e^{i\zeta t} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ – спектральные коэффициенты рассеяния соответственно для падающей и отраженной от рассеивающего потенциала волны. Коэффициенты $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ определяют спектральный коэффициент отражения, $r(\zeta) = b(\zeta)/a(\zeta)$, который в случае чисто дискретного спектра обращается в нуль на действительной оси $\zeta = \xi + i \times 0$.

В рамках МТМ временной интервал разбивается на M дискретных слоев, каждый из которых характеризуется трансфер-матрицей T_m , где m – номер слоя. Эта матрица связывает вектора волновых амплитуд $\begin{pmatrix} v_m \\ u_m \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_{m+1} \\ u_{m+1} \end{pmatrix}$ на границах слоя: $\begin{pmatrix} v_m \\ u_m \end{pmatrix} = T_m \begin{pmatrix} v_{m+1} \\ u_{m+1} \end{pmatrix}$.

Заметим, что эта матрица переноса T_m для левой задачи рассеяния является обратной матрице переноса для правой задачи рассеяния.

Для конечного носителя, к примеру, интервала $[t_0, t_M]$, асимптотики (5) приводят к граничным условиям следующего вида:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(\zeta)e^{-i\zeta t_0} \\ a(\zeta)e^{i\zeta t_0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_M \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\zeta t_M} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $u_M = u(t_M)$, $v_M = v(t_M)$. Последовательное умножение трансфер-матриц связывает вектор-столбцы амплитуд правого и левого краев интервала:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = T_0 T_1 \dots T_{M-1} \begin{pmatrix} v_M \\ u_M \end{pmatrix}.$$

Из граничных условий (6) для определения коэффициентов рассеяния следует:

$$\begin{pmatrix} b(\zeta)e^{-i\zeta t_0} \\ a(\zeta)e^{i\zeta t_0} \end{pmatrix} = T_0 T_1 \dots T_{M-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\zeta t_M} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Спектральные коэффициенты $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, полученные после перемножения матриц в (7), позволяют рассчитать спектр коэффициентов отражения $r(\zeta) = b(\zeta)/a(\zeta)$ во всей комплексной плоскости собственных значений ζ . Резонансы коэффициентов отражения теоретически позволяют находить спектр собственных значений солитонов ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N$. В работе [6] для поиска собственных значений ζ_n используется процедура нахождения нулей спектрального коэффициента $a(\zeta)$ методом Ньютона. В данной работе предполагается, что спектр собственных значений заранее известен, как это обычно принято в случае солитонных линий. Следуя работе [9], расположим эквидистантно эти собственные значения ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N$, в комплексной плоскости на прямой, параллельной действительной оси. Другими словами, для $n = 1, 2, \dots, N$, $\zeta_n = (n-1)\Delta\xi + \xi_0 + i\eta_0$, где $\eta_0 > 0$. Такой выбор собственных значений позволяет находить все коэффициенты нормировки ρ_n , в соответствии со схемой OFDM, с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье [9].

В случае чисто дискретного спектра собственные числа N -солитонного спектра полностью определяют спектральный коэффициент $a(\zeta) = \prod_{n=1}^N (\zeta - \zeta_n)/(\zeta - \zeta_n^*)$, что позволяет контролировать точность расчетов,

сравнивая результат с этой формулой. Основной целью прямой задачи рассеяния является поиск нормировочных параметров ρ_n , определяемых формулой:

$$\rho_n = \frac{b(\zeta_n)}{a'(\zeta_n)}, \tag{8}$$

где штрих обозначает производную:

$$a'(\zeta_n) = \left. \frac{da(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_n}.$$

2. Дискретизация задачи рассеяния

Определим по временной координате t равномерную расчетную сетку $t_m, m = 0, 1, \dots, M: t_m \in [-L/2 = t_0, t_1, \dots, t_M = L/2]$, с шагом L/M , где $L = t_M - t_0$ – размер интервала. Половину шага $L/(2M)$ обозначим как h . Дискретные отсчеты потенциала $q_m, m = 0, 1, \dots, M$, находятся в узлах расчетной сетки: $q_m = q(t_m)$. Предполагается, что потенциал локализован, т.е. расположен в пределах выбранного интервала $[t_0, t_M]$ и обращается в нуль на его краях.

Схема, поясняющая дискретизацию левой задачи рассеяния, представлена на рис. 1

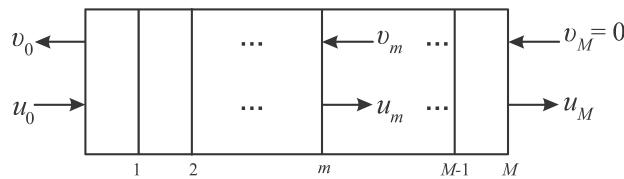


Рис. 1. Схема дискретизованной левой задачи рассеяния

Для одной и той же задачи рассеяния можно записать несколько различных вариантов трансфер-матриц T_m , с разной степенью точности аппроксимирующих задачу. Некоторые из этих трансфер-матриц будут приводить к неустойчивости, т.е. к росту ошибки аппроксимации в ходе расчета, в процессе перемножения трансфер-матриц. В работе [12] был представлен интегральный подход к расчету трансфер-матриц без учета дискретного спектра системы Захарова–Шабата, позволяющий с помощью устойчивой неявной схемы аппроксимировать эти матрицы со вторым порядком точности. Используя этот подход для дискретного спектра, перепишем систему (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} (e^{i\zeta t} v)' = q e^{i\zeta t} u \\ (e^{-i\zeta t} u)' = -q^* v e^{-i\zeta t} \end{cases}, \tag{9}$$

где штрих обозначает дифференцирование по t . Интегрирование системы уравнений (9) на интервале $[t_m, t_{m+1}]$, дает:

$$\begin{cases} e^{i\zeta t_{m+1}} v(t_{m+1}) - e^{i\zeta t_m} v(t_m) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{i\zeta t} q u dt \\ e^{-i\zeta t_{m+1}} u(t_{m+1}) - e^{-i\zeta t_m} u(t_m) = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{-i\zeta t} q^* v dt \end{cases}. \tag{10}$$

Заменяем интегралы в (10) по формуле трапеций с третьим локальным (вторым глобальным) порядком аппроксимации $O(h^3)$ и запишем:

$$\begin{cases} v_{m+1} - e^{-2i\zeta h} v_m = h(q_{m+1} u_{m+1} + e^{-2i\zeta h} q_m u_m) \\ u_{m+1} - e^{2i\zeta h} u_m = -h(q_{m+1}^* v_{m+1} + e^{2i\zeta h} q_m^* v_m) \end{cases}. \tag{11}$$

В итоге мы получили неявную разностную схему для системы Захарова–Шабата. Как хорошо известно, неявные схемы обычно более устойчивы, чем явные. В силу линейности неявной схемы (11) ее можно разрешить и представить в следующем явном матричном виде:

$$\begin{pmatrix} v_m \\ u_m \end{pmatrix} = \frac{e^{-2i\zeta h}}{1+h^2|q_m|^2} \begin{bmatrix} e^{4i\zeta h} & -hq_m \\ hq_m^* e^{4i\zeta h} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} \\ hq_{m+1}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{m+1} \\ u_{m+1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Перемножая матрицы в (12), опуская члены с h^3 и приближенно принимая $h^2 q_{m+1} = h^2 q_m + O(h^3)$, запишем итоговую трансфер-матрицу T_m :

$$T_m = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{1+h^2|q_m|^2} \left(\begin{bmatrix} -h^2|q_m|^2 & -hq_m \\ hq_m^* & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} \\ hq_m^* & -h^2|q_{m+1}|^2 \end{bmatrix} z \right), \tag{13}$$

где $z = e^{4i\zeta h}$, $z^{-1/2} = e^{-2i\zeta h}$. Полученная трансфер-матрица (13) является прямым следствием неявной схемы (11). Подставляя матрицы (13) в уравнение (7), путем их умножения на вектор-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\zeta t_M} \end{pmatrix}$ найдем вектор-столбец $\begin{pmatrix} b(\zeta)e^{i\zeta t_0} \\ a(\zeta)e^{-i\zeta t_0} \end{pmatrix}$. В процессе расчета произведений трансфер-матриц удобно вынести из матриц T_m множитель $z^{-1/2}$, не зависящий от номера матрицы m . В результате перемножения всех множителей получим фактор $z^{-M/2}$. Заметим, что он остается постоянным при увеличении размера дискретной сетки M : $z^{-M/2} = e^{-2i\zeta Mh} = e^{-i\zeta L}$. С учетом этого фактора для спектральных коэффициентов рассеяния $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ соответственно получим полиномы:

$$b(\zeta) = z^{-M/2}(b_0 + \dots + b_M z^M)e^{i\zeta(t_0+t_M)}, \tag{14}$$

$$a(\zeta) = z^{-M/2}(a_0 + \dots + a_M z^M)e^{-i\zeta(t_0-t_M)}. \tag{15}$$

Здесь b_j и a_j – коэффициенты полиномов для степени z^j , полученные после перемножения всех матриц T_m . Поскольку $e^{-i\zeta(t_0-t_M)} = e^{2i\zeta Mh} = z^{M/2}$, из (15) следует: $a(\zeta) = a_0 + a_1 z + \dots + a_M z^M$. Для симметричного расчетного интервала $t_0 = -t_M = -L/2$, фактор $e^{i\zeta(t_0+t_M)}$ обращается в единицу, и из (14) следует: $b(\zeta) = z^{-M/2}(b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M)$.

Для расчета комплексных нормировочных параметров ρ_n по формуле (8) требуется найти $a'(\zeta)$ – производную по переменной ζ . Принимая во внимание, что производная $z' = 4ihz$, получим:

$$a'(\zeta) = [4ih]a_1 z + \dots + [4ihM]a_M z^M.$$

Чтобы определить нормировочные параметры (8), требуется найти значения полиномов $b(\zeta)$ и $a'(\zeta)$, для набора собственных значений $\zeta_n = (n - 1)\Delta\xi + \xi_0 + i\eta_0$ для N -солитонного решения НУШ, и взять их отношение.

3. Оценка устойчивости алгоритма

Рассмотрим устойчивость расчетного алгоритма, используя трансфер-матрицу (12), которая отличается от трансфер-матрицы (13) на величину $O(h^3)$. Опуская ранее учтенный множитель $e^{-2i\zeta h} = z^{-1/2}$, запишем эту матрицу в следующем виде:

$$\frac{1}{1+h^2|q_m|^2} \begin{bmatrix} z & -hq_m \\ hq_m^* z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} \\ hq_{m+1}^* & 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Для устойчивости алгоритма достаточно потребовать, чтобы норма произведения всех M -матриц (16) оставалась конечной при стремлении размера расчетной сетки M к бесконечности.

Рассмотрим операторную (спектральную) норму матрицы $\|A\|_s$, определенную как корень от максимального собственного числа произведения матриц $A^\dagger A$, где \dagger обозначает эрмитово сопряжение [15]. Эта норма обладает свойством субмультипликативности: $\|AB\|_s \leq \|A\|_s \|B\|_s$, что удобно для оценки нормы произведения матриц.

Обозначим левую матрицу из (16) как A_m , правую – как B_m и запишем:

$$A_m^\dagger A_m = \begin{bmatrix} z^* & hq_m z^* \\ -hq_m^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -hq_m \\ hq_m^* z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |z|^2(1+h^2|q_m|^2) & 0 \\ 0 & 1+h^2|q_m|^2 \end{bmatrix},$$

$$B_m^\dagger B_m = \begin{bmatrix} 1 & hq_{m+1} \\ -hq_{m+1}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} \\ hq_{m+1}^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+h^2|q_{m+1}|^2 & 0 \\ 0 & 1+h^2|q_{m+1}|^2 \end{bmatrix}.$$

Учитывая фактор $1/(1+h^2|q_m|^2)$ в (16) и неравенство $|z| < 1$, для операторной нормы трансфер-матрицы T_m имеем оценку:

$$\|T_m\|_s \leq \frac{\sqrt{(1+h^2|q_{m+1}|^2)(1+h^2|q_m|^2)}}{1+h^2|q_m|^2} = \sqrt{\frac{(1+h^2|q_{m+1}|^2)}{(1+h^2|q_m|^2)}}.$$

Для произведения операторных норм всех M трансфер-матриц получим:

$$\left\| \prod_{m=0}^{M-1} \frac{\begin{bmatrix} z & -hq_m \\ hq_m^* z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} \\ hq_{m+1}^* & 1 \end{bmatrix}}{1+h^2|q_m|^2} \right\|_s \leq \prod_{m=0}^{M-1} \sqrt{\frac{(1+h^2|q_{m+1}|^2)}{(1+h^2|q_m|^2)}} = \sqrt{\frac{1+h^2|q_M|^2}{1+h^2|q_0|^2}}. \tag{17}$$

Полученная оценка (17) остается конечной при стремлении размера сетки M к бесконечности, поскольку q_0 и q_M являются граничными значениями и не зависят от размера сетки. Этот факт вместе с независимостью уже рассмотренного выше множителя $z^{-M/2}$ от значения M указывает на устойчивость нашей расчетной схемы.

4. Ускоренный алгоритм расчета

Скорость алгоритма решения прямой спектральной задачи рассеяния методом МТМ можно заметно увеличить, если воспользоваться современными эффективными численными подходами, такими как стратегия дублирования, теорема о свертке и быстрое преобразование Фурье [16].

Произведение трансфер-матриц T_m размерностью 2×2 , элементы которых являются биномами от параметра z , сводится к последовательному умножению полиномов на биномы. При каждом таком умножении степень полиномов будет возрастать на единицу. На m -м шаге процесса умножения для каждого элемента результирующей матрицы элементы матрицы предыдущего шага, состоящие из полиномов с $m + 1$ коэффициентом, умножаются на пары коэффициентов биномов. Оценим суммарное число операций умножения при расчете одного элемента матрицы. Число умножений можно представить в виде суммы $2 \sum_{m=1}^{M-1} 2(m + 1) = 2M^2 + 2M - 4$. Фактор 2 перед суммой учитывает, что для каждого результирующего элемента выполняется два произведения полинома на бином (два элемента строки матрицы-полинома умножаются на два элемента столбца матрицы-бинома). Таким образом, порядок числа умножений для одного элемента матрицы при последовательном расчете произведений матриц можно качественно оценить как $O(2M^2)$. Число сложений имеет аналогичный порядок величины.

Для ускорения расчетов прямой задачи рассеяния в работе [17] для системы Захарова–Шабата было предложено использовать стратегию дублирования, теорему о свертке и быстрое преобразование Фурье (БПФ). Эти подходы уже были ранее использованы авторами в работе [18] для построения «супербыстрого» алгоритма для расчета непрерывного спектра системы Манакова [19]. Эти же подходы позволяют заметно ускорить алгоритм для дискретного спектра системы Захарова–Шабата.

Следуя стратегии дублирования [16], мы выбираем число трансфер-матриц (размер расчетной сетки) в виде степени двойки: $M = 2^P$, где P – целое число. В процессе расчета произведений трансфер-матрицы разделяются на соседние пары. Эти пары перемножаются, и получается $M/2$ матриц, элементы которых представляют собой полиномы 2-го порядка по спектральному параметру z . Затем шаг умножения пар повторяется (дублируется) для результирующих матриц, пока не останется одна итоговая матрица. При одном таком цикле степень результирующих полиномов удваивается, а число умножений матриц составляет $P - 1 = \text{Log}_2(M) - 1$ раз. На каждом m -м шаге происходит перемножение 2^{P-m} пар полиномов, причем оба полинома имеют степень 2^{m-1} и содержат $2^{m-1} + 1$ коэффициент. Умножение двух таких полиномов требует $(2^{m-1} + 1)^2$ умножений. Суммарное число умножений при расчете одного элемента результирующей матрицы составит сумму $2 \sum_{m=1}^{P-1} (2^{m-1} + 1)^2 2^{P-m} = 2^{2P-1} + P2^{P+1} - 2^P - 4$. И в этой сумме фактор 2 перед ней учитывает, что расчет одного элемента матрицы требует двукратного умножения полиномов. В итоге, по порядку величины дублирующий способ расчета для числа умножений дает оценку $O(2^{2P-1}) = O(M^2/2)$. Эта оценка в четыре раза меньше, чем в случае последовательного умножения матриц.

Расчет коэффициентов полиномов в процессе такого попарного произведения матриц можно еще более ускорить, если воспользоваться теоремой о свертке. Рассмотрим произведение полинома $f = f_0 + f_1z + f_2z^2 + \dots + f_jz^j$ степени $j = 2^{m-1}$ на полином $g = g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots + g_jz^j$. В результате такого произведения получится полином степени $2j = 2^m$ с коэффициентами c_n , $n = 0, 1, \dots, 2j$. Результирующий полином можно представить в виде дискретной свертки при условии, что оба исходных полинома дополнены нулевыми коэффициентами до степени $2j$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{k=n} f_k g_{n-k}, n = 0, 1, \dots, 2j. \tag{18}$$

Расчет пары сверток при вычислении одного элемента результирующей матрицы потребует $2 \sum_{k=0}^{k=2j} (k + 1) = 4j^2 + 6j + 2$ умножений. Это число можно еще уменьшить, применяя теорему о свертке. Согласно теореме, свертку (18) можно вычислить как обратное дискретное преобразование Фурье от почленного произведения векторов дискретных преобразований Фурье массивов коэффициентов исходных полиномов:

$$c = \text{IFFT}(\text{FFT}(f) \cdot \text{FFT}(g)), \tag{19}$$

где точка (\cdot) обозначает почленное произведение дискретных быстрых преобразований Фурье массивов коэффициентов полиномов f и g . Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье обозначены в (19) как FFT и IFFT , где предполагается использование быстрого преобразования Фурье (БПФ). БПФ размером $M = 2^P$ требует порядка $O(MP) = O(M \text{Log}_2 M)$ операций умножения. Оценим полное число умножений при расчете одного элемента результирующей матрицы с помощью теоремы о свертке, учитывая почленное умножение результатов пары преобразований Фурье в (19). Эту оценку дает сумма $2 \sum_{m=1}^{m=P-1} (2^m(m + 2))2^{P-m} = MP^2 + 3MP - 4M$. В результате, для ускоренного алгоритма, использующего теорему о свертке, для расчета одного элемента результирующей матрицы получаем асимптотическую оценку числа умножений: $O(MP^2) = O(M \text{Log}_2^2 M)$.

Представленный ускоренный алгоритм расчета спектральной задачи рассеяния для дискретного спектра прямой задачи рассеяния для системы Захарова–Шабата асимптотически требует $O(M \text{Log}_2^2 M)$ операций умножения для нахождения N спектральных значений коэффициентов рассеяния.

Тестирование алгоритма решения задачи рассеяния проводилось на точном 10-солитонном решении НУШ (3). На рис. 2 в качестве примера представлены реальная и мнимая компоненты 10-солитонного потенциала.

Собственные значения 10-солитонного потенциала задавались как $\zeta_n = (n - 1)\Delta\xi + \xi_0 + i\eta_0$, где $\eta_0 = 0,8$; $\xi_0 = -2,618$; $\Delta\xi = 0,5236$; $n = 1, \dots, 10$; точные коэффициенты нормировки задавались по формуле (4), как функции от равномерно распределённых псевдослучайных параметров $t_{0j} \in [-1, 1]$ и $\theta_j \in [0, 2\pi]$. Численное моделирование прямых задач рассеяния проводилось на интервале $t \in [-30, 30]$. Результаты расчетов подтвердили второй порядок точности и высокую скорость счета алгоритма.

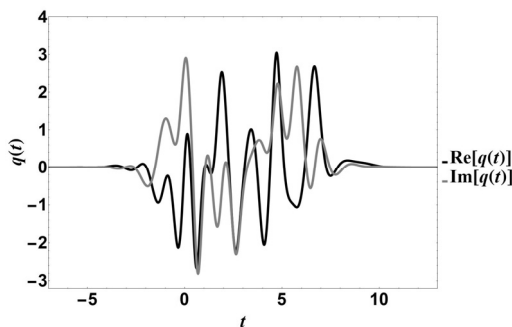


Рис. 2. Реальная (черная линия) и мнимая (серая линия) компоненты 10-солитонного потенциала

На рис. 3 представлена зависимость относительной ошибки расчета коэффициентов нормировки $|\rho_n^{ex} - \rho_n|/|\rho_n^{ex}|$, где ρ_n^{ex} – их точные значения для 10-солитонного решения для разных размеров расчетной сетки M .

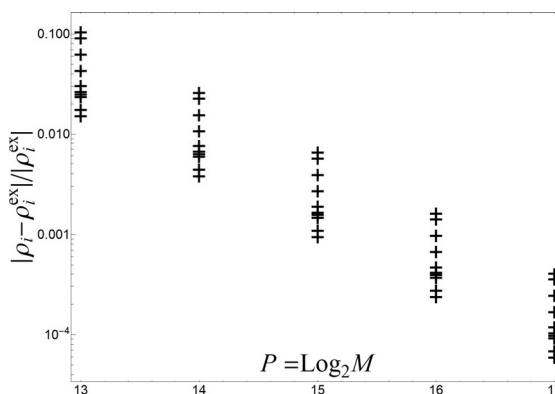


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки расчета коэффициентов нормировки ρ_n для 10-солитонного решения НУШ от размера расчетной сетки M

Заключение

Представлен алгоритм решения прямой задачи рассеяния для дискретного спектра системы уравнений Захарова–Шабата, соответствующего солитонным потенциалам – решениям нелинейного уравнения Шрёдингера. Эти потенциалы являются безотражательными: в процессе рассеяния волн отраженная волна отсутствует вдали от рассеивающего потенциала и коэффициент отражения от такого потенциала обращается в нуль. Однако вблизи него имеются рассеянные волны – это эванесцентные волны, неоднородные, быстро затухающие вдали от него. В рамках метода трансфер-матриц алгоритм использует интегральный подход к дискретизации задачи, что приводит к неявной схеме для системы Захарова–Шабата и обеспечивает второй порядок точности для N -солитонных решений НУШ. Получены оценки операторной (спектральной) нормы произведения трансфер-матриц и показана устойчивость разностной схемы. В верхней комплексной полуплоскости собственных значений ζ фокусирующей системы Захарова–Шабата алгоритм находит полиномиальную аппроксимацию зависимости спектральных коэффициентов задачи рассеяния от спектрального параметра $z = e^{4i\zeta t}$. Спектральные коэффициенты, в свою очередь, определяют нормировочные параметры ρ_n солитонных решений нелинейного уравнения Шрёдингера для заданного спектра собственных значений ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Для ускорения расчетов используется стратегия дублирования, теорема о свертке и быстрое преобразование Фурье. Для дискретной сетки размером M алгоритм асимптотически требует $O(M \log^2 M)$ операций умножения. Алгоритм предназначен для декодирования информации в солитонных оптических линиях связи. Численное моделирование подтвердило устойчивость, высокую скорость работы и второй порядок точности аппроксимации алгоритма. Авторы планируют в дальнейшем обобщить предложенный алгоритм на векторный случай системы Манакова, для учета эффектов поляризации, а также изучают возможности дальнейшего повышения точности аппроксимации алгоритма.

Благодарности

Авторы благодарят профессора Д.А. Шапиро за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 24-22-00183.

References

- [1] Agrawal GP. Nonlinear fiber optics. 3rd ed. Rochester: Academic Press; 1995. ISBN: 978-0120451432.
- [2] Richardson DJ. Filling the light pipe. Science 2010; 330(6002): 327-328. DOI: 10.1126/science.1191708.

- [3] Novikov S, Manakov S, Pitaevskii L, Zakharov V. Theory of solitons: The inverse scattering method. Berlin: Springer Science & Business Media; 1984. ISBN: 0-3061-0977-8.
- [4] Zakharov VE, Shabat AB. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in non-linear media. Sov Phys JETP 1972; 34(1): 62-69.
- [5] Lamb GL. Elements of soliton theory. New York: Wiley-Interscience; 1980. ISBN: 978-0471045594.
- [6] Mullyadzhyanov R, Gelash A. Direct scattering transform of large wave packets. Opt Lett 2019; 44(21): 5298-5301. DOI: 10.1364/OL.44.005298.
- [7] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Appl Phys Lett 1973; 23(3): 142-144. DOI: 10.1063/1.1654836.
- [8] Mollenauer LF, Gordon JP. Solitons in optical fibers: Fundamentals and applications. Boston: Academic Press; 2006. ISBN: 978-0125041904.
- [9] Frumin LL, Gelash AA, Turitsyn SK. New approaches to coding Information using inverse scattering transform. Phys Rev Lett 2017; 118(22): 223901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.223901.
- [10] Mullyadzhyanov RI, Gelash AA. Magnus expansion for the direct scattering transform: High-order schemes. Radiophys Quantum Electron 2021; 63: 786-803. DOI: 10.1007/s11141-021-10096-6.
- [11] Hochbruck M, Ostermann A. Exponential integrators. Acta Numerica 2010; 19: 209-286. DOI: 10.1017/S0962492910000048.
- [12] Gorbenko NI, Il'in VP, Frumin LL. Calculation of light scattering on a Bragg grating by recursion of transfer matrices on a nonuniform grid. Optoelectron Instrum Data Proc 2019; 55: 32-40. DOI: 10.3103/S8756699019010060.
- [13] Born M.; Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. London; New York; Paris: Pergamon Press; 2019. ISBN: 978-1108477437.
- [14] Il'in VP, Mathematical modeling. Part I. Continuous and discrete models [In Russian]. Novosibirsk: SBRAS Publisher; 2017. ISBN: 978-3319230417.
- [15] Prasolov VV. Problems and theorems in linear algebra. Providence: American Mathematical Society; 1994. ISBN: 978-0-8218-0236-6.
- [16] Blahut RE. Fast algorithms for digital signal processing. Boston: Addison-Wesley Longman Publishing Co; 1985. ISBN: 978-0201101556.
- [17] Wahls S, Poor HV. Fast numerical nonlinear Fourier transforms. IEEE Trans Inf Theory 2015; 61(12): 6957-6974. DOI: 10.1109/TIT.2015.2485944.
- [18] Frumin LL, Chernyavsky AE, Belai OV. A super-fast algorithm for solving the direct scattering problem for the Manakov system. Comp Math Math Phys 2024; 64(12): 2925-2933. DOI: 10.1134/S096554252470161619.
- Manakov SV. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. Sov Phys JETP 1973; 38(2): 248-253.

Сведения об авторах

Чернявский Александр Евгеньевич, р. 1999 г., в 2020 г. окончил физический факультет Новосибирского государственного университета по специальности «Квантовая оптика». В настоящее время является магистрантом НГУ и работает инженером-программистом в лаборатории фотоники Института автоматизации и электрометрии СО РАН. Имеет 7 публикаций в рецензируемых научных журналах. Область научных интересов: квантовая оптика, метод обратной задачи рассеяния, компьютерное моделирование. E-mail: alexander.cher.99@gmail.com

Фрумин Леонид Лазаревич, р. 1953 г., в 1976 г. окончил физический факультет Новосибирского государственного университета. В 1983 году получил степень кандидата наук по специальности «Оптика» в Институте теплофизики СО АН СССР. В 2005 году защитил докторскую диссертацию по специальности «Физика конденсированного состояния» в МГУ. Л.Л. Фрумин – главный научный сотрудник лаборатории Фотоники Института автоматизации и электрометрии СО РАН. Опубликовал 90 научных статей, имеет 3 международных патента. Область научных интересов: фотоника, плазмоника, компьютерное моделирование, метод обратной задачи рассеяния, физика конденсированного состояния. E-mail: lfrumin@iae.nsk.su

ГРНТИ 49.38.49, 29.33.25

Поступила в редакцию 15 апреля 2025 г. Окончательный вариант – 13 июня 2025 г.

Algorithm for calculating scattering spectra on soliton potentials for the Zakharov-Shabat system

A.E. Chernyavsky ^{1,2}, L.L. Frumin ¹

¹ Institute of Automation and Electrometry SB RAS,

Prospekt Akademika Koptyuga 1, Novosibirsk, 630090, Russia;

² Novosibirsk State University, Pirogova Str. 2, Novosibirsk, 630090, Russia

Abstract

We present an algorithm for solving the direct scattering problem for a discrete spectrum of the Zakharov-Shabat system corresponding to soliton potentials, which are solutions of the nonlinear Schrödinger equation. The algorithm is designed to decode information in soliton optical communication lines. Soliton potentials are nonreflective. Scattering on them generates evanescent (decaying) waves. A transfer-matrix method is used to calculate the scattering spectra. An implicit difference scheme is constructed using the integral method of discrete approximation of matrices. The stability of the scheme is confirmed by estimates of the operator norm of the product of the transfer matrices. The algorithm finds spectral scattering coefficients and complex normalization parameters of the N-soliton solution of the nonlinear Schrödinger equation, reducing the problem to calculating products of polynomials that depend on the spectral parameter. The doubling strategy, convolution theorem, and fast Fourier transform are used to speed up the calculations. Numerical simulation for an N-soliton discrete spectrum of the Zakharov-Shabat system confirmed the stability, high speed of calculations and second order accuracy of the algorithm.

Keywords: Zakharov-Shabat system, scattering problem, implicit scheme, discrete spectrum, soliton, algorithm.

Citation: Chernyavsky AE, Frumin LL. Algorithm for calculating scattering spectra on soliton potentials for the Zakharov-Shabat system. *Computer Optics* 2026; 50(2): 1716. DOI: 10.18287/COJ1716.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00183.

Author's information

Alexander Evgenievich Chernyavsky, b. 1999, graduated from the Physics Department of Novosibirsk State University in 2020, specializing in Quantum Optics. He is currently a Master's student at NSU and works as a software engineer in the Photonics Laboratory of the Institute of Automation and Electrometry SB RAS. He has 7 publications in peer-reviewed scientific journals. Research interests: quantum optics, inverse scattering method, computer modeling. Email: alexander.cher.99@gmail.com

Leonid Lazarevich Frumin, b. 1953, graduated from the Physics Department of Novosibirsk State University in 1976. In 1983, he received a PhD degree in Optics from the Institute of Thermophysics SB USSR Academy of Sciences. In 2005, he defended his doctoral dissertation in Condensed Matter Physics at Moscow State University. L.L. Frumin is a principal researcher at the Photonics Laboratory of the Institute of Automation and Electrometry SB RAS. He has published 90 scientific articles and holds 3 international patents. His research interests include photonics, plasmonics, computer modeling, inverse scattering method, and condensed matter physics. E-mail: lfrumin@iae.nsk.su

Received April 15, 2025. The final version – June 13, 2025.
