

Скрытая геометрия свободных от орбитального углового момента астигматических пучков Лагерра–Гаусса

А.В. Воляр¹, М.В. Брецько¹, С.И. Халилов¹, Я.Е. Акимова¹

¹ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

Аннотация

На основе моментов интенсивности второго порядка теоретически получен аналог поляризационных параметров Стокса для циклических изменений состояний пучков Лагерра–Гаусса с нулевым топологическим зарядом и любым радиальным числом. Полученные результаты позволили отобразить такие циклические изменения параметров пучков на аналоге сферы Пуанкаре. Оценены геометрические фазы пучков, циклические изменения параметров которых ограничивают сферические сегменты, сферические треугольники и сферические прямоугольники. Разработан, исследован и воплощен метод измерения соответствующих параметров Стокса, позволяющий отображать состояние пучков в виде траекторий на аналоге сферы Пуанкаре в ходе эксперимента. Сравнение теории и эксперимента показало их хорошее согласование.

Ключевые слова: гауссов пучок, астигматизм, цилиндрическая линза, пучки Лагерра–Гаусса, астигматическое преобразование.

Цитирование: Воляр, А.В. Скрытая геометрия свободных от орбитального углового момента астигматических пучков Лагерра–Гаусса / А.В. Воляр, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 4. – 1834. – doi: 10.18287/COJ1834.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Hidden Geometry of OAM-Free Astigmatic Laguerre-Gaussian Beams. Computer Optics 2026; 50(4): 1834. doi: 10.18287/COJ1834.

Введение

Приоритетным объектом пристального внимания последних нескольких лет является проблема выявления скрытой геометрии, свойственной фундаментальным симметриям вихревых пучков, переносящих орбитальный угловой момент (ОУМ) [1 – 3]. Хотя казалось, что ОУМ обладают исключительно пучки с осевой симметрией типа пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ) или пучки Бесселя–Гаусса, даже небольшое нарушение осевой симметрии может привести к совершенно неожиданным результатам [4]. Действительно, еще в 1992 году ван Энк и Ниенхуиз [5] теоретически предсказали возникновение ОУМ в фундаментальных гауссовых пучках, прошедших две тонкие цилиндрические линзы. Если первая линза просто нарушает осевую симметрию пучка, то вторая линза вводит ОУМ в эллиптический пучок. Через год ван Энк предсказал [6] возможность аккумуляции геометрической фазы Берри [7] при циклической вариации новых параметров пучка. Идею управления ОУМ в деформированных гауссовых пучках подхватили Кортиэл и соавторы [8], экспериментально продемонстрировав возможности этого подхода. Более детальное описание процесса возникновения и преобразования ОУМ в несимметричных гауссовых пучках было дано Котляром и соавторами [9], которые выявили широкий спектр вихревых мод, сопровождающих эллиптическую деформацию безвихревого пучка.

Однако для обнаружения скрытых симметрий как вихревых, так и безвихревых пучков потребовались специальные геометрические подходы. Еще ван Энк указывал [6], что геометрия 4D фазового пространства для вихревых пучков изоморфна сфере Пуанкаре. Эксперименты Паджетта и Кортиэла с преобразованиями простейшего возмущенного ЛГ-пучка и отображением их состояний на сферу Пуанкаре фактически предсказали возможности использования $SU(2)$ симметрии аналога сферы Пуанкаре для новой геометрии вихревых пучков. Агарвал [11] теоретически обосновал такой подход и предложил использование $SU(N)$ симметрий для вихревых ЛГ-пучков высших порядков. Эти теоретические прогнозы были экспериментально подтверждены [12] прямым измерением геометрической фазы, возникающей в результате эволюции вихревой ЛГ-моды, прошедшей астигматическую оптическую систему, с последующим отображением ее состояний на сферу Пуанкаре. Управление ОУМ моды осуществлялось посредством циклического изменения параметров четырех цилиндрических линз и двух призм Довэ. В результате пучок описывался на сфере двугранником, который преобразовывался в два соседних сферических треугольника при циклической вариации соответствующих параметров оптических узлов. Калво [13] подошел к проблеме с другой стороны, связав преобразование Вигнера ЛГ-мод высших порядков в астигматической оптической системе с отображением на $SU(2)$ орбитальную сферу Пуанкаре. Было показано, что циклические преобразования параметров, вызывающие отображения на сфере в виде сферического треугольника, сопровождаются аккумуляцией геометрической фазы, равной $\gamma_G = \pm \ell \Omega / 2$, где ℓ – топологический заряд ЛГ-пучка, Ω – телесный угол, стянутый траекторией отображения пучка, а знак фазы γ_G зависит от направления обхода контура траектории. Алиева и Бастианс [14] связали циклические преобразования вихревых пучков в 4D фазовом

пространстве с их отображением на SU(2)-сферу и аккумуляцией геометрической фазы. Основываясь на этих представлениях, Воляр и Брецько [15] сумели отобразить циклические превращения состояний структурированных вихревых ЛГ-пучков с их отображением на орбитальную сферу Пуанкаре в виде сложной пространственной траектории с самопересечениями. Разработанный ими метод прямого измерения орбитальных параметров Стокса [16] позволил непрерывно отображать преобразования структурированных вихревых пучков в экспериментальной установке на SU(2)-сферу.

Однако остался без ответа вопрос, как отображать преобразования безвихревых структурированных пучков при циклическом изменении формы картин интенсивности и их ориентации? Именно эта проблема затрагивается в нашей статье. Дело в том, что ключевая идея концепции предполагает конверсию ОУМ пучка исходной моды в моду (или моды) с противоположными знаками ОУМ при преобразовании на астигматических элементах (или другим путем). Если же исходное состояние пучка лишено ОУМ, а его преобразование не предполагает появления орбитального момента, то использование прежних подходов к отображению на орбитальную сферу Пуанкаре теряет смысл. В то же время структурированный безвихревой пучок содержит множество собственных мод, линейных ОУМ. Их использование в различных функциональных системах и узлах современной фотоники в качестве пучков со многими степенями свободы имеет равные основания со структурированными ОУМ-пучками, в частности, при их распространении через турбулентные потоки [17]. Наш подход основан на аналогии с эволюцией эллипса поляризации на элементах поляризационной оптики. Дело в том, что преобразования структуры пучка на астигматических элементах описывается в рамках 4D-матриц моментов интенсивности второго порядка [18], субматрицы которой характеризуются квадратичными формами. В частности, 2D-субматрица $\mathbf{W}$ физически наблюдаемых элементов характеризуется эллипсами интенсивности. Именно эти эллипсы интенсивности структурированных безвихревых пучков и являются предметами наших исследований. Целью статьи является отображение циклических изменений состояний лазерных пучков, таких как ЛГ-пучок с нулевым топологическим зарядом (включая фундаментальный гауссов пучок), не переносящих ОУМ, на SU(2)-сферу (аналог орбитальной сферы Пуанкаре), и оценка геометрической фазы, сопровождающей эти циклические изменения параметров.

1. Теоретические предпосылки

Фундаментальный гауссов пучок

Рассмотрим сначала простейший случай распространения гауссова пучка через оптическую систему, содержащую только одну тонкую цилиндрическую линзу. Основные принципы преобразования такого пучка были даны в пионерской работе Арнауда и Когельника [19], которой мы будем придерживаться. Если гауссов пучок с длиной Релея z_0 проходит в плоскости $z=0$ через тонкую цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f , оси которой ориентированы под углом ϕ к лабораторным осям координат, то его комплексная амплитуда на расстоянии z линзы запишется в виде

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{q_x q_y}} \exp \left[i \frac{k}{2} (Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_{xy} xy) \right], \quad (1)$$

где k – волновое число, q_x, q_y – комплексные параметры пучка вдоль осей линзы,

$$Q_x = \frac{\cos^2 \phi}{q_x} + \frac{\sin^2 \phi}{q_y}, \quad Q_y = \frac{\sin^2 \phi}{q_x} + \frac{\cos^2 \phi}{q_y}, \quad Q_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\phi \left(\frac{1}{q_x} - \frac{1}{q_y} \right). \quad (2)$$

Введем безразмерные координаты и параметры $(x/w_0, y/w_0) \rightarrow (x, y)$, $(Q_{x,y,xy}/z_0) \rightarrow Q_{x,y,xy}$, $z_0 = kw_0^2/2$, w_0 – радиус перетяжки исходного пучка в плоскости $z=0$,

$$q_x(Z) = z_0 \{ [Z(\kappa_x^2 + 1) - \kappa_x] - i \} / (\kappa_x^2 + 1) = z_0 \bar{q}_x(Z), \\ \kappa_x = \frac{z_0}{f}, \quad q_y(z) = z_1 - iz_0 = z_0(Z - i) = z_0 \bar{q}_y, \quad Z = z/z_0.$$

После первой линзы пучок испытывает простой астигматизм, который изменяет масштаб сечения пучка вдоль осей линзы. Возникает эллиптическая деформация формы сечения пучка. При этом направление осей эллипса картины интенсивности вдоль длины пучка не меняется, строго следуя за ориентацией осей линзы [18]. Более того, ОУМ пучка после первой цилиндрической линзы не возникает. Для его формирования пучок должен пройти вторую линзу [5].

Распределение интенсивности пучка после линзы читается как

$$I_{00} = \frac{1}{w_x(z)w_y(z)} \exp \{ -\alpha(x^2 + y^2) - K[\cos 2\phi(x^2 - y^2) - 2\sin 2\phi xy] \} = \\ = \frac{1}{w_x w_y} \exp \{ -\alpha r^2 - K r^2 \cos 2(\varphi + \phi) \}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (3)$$

где $\alpha = |Im(1/q_x + 1/q_y)|$, $K = Im(1/q_x - 1/q_y)$. Показатель экспоненты в (3) задает эллипс, ориентированный под углом ϕ к осям лабораторных координат (рис. 1а).

Физически измеряемыми параметрами лазерного пучка являются моменты интенсивности второго порядка 2D-субматрицы $\mathbf{W}$ [18]

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{xy} & W_{yy} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_{xx}(x, y, z) \\ W_{xy}(x, y, z) \\ W_{yy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} J_0(x, y, z) dx dy, \quad (4)$$

здесь J_{00} – полная интенсивность пучка. Элементы субматрицы $\mathbf{W}$ являются средними квадратичными отклонениями распределения интенсивности в плоскости z сечения пучка и имеют простую физическую трактовку. Элемент $W_{xx}(z)$, нормированный на полную интенсивность пучка J_{00} , задает квадрат диаметра пучка $4w_x^2(z)$.

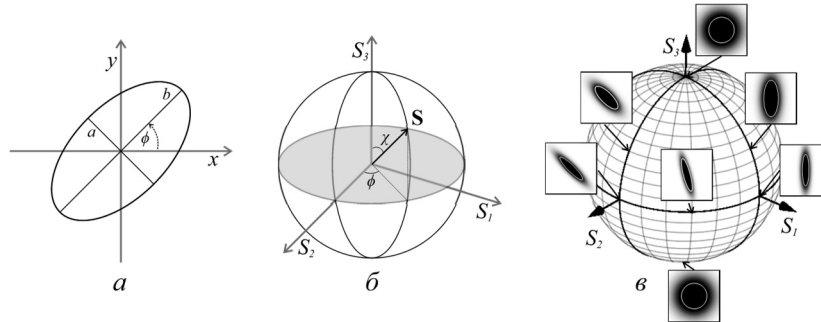


Рис. 1. (а) Параметры эллипса интенсивности на фоне картины интенсивности; (б) аналог сферы Пуанкаре для состояний эллипса интенсивности и вектора Стокса $\mathbf{S}$; (в) отображение эволюции формы и ориентации эллипсов интенсивности вдоль двух главных меридианов и экватора

Соответственно, элемент W_{yy} задает y -диаметр пучка $4w_y^2(z)$, а W_{xy} отвечает за xy -диаметр пучка. Субматрица $\mathbf{W}$ характеризуется квадратичной формой, в данном случае это эллипс интенсивности [18]

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{r}) = (W_{yy}x^2 + W_{xx}y^2 - 2W_{xy}xy) / \det \mathbf{W} = 1. \quad (5)$$

Сразу заметим, что эллипс интенсивности характеризует весь класс гауссовых пучков (пучки Эрмита–Гаусса, Лагерра–Гаусса и т.д.). Через элементы субматрицы $\mathbf{W}$ можно определить также угол наклона большой оси эллипса

$$\operatorname{tg} 2\phi = 2W_{xy} / (W_{xx} - W_{yy}) \quad (6)$$

и отношение его полуосей – угол эллиптичности

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \chi = \frac{W_{xx} + W_{yy} + \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}}{W_{xx} + W_{yy} - \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}}. \quad (7)$$

Подчеркнем, что все эти параметры можно получить посредством числовой обработки картины интенсивности пучка. Но их недостаточно для отображения эволюции пучка на $SU(2)$ -сферу. Подставляя распределение интенсивности (3) в (4), получаем элементы субматрицы $\mathbf{W}$ для астигматического гауссова пучка

$$W_{xx} - W_{yy} = \frac{1}{J_{00}} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \cos 2\phi \exp\{-ir^2[\alpha + K \cos 2(\phi + \Phi)]\} = \cos 2\phi \frac{K}{\sqrt{\alpha^2 - K^2}}. \quad (8)$$

Перекрестный момент интенсивности находим как

$$W_{xy} = \frac{1}{J_{00}} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \sin 2\phi \exp\{-ir^2[\alpha + K \cos 2(\phi + \Phi)]\} = \sin 2\phi \frac{K}{\sqrt{\alpha^2 - K^2}}. \quad (9)$$

При вычислении использовались интегралы [26]

$$\int_0^{2\pi} \cos 2x \cdot e^{b \cos 2x} dx = 2\pi I_1(b), \quad \int_0^{2\pi} e^{-ax} I_1(bx) dx = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \quad (10)$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка и использовано условие $a > b$.

Параметры Стокса эллипса интенсивности

Поскольку наша задача предполагает отображение множества состояний эллипсов интенсивности на $SU(2)$ -сферу, которая порождена преобразованием пучков в 4D-фазовом пространстве, изоморфном $SU(2)$ -сфере [6], то имеет смысл придерживаться техники отображения множества состояний поляризации параксиальных пучков на сферу Пуанкаре [20]. В нашем случае параметры Стокса удобно записать в форме

$$S_1 = \cos 2\phi \sin \chi, S_2 = \sin 2\phi \sin \chi, S_3 = \cos \chi. \quad (11)$$

Инвариантом отображения является радиус сферы S : $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Сравнивая выражения (6), (7) и (8), видим, что все параметры Стокса определяются через физически измеримые моменты интенсивности. Важно заметить, что азимутальный ϕ и полярный χ углы не зависят друг от друга. Азимутальный угол ϕ задает движение по параллелям, а полярный угол χ отвечает за движение по меридианам. Также отметим, что третий параметр S_3 можно получить непосредственно из отношения полуосей (7):

$$S_3 = \frac{\cos \chi}{\sqrt{\cos^2 \chi + \sin^2 \chi}} = \frac{\text{ctg} \chi}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \chi}}. \quad (12)$$

Три параметра Стокса (11) образуют единичный вектор Стокса (см. рис. 1б), конец которого очерчивает на сфере траекторию эволюции состояний пучка, свободного от ОУМ, в оптической системе. На рис. 1в представлены экспериментальные кривые эллипсов интенсивности на фоне картин интенсивности гауссова пучка вдоль двух главных меридианов и экватора. На полюсах отображаются осесимметричные состояния пучка. Поле пучка на северном полюсе отличается от поля на южном полюсе на π , что никак не влияет на его отображение. Скачок фаз возникает при пересечении экватора. В отличие от поляризационной сферы Пуанкаре в нашем случае отсутствует направление циркуляции эллипса. Но, что важно, циклическое изменение параметров системы заставляет собственное состояние двигаться по замкнутому контуру $SU(2)$ -сферы. И вот здесь мы подходим к одному загадочному явлению, возникающему при движении системы в кривом пространстве, которое называют геометрической фазой Берри.

Пучки Лагерра–Гаусса с нулевым топологическим зарядом

Для нахождения элементов субматрицы моментов интенсивности (4) для определения параметров эллипса интенсивности (5) можно воспользоваться сложными вычислениями, представленными, например, в нашей статье [21]. Тем не менее все эти вычисления можно существенно упростить, если вспомнить, что на эксперименте мы определяем матричные элементы W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} , характеризующие квадраты диаметров пучка $4w_x^2(z)$, $4w_y^2(z)$, $4w_{xy}^2(z)$. Но хорошо известно [22], что ЛГ-пучки при распространении изменяют свои радиусы согласно правилу $w_{x,y}(z)/w_0 = \sqrt{(2n + \ell + 1)(1 + Z^2)}$. Именно во столько раз отличаются радиусы перетяжки ЛГ-пучков от радиусов фундаментального гауссова пучка. Заметим здесь, что размеры радиусов пучков не влияют на форму эллипса интенсивности, включая его наклон ϕ , но только изменяют размеры полуосей эллипса, оставляя эллиптичность $\text{tg} \chi$ неизменной. Иными словами, масштабные преобразования пучка не влияют на его отображение его состояний на сфере.

Геометрическая фаза

Геометрическая фаза является универсальным явлением природы, которое наблюдается во множестве процессов волновой физики, и несет в себе многообразие внутренних степеней свободы. Это явление наблюдается при рассмотрении эволюции физической системы в искривленном пространстве за счет так называемого «параллельного переноса» вектора состояния по замкнутой траектории. Еще сорок лет назад Берри показал [7], что дополнительная квантовая фаза возникает при медленном (адиабатическом) изменении параметра гамильтониана $H(R)$ таким образом, что если в начальный момент времени $t=0$ система находится в собственном состоянии $|n, t=0\rangle$, то при медленном циклическом изменении параметра гамильтониана R она переместится по замкнутой траектории C в параметрическом пространстве в состояние $|n, t\rangle$, а эту трансляцию собственного состояния будет сопровождать аккумуляция фазы волновой функции, равная

$$\gamma_G(C) = \int_C \langle n, t | \nabla_R | n, t \rangle dR, \quad (13)$$

где ∇_R – вектор-градиент в параметрическом пространстве R . Примечательно то, что фаза $\gamma_G(C)$ зависит исключительно от геометрического пути C , именно поэтому ее стали называть геометрической фазой или фазой Берри.

Одним из ярких проявлений геометрической фазы в оптике является так называемая фаза Панчаратна–Берри [22], которая возникает при циклическом изменении состояния поляризации светового пучка. При этом на сфере Пуанкаре единичного радиуса очерчивается замкнутая траектория, которая стягивает телесный угол Ω . Величина телесного угла Ω равна площади сферической фигуры S внутри контура. Параллельный перенос вектора состояния по контуру на $SU(2)$ -сфере единичного радиуса сопровождается появлением геометрической фазы, равной половине телесного угла $\gamma_G(C) = \Omega/2$. Таким образом, вычисляя площадь сферической фигуры, сразу находим геометрическую фазу.

Возможность транслировать состояния пучков по меридианам и параллелям сферы (геодезическим) обеспечивает независимость углов ϕ и χ . Если азимутальный угол ϕ задается только наклоном осей цилиндрической линзы, то полярный угол χ зависит только от положения плоскости наблюдения Z , сопровождаемое синхронным изменением размеров радиусов пучка в эллипсе интенсивности в (1)

$$\alpha = |Im(1/q_x + 1/q_y)| = \frac{w_x^2 + w_y^2}{w_x^2 w_y^2}, K = Im(1/q_x - 1/q_y) = \frac{w_y^2 - w_x^2}{w_x^2 w_y^2}. \quad (14)$$

Таким образом, движение эллипса интенсивности по замкнутому контуру на сфере обеспечивается простыми поворотами цилиндрической линзы и смещением плоскости наблюдения. Напомним, что все параметры пучка и переменные (x, y, z) нормированы и являются безразмерными. На рис. 2 приведено шесть примеров вычерчивания простых сферических фигур в виде (a, z) сферического сегмента, (b, d) полярного сферического треугольника и (e, e) сферического прямоугольника циклическими изменениями формы эллипса интенсивности $(a - e)$ фундаментальным гауссовым пучком и $(z - e)$ ЛГ-пучком с нулевым топологическим зарядом $\ell = 0$ и радиальным числом $n = 4$.

Для определения геометрической фазы простых сферических фигур на рис. 2 можно воспользоваться простым геометрическим приемом [24]. Для этого находим сначала площадь сферического сегмента на сфере радиусом R , равным $S_{sph} = 2\pi R h$, где h – высота сегмента. Площадь полярного сферического треугольника равна 1/4 площади сегмента высотой $R = h$. Площадь сферического прямоугольника равна разности площадей сегмента верхней полу-сферы $R = h$ и сегмента высотой $R - h$. Площадь сферического прямоугольника будет равна 1/4 полученной разности площадей сегментов. Таким образом, находим геометрические фазы, приобретенные пучками при обходе на единичной сфере $R = 1$ контура: сегмент $\gamma_s = \pi(1 - \cos \chi)$, треугольник $\gamma_\Delta = \pi/4$, прямоугольник $\gamma_\square = (\pi/4) \cos \chi_0$, где χ и χ_0 задают положения нижней и верхней параллелей сегментов соответственно (см. рис. 2).

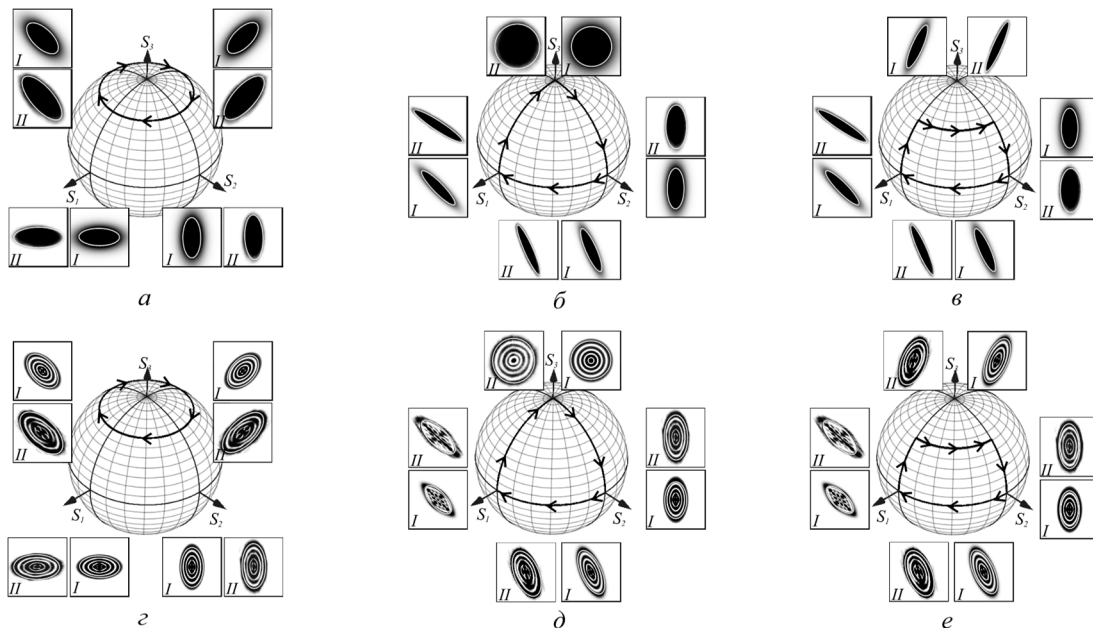


Рис. 2. Отображения траекторий $(a - e)$ гауссова пучка и $(z - e)$ ЛГ-пучка с нулевым топологическим зарядом $\ell = 0$ и $n = 4$ радиальным числом в виде $(a, в)$ сферического сегмента, $(б, д)$ полярного сферического треугольника и $(в, е)$ сферического прямоугольника

Как мы заметили, геометрическая фаза циклических изменений формы эллипса интенсивности не зависит от радиальных чисел ЛГ-пучков и всегда задается изменением формы гауссова пучка. Следует заметить, что при построении контуров на сфере (рис. 2) использовалось смещение (вперед и назад) плоскости наблюдения вдоль оси z пучка, что приводит к накоплению динамической фазы. Однако в пространстве параметров эта фаза исчезает и не влияет на конечный результат. Другое дело, исключить эту фазу на эксперименте, как это делается при наблюдении фазы Панчаратнама–Берри [23]. В нашем случае это приведет к существенному усложнению как теоретической, так и экспериментальной базы, что выходит за рамки данной статьи. Также отметим, что в формуле для геометрической фазы $\gamma_G(C) = \Omega/2$ в нашем случае отсутствует топологический заряд ℓ , в противоположность геометрической фазе вихревых пучков в [13]. В этом и заключается особенность нашего отображения на $SU(2)$ -сфере, где третий параметр Стокса S_3 характеризует эллиптичность эллипса интенсивности. В то же время для вихревых пучков используется отображение на орбитальную сферу Пуанкаре, где S_3 характеризует нормированное ОУМ (не учитывающее топологический заряд ℓ). Поэтому в конечном выражении для геометрической фазы в [13] присутствует умножение телесного угла Ω на ℓ -топологический заряд.

2. Эксперимент

Основной задачей экспериментальных исследований явилось отображение циклических изменений эллипса интенсивности, основанное на измерении моментов интенсивности W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} , позволяющих вычислить

управляющие углы ϕ и χ , а также параметры Стокса. Метод измерения моментов интенсивности второго порядка подробно описан в ряде наших статей (см., например, [21]) и основан на рекомендациях ISO [25].

Измерения моментов интенсивности и компьютерная обработка картин интенсивности пучков осуществлялась на экспериментальной установке, эскиз которой представлен на рис. 3а. Пучок, излученный He-Ne лазером ($\lambda = 633$ нм), формировался в фундаментальный гауссов пучок или ЛГ-пучки с нулевыми топологическими зарядами $\ell = 0$ на пространственном модуляторе света типа Thorlabs EXULUS-4K1/M и делительной призмой Bs направлялся в два плеча интерферометра Маха–Цендера. В первом плече пучок фокусировался сферической линзой L_1 на входную плоскость цилиндрической линзы таким ($f = 50$ см) в пятно, диаметр которого соответствовал длине Релея 1 м. Цилиндрическая линза закреплялась на поворотном столике, позволяющем устанавливать угол наклона осей линзы с точностью до $\Delta\phi = 1^\circ$. Далее пучок смешивался с опорным пучком из второго плеча на второй делительной призме и направлялся на вход фотодетектора CMOS типа Michrome 20.

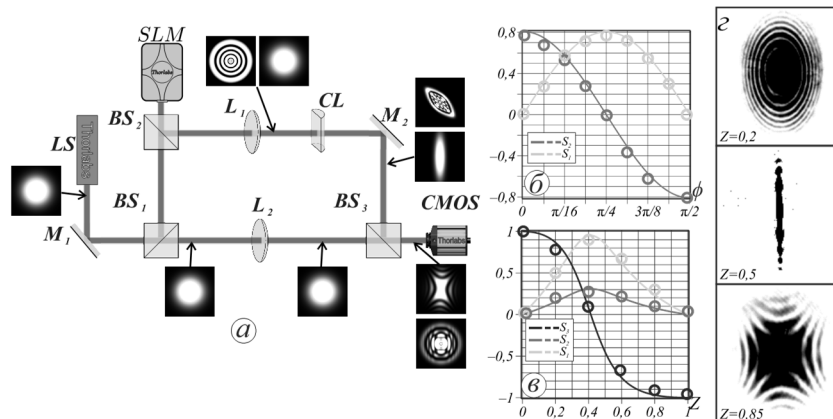


Рис. 3. (а) Эскиз экспериментальной установки: LS – He-Ne лазер, BS_{1,2,3} – делительные призмы, M_{1,2} – зеркала, L_{1,2} – сферические линзы, CL – цилиндрическая линза, SLM – пространственный модулятор света, CMOS – фотодетектор. (б) Зависимость параметров Стокса S₁ и S₂ от угла поворота ϕ цилиндрической линзы в плоскости $Z = 0,3$. (в) Зависимость параметров S₁, S₂, S₃ от положения плоскости наблюдения $Z = z/z_0$. Сплошные кривые – теория, кружочки – экспериментальные точки. (г) Интерференционные картины эллиптического гауссова пучка вдоль оси Z

Измерения проводились посредством компьютерной обработки картин интенсивности, снятых в различных областях пучка после цилиндрической линзы. Для расчета W_{xx} , W_{yy} , W_{xy} использовалась формула (4), где вместо $J_{00}(x, y, z)$ подставлялся массив значений, полученных при компьютерной обработке картины интенсивности, а интегрирование заменялось суммированием. Первые три параметра рассчитывались как

$$S_0 = W_{xx} + W_{yy}, S_1 = W_{xx} - W_{yy}, S_2 = W_{xy} - W_{yx}. \quad (15)$$

Для определения параметра эллиптичности использовались формулы (7). Полученные результаты позволили строить эллипсы интенсивности (5) и траектории на аналоге сферы Пуанкаре на рис. 2. Наклон большой полуоси эллипса интенсивности рассчитывался по формуле (6). Сравнение теоретических и экспериментальных результатов иллюстрируют рис. 3б, в для параметров Стокса, где теории соответствуют жирные кривые, а экспериментальные точки обозначены кружками. Разброс экспериментальных точек относительно теоретических кривых не превышает 5 %, что указывает на хорошее согласование теории и эксперимента. Особый интерес вызвало смещение плоскости физической фокусировки эллиптического пучка после цилиндрической линзы относительно его геометрического фокуса. Именно в этой плоскости измерялось угловое положение эллипса интенсивности на экваторе SU(2)-сферы при повороте осей цилиндрической линзы на рис. 2. Картины интерференции на рис. 3г показывают смену эллиптических максимумов интенсивности на гиперболы, что указывает на изменение знака кривизны волнового фронта после цилиндрической линзы.

Выводы

Распространяясь через цилиндрическую линзу, фундаментальный гауссов пучок испытывает эллиптическую деформацию, а после линзы форма эллипса изменяется так, что на расстоянии двойного фокуса эллипс превращается в окружность. Ориентация эллипса задается ориентацией осей цилиндрической линзы. Более того, если гауссов пучок не имеет ОУМ до линзы, то цилиндрическая линза не вводит в него ОУМ, то есть пучок остается свободным от орбитального углового момента. Эти признаки указывают на простое астигматическое преобразование. Явный вид эллиптической деформации характеризует эллипс интенсивности, форма которого задается физически измеряемыми элементами тензора моментов интенсивности второго порядка. Причем этим свойством обладают все типы гауссовых пучков высших порядков. Эти простые идеи мы взяли за основу для отображения состояний безвихревых пучков на SU(2)-сферу. Нам удалось построить формализм параметров Стокса для таких

безвихревых пучков, основываясь на аналогии с поляризационными параметрами Стокса как для фундаментальных гауссовых пучков, так и для ЛГ-пучков с нулевым топологическим зарядом.

Оказалось, что повороты осей эллипса интенсивности для любых безвихревых ЛГ-пучков зависят только от ориентации осей цилиндрической линзы и не зависят от смещения плоскости наблюдения вдоль оси пучка. Но это смещение как раз изменяет эллиптичность эллипса интенсивности. Используя эти два простых движения, мы отображали циклические изменения состояний фундаментального гауссова пучка и ЛГ-пучка с $\ell=0$ и $n=4$ радиальным числом на аналог сферы Пуанкаре в виде простых контуров, ограничивающих площадь сферического сегмента, полярного сферического треугольника и сферического прямоугольника. Простые правила сферической геометрии позволили нам оценить величины геометрических фаз волновых функций пучков, приобретаемых при циклическом изменении их состояний. Также был разработан метод измерений параметров Стокса для циклических изменений состояний безвихревых пучков. Сравнение теории и эксперимента показало их хорошее согласование.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №24-22-00278).

References

- [1] Shen Y. Rays, waves, SU(2) symmetry and geometry: toolkits for structured light. *J Opt* 2021; 23(12): 124004. doi:10.1088/2040-8986/ac3676.
- [2] Dennis MR, Alonso MA. Swings and roundabouts: optical Poincaré spheres for polarization and Gaussian beams. *Philos Trans R Soc Lond A* 2017; 375(2085): 20150441. doi:10.1098/rsta.2015.0441.
- [3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton, FL: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
- [4] Chen YF, Tung JC, Tuan PH, Huang KF. Symmetry breaking induced geometric surfaces with topological curves in quantum and classical dynamics of the SU(2) coupled oscillators. *Ann Phys (Berlin)* 2017; 529(10): 1600253. doi:10.1002/andp.201600253.
- [5] van Enk SJ, Nienhuis G. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. *Opt Commun* 1992; 94(1-3): 147-158. doi:10.1016/0030-4018(92)90424-P.
- [6] van Enk SJ. Geometric phase, transformations of Gaussian light beams and angular momentum transfer. *Opt Commun* 1993; 102(1-2): 59-64. doi:10.1016/0030-4018(93)90472-H.
- [7] Berry MV. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc Lond A* 1984; 392(1802): 45-57. doi:10.1098/rspa.1984.0023.
- [8] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-213. doi:10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [9] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. doi:10.1364/OE.26.000141.
- [10] Padgett MJ, Courtial J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Opt Lett* 1999; 24(7): 430-432. doi:10.1364/OL.24.000430.
- [11] Agarwal GS. SU(2) structure of the Poincaré sphere for light beams with orbital angular momentum. *J Opt Soc Am A* 1999; 16(12): 2914-2916. doi:10.1364/JOSAA.16.002914.
- [12] Galvez EJ, Crawford PR, Sztul HI, Pysher MJ, Haglin PJ, Williams RE. Geometric phase associated with mode transformations of optical beams bearing orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2003; 90(20): 203901. doi:10.1103/PhysRevLett.90.203901.
- [13] Calvo GF. Wigner representation and geometric transformations of optical orbital angular momentum spatial modes. *Opt Lett* 2005; 30(10): 1207-1209. doi:10.1364/OL.30.001207.
- [14] Alieva T, Bastiaans MJ. Dynamic and geometric phase accumulation by Gaussian-type modes in first-order optical systems. *Opt Lett* 2008; 33(15): 1659-1661. doi:10.1364/OL.33.001659.
- [15] Volyar A, Bretsko M. Mapping structured Laguerre–Gaussian beam states onto the orbital Poincaré sphere in the form of controllable spatial trajectories. *J Opt Soc Am A* 2024; 41(9): 1648-1655. doi:10.1364/JOSAA.529894.
- [16] Volyar A, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Ya. Self-healing and self-matching effects in astigmatic structured beams as a basis for measuring orbital Stokes parameters. *Appl Opt* 2025; 64(12): 3241-3249. doi:10.1364/AO.558709.
- [17] Cox MA, Maqondo L, Kara R, Milione G, Cheng L, Forbes A. The resilience of Hermite- and Laguerre-Gaussian modes in turbulence. *J Lightwave Technol* 2019; 37(16): 3911-3917. doi:10.1109/JLT.2019.2905630.
- [18] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(8): 2257-2264. doi:10.1364/JOSAA.11.002257.
- [19] Arnaud JA, Kogelnik H. Gaussian light beams with general astigmatism. *Appl Opt* 1969; 8(8): 1687-1693. doi:10.1364/AO.8.001687.
- [20] Born M, Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 0-521-64222-1.
- [21] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Ya, et al. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. doi:10.3390/photonics11030191.
- [22] Phillips RL, Andrews LC. Spot size and divergence for Laguerre–Gaussian beams of any order. *Appl Opt* 1983; 22(5): 643-644. doi:10.1364/AO.22.000643.
- [23] Cohen E, Larocque H, Bouchard F, Nejdassattari F, Gefen Y, Karimi E. Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond. *Nat Rev Phys* 2019; 1(7): 437-449. doi:10.1038/s42254-019-0071-1.
- [24] Venttsel MK. Sfericheskaya trigonometriya [Spherical trigonometry] [in Russian]. 2nd ed. Moscow: Izdatelstvo geodezicheskoy literatury; 1948.

- [25] ISO 11146-2:2005. Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 2: General astigmatic beams. Geneva: ISO; 2005.
- [26] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Tables of integrals, series and products [in Russian]. Moscow: Nauka; 1971.

Сведения об авторах

Воляр Александр Владимирович – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Брецько Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук (2022), доцент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика. E-mail: mihaibretcko4@gmail.com

Халилов Сервер Искандарович – ассистент кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Акимова Яна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук (2022), доцент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: akimova.yana@yandex.ru

Поступила в редакцию 18 сентября 2025 г.



Окончательный вариант – 27 октября 2025 г.

Hidden Geometry of OAM-Free Astigmatic Laguerre-Gaussian Beams

A.V. Volyar¹, M.V. Bretsko¹, S.I. Khalilov¹, Y.E. Akimova¹

*¹ Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Prospekt Akademika Vernadskogo 4, Simferopol, 295007, Republic of Crimea, Russia*

Abstract

Based on the moments of the second-order intensity, the Stokes parameters for cyclic changes in the states of LG beams with zero topological charge and any radial number were theoretically obtained. These results made it possible to display such cyclic changes in the beam parameters on an analog of the Poincaré sphere. The geometric phases of the beams whose cyclic parameter variations are limited by spherical segments, spherical triangles and spherical rectangles were estimated. A method for measuring the corresponding Stokes parameters was developed and implemented, allowing the state of the beams to be displayed as trajectories on an analog of the Poincaré sphere during the experiment. A comparison of the theory and experiment showed their good agreement.

Keywords: Gaussian beam, astigmatism, cylindrical lens, Laguerre-Gaussian beams, astigmatic transformation.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Hidden Geometry of OAM-Free Astigmatic Laguerre-Gaussian Beams. *Computer Optics* 2026; 50(4): 1834. DOI: 10.18287/COJ1834.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00278.

About authors

Alexander Vladimirovich Volyar (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.
E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Mikhail Vladimirovich Bretsko, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. He is associate professor of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics.
E-mail: mihailbretsko4@gmail.com

Server Iskandarovich Khalilov, (b. 1994) assistant of Business Informatics and Mathematical Modeling department of the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky. Research interests: singular optics, laser physics. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Yana Evgenievna Akimova, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. She is associate professor of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics.
E-mail: akimova.yana@yandex.ru

Received on September 18, 2025.

The final version – October 27, 2025.
