И.Г. Колчанов, А.Б. Шварцбург

УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В МНОГОМОДОВЫХ СВЕТОВОДАХ

Успехи, достигнутые в применении нелинейных свойств одномодовых световодов [1], привели к необходимости обобщения уравнений, описывающих распространение и взаимодействие световых импульсов, на случай многомодовых световодов (МС). С этой целью в [2] было предложено использовать обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, в котором учитывается изменение показателя преломления, пропорциональное суммарной интенсивности полей мод. В [3,4] на основе теории связанных мод удалось получить более полное описание нелинейных эффектов, соответствующих проницаемости $\varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_j = \omega_k + \omega_m - \omega_n)$. Результаты этих работ были получены в приближении слабонаправляющих световодов, а учет поляризационных эффектов сводился к рассмотрению двух крайних случаев - деполяризационного и линейно-поляризационного излучения. В настоящей работе вышеуказанные приближения не использовались, но учитывались возможные нерегулярности структуры световодов, а также наличие мод излучения. При выводе уравнений нелинейной динамики световых импульсов в МС впервые получен полный набор нелинейных членов, связанных с нелинейной проницаемостью третьего порядка. Это позволило классифицировать нелинейные эффекты, протекающие в МС, по виду нелинейных членов традиционным способом.

Далее будем исходить из следующей связи между $\vec{E}$ и $\vec{D}$:

$$\vec{D}(\omega) = \bar{\varepsilon}(\omega)\vec{E}(\omega) + \varepsilon_1(\omega)\vec{E}(\omega) + \vec{D}^{\text{нл}}(\omega), \tag{1}$$

где

$\bar{\varepsilon}(\omega)$ - диэлектрическая проницаемость регулярного световода;

$\varepsilon_1(\omega)$ - возмущение диэлектрической проницаемости, связанное с нерегулярностью;

$\vec{D}^{\text{нл}}(\omega)$ - нелинейная часть $\vec{D}(\omega)$.

Предполагается, что волновод изготовлен из изотропного материала. Как известно [5], в изотропных средах отличная от нуля нелинейность наименьшего порядка описывается членами, кубичными по $\vec{E}$:

$$D_\alpha^{(3)}(\omega) = \int \varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1,\omega_2,\omega-\omega_1-\omega_2)E_\beta(\omega_1)E_\gamma(\omega_2)E_\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)d\omega_1 d\omega_2, \tag{2}$$

где $\varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - тензор нелинейной проницаемости третьего порядка, и по индексам β,γ,δ подразумевается суммирование. Пренебрегая членами высших порядков, будем считать, что $\vec{D}^{нл}(\omega) = \vec{D}^{(3)}(\omega)$, $|\vec{D}^{нл}(\omega)| \ll |\vec{D}(\omega)|$. Все величины в формулах (1), (2) являются функциями ω и координат $\vec{r} = (x,y,z)$, причем ось световода считается направленной вдоль оси z. Опуская далее аргумент ω и полагая, что магнитная проницаемость $\mu = \mu_o$, запишем уравнение Максвелла (в системе MKS)

$$\begin{aligned} &\text{rot}\,\vec{H} = -i\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,\vec{D}, \quad \text{div}\,\vec{H} = 0, \\ &\text{rot}\,\vec{E} = i\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\,\vec{H}, \quad \text{div}\,\vec{D} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

которые совместно с (1), (2) составляют замкнутую систему для нахождения полей возмущенного световода.

Ортонормированность и полнота набора поперечных составляющих полей мод регулярного световода $\vec{e}_k(x,y)$ позволяют представить $\vec{E}$ в виде разложений [6]

$$\vec{E}_t = \sum_k \{b_k(z)\vec{e}_{kt} + \int_0^\infty b_k(z,Q)\vec{e}_{kt}(Q)dQ\} \tag{4а}$$

для поперечной (индекс t) и

$$E_z = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}+\varepsilon_1}\sum_k \{b_k(z)e_{kz} + \int_0^\infty b_k(z,Q)e_{kz}(Q)dQ\} \tag{4б}$$

продольной (индекс z) компоненты.

Суммирование ведется по вперед- $(k > 0)$ и назад- $(k < 0)$ распространяющимся направляемым модам и модам излучения.

Повторяя основанный на теореме взаимности вывод уравнений связанных мод [6] с учетом нелинейного члена в формуле (1), получим:

$$\frac{\partial b_j}{\partial z} - i\beta_j b_j = i\sum_k \{c_{jk}b_k + \int_0^\infty c_{jk}(Q)b_k(Q)dQ\} + id_j^{нл}, \tag{5}$$

где β_j - постоянная распространения j-й моды,

$$c_{jk}(z) = \text{sign}\,(j)\,\frac{\omega}{4c}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\int \varepsilon_1(\vec{r})(\vec{e}^{\,*}_j\cdot\vec{e}^{\,\prime}_k)dA \tag{6}$$

представляет собой коэффициент связи мод на нерегулярности, а

$$d_j^{нл} = \text{sign}\,(j)\,\frac{\omega}{4c}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\int (\vec{e}^{\,*}_j\cdot\vec{D}^{нл})dA \tag{7}$$

учитывает нестационарное возмущение световода, обусловленное нелинейностью среды. В формулах (6), (7) интегрирование ведется по поперечной плоскости A, штрих означает, что z - компонента взята с множителем $\bar{\varepsilon}/(\bar{\varepsilon}+\varepsilon_1)$ из формулы (4б). Выражение для $c_{jk}(t,Q)$ получается при подстановке в формулу (6) $\vec{e}^{\,\prime}_k(Q)$ вместо $\vec{e}^{\,\prime}_k$.

Осуществим переход к временному представлению, используя приближение "медленных амплитуд", согласно которому функция $b_j(\omega)$ отлична от нуля в узком спектральном интервале $\Delta\omega_j$ вокруг точек $\pm\omega_j$, где
где ω_j - несущая частота j-й моды и

$$\Delta\omega_j \ll \omega_j. \tag{8}$$

Неравенство (8) дает возможность пренебречь изменением структуры мод в пределах спектральной ширины импульса,

$$\left|\frac{\partial\vec{e}_j(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega_j}\cdot\Delta\omega_j \ll \left|\vec{e}_j(\omega)\right|_{\omega_j} \tag{9}$$

и позволяет выполнить переход к временному представлению с помощью обратного преобразования Фурье разложений (4а,б) следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_k \{\psi_k(z,t)e^{i(\hat{\beta}_k z-\omega_k t)}\,\hat{\vec{e}}_k' + \\ + \int_0^\infty \psi_k(z,t,Q)e^{i(\hat{\beta}_k(Q)z-\omega_k t)}\hat{\vec{e}}_k'(Q)dQ\} + \text{к.с.}, \quad (10)$$

где

$$\hat{\vec{e}}_k'(x,y) = \vec{e}_k'(\omega,x,y)\Big|_{\omega_k}, \ \hat{\beta}_k = \beta_k(\omega)\Big|_{\omega_k}, \text{ а}$$

$$\psi_k(z,t) = e^{-i(\hat{\beta}_k z-\omega_k t)} \int_0^\infty b_k(z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (11)$$

является медленно меняющейся амплитудой

$$\left|\frac{\partial\psi_k}{\partial z}\right| << |\beta_k|\cdot|\psi_k|, \ \left|\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\right| << \omega_k|\psi_k|. \quad (12)$$

Формула (10) выражает решение задачи о нахождении электромагнитного поля возмущенного световода через амплитуды $\psi_k(z,t)$. Уравнения для них могут быть получены с помощью обратного преобразования Фурье системы (5). Выполнив интегрирование по положительным ω (область $\omega < 0$ даст комплексно-сопряженный результат) с учетом дисперсии до второго порядка включительно, в левой части уравнений получим

$$ie^{i(\hat{\beta}_j z-\omega_j t)}\,\hat{L}_j\,\psi_j = ie^{i(\hat{\beta}_j z-\omega_j t)}\{u_2^j\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2} - i(u_1^j\frac{\partial\psi_j}{\partial t} + \frac{\partial\psi_j}{\partial z})\}, \quad (13)$$

где $u_1^j = \dfrac{\partial\beta_j(\omega)}{\partial\omega}\Big|_{\omega_j}$, $u_2^j = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\beta_j(\omega)}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_j}$.

В правой части получим члены, связанные с нерегулярностью

$$i\sum_k \hat{c}_{jk}\,e^{i(\hat{\beta}_k z-\omega_k t)}\,\psi_k, \ \ \hat{c}_{jk} = c_{jk}(\omega)\Big|_{\omega_k}, \quad (14)$$

и члены, связанные с нелинейностью

$$i\sum_{k,m,n} R_{mn}^{jk}(\pm\omega_k, \pm\omega_m, \pm\omega_n)e^{i(Bz-\Omega t)}\,\psi_k^{(*)}\psi_m^{(*)}\psi_n^{(*)}, \quad (15)$$

где

$$B = \pm\beta_k \pm\beta_m \pm\beta_n, \ \Omega = \pm\omega_k \pm\omega_m \pm\omega_n, \ R_{mn}^{jk}(\pm\omega_k, \pm\omega_m, \pm\omega_n) =$$

$= \mathrm{sign}(j)\,\dfrac{\Omega\cdot\Theta(\Omega)}{4c}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\pm\omega_k, \pm\omega_m, \pm\omega_n)e_{j\alpha}^*(\Omega)\hat{e}_{k\beta}'^{(*)}\,\hat{e}_{m\gamma}'^{(*)}\,\hat{e}_{n\delta}'^{(*)}\,dA$, причем по индексам $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ подразумевается суммирование. При выводе выражения (15) использовались соотношения (7), (2), (4а, б), (11). Суммирование нелинейных членов (15) ведется по всем комбинациям знаков частот, удовлетворяющим условию $\Omega > 0$ ($\Theta(\Omega) = 0$, при $\Omega < 0$ и $\Theta(\Omega) = 1$, при $\Omega > 0$), и всем вперед- и назадбегущим модам. Знак комплексного сопряжения в скобках означает, что сопряжение производится в тех случаях, когда частота, соответствующая данной моде, входит в R_{mn}^{jk} со знаком "-".

Влияние мод излучения на эволюцию $\psi_j(z,t)$ для возмущений, обусловленных нерегулярностью, описывается суммой

$$i\sum_k \int_0^\infty \hat{c}_{jk}(Q)e^{i(\beta_k(Q)z-\omega_k t)}\,\psi_k(Q)dQ, \quad (16)$$

а для нелинейных возмущений - суммой членов вида:

$$\int_0^\infty R_{mn}^{jk}(Q)e^{i(B(Q)z-\Omega t)}\ \psi_k^{(*)}(Q)\psi_m^{(*)}\psi_n^{(*)}\,dQ, \tag{17}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty R_{mn}^{jk}(Q,Q')e^{i(B(Q,Q')z-\Omega t)}\ \psi_k^{(*)}(Q)\psi_m^{(*)}(Q')\psi_n^{(*)}\,dQdQ', \tag{18}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty R_{mn}^{jk}(Q,Q',Q'')e^{i(B(Q,Q',Q'')z-\Omega t)}\ \psi_k^{(*)}(Q)\psi_m^{(*)}(Q')\psi_n^{(*)}(Q'')\,dQdQ'dQ'' \tag{19}$$

так, чтобы конечные выражения были симметричны по индексам k,m,n.

В выражениях (16)-(19) величины $\hat{c}_{jk}$, R_{mn}^{jk} и B определены согласно формулам (14), (15), в которые подставлены постоянные распространения β и собственные поля $\vec{e}$ соответствующих мод излучения. Обычно из-за сильного затухания амплитуды мод излучения существенно меньше амплитуд направляемых мод, и в первом приближении можно ограничиться членами (16), (17), линейными по амплитудам мод излучения.

Сравнение левых (13) и правых (14), (15) частей эволюционных уравнений показывает, что для эффективного протекания процессов нелинейного взаимодействия мод необходимо выполнение условий:

$$\Omega - \omega_j = \Delta\omega << \omega_j, \tag{20}$$

$$B - \hat{\beta}_j = \Delta\beta << \beta_j. \tag{21}$$

В случае выполнения неравенств (20), (21) получаем окончательно

$$\hat{L}_j\ \psi_j = \sum_k \hat{c}_{jk}\ e^{i(\hat{\beta}_k-\hat{\beta}_j)z}\ e^{-i(\omega_k-\omega_j)t}\ \psi_k + \\ + \sum_{k,m,n} \hat{R}_{mn}^{jk}(\pm\omega_k,\pm\omega_m,\pm\omega_n)e^{i(\Delta\beta z-\Delta\omega t)}\ \psi_k^{(*)}\psi_m^{(*)}\psi_n^{(*)}, \tag{22}$$

где

$$\hat{L}_j = u_2^j\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - i(u_1^j\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}); \tag{23}$$

$$\hat{c}_{jk} = \mathrm{sign}\ (j)\ \frac{\omega}{4c}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int \varepsilon_1(\vec{r})(\vec{e}_j^{\,*}\cdot\hat{\vec{e}}_k')dA\Big|_{\omega_k}; \tag{24}$$

$$R_{mn}^{jk}(\pm\omega_k,\pm\omega_m,\pm\omega_n) = \mathrm{sign}(j)\frac{\omega_j}{4c}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int \varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\pm\omega_k,\pm\omega_m,\pm\omega_n)\hat{e}^{*}_{j\alpha}\hat{e}'^{(*)}_{k\beta}\hat{e}'^{(*)}_{m\gamma}\hat{e}'^{(*)}_{n\delta}dA. \tag{25}$$

Для краткости в уравнения (22) не включены члены (16)-(19), учитывающие влияние мод излучения. Эволюционные уравнения для них имеют аналогичную форму.

Обсудим полученные результаты. В левой части уравнений стоит дифференциальный оператор $\hat{L}_j$, учитывающий дисперсионные свойства среды, в которой происходит распространение и взаимодействие световых импульсов. Эти свойства определяются совокупностью материальной, волноводной и межмодовой дисперсий . В стационарном случае, когда $\psi_j(z,t) \equiv \psi_j(z)$, оператор $\hat{L}_j$ сводится к $\frac{\partial}{\partial z}$.

Такое упрощение связано с переходом от волновых пакетов с конечной спектральной шириной $\Delta\omega_j$ к волновым полям с дискретным спектром. Правая часть уравнений (22) дает возможность определить влияние на эволюцию импульсов нерегулярностей световода и нелинейности среды. Взаимодействие мод на нерегулярностях эффективно лишь при совпадении их несущих частот. Это условие, вытекающее из уравнений (22), представляется естественным следствием стационарности возмущений, связанных с нерегулярностями.

Сумма нелинейных членов эволюционных уравнений (22) имеет вид, характерный для общего описания четырехволновых процессов в однородных средах с условиями фазового синхронизма

$$\omega_j = \pm\omega_k \pm\omega_m \pm\omega_n; \tag{26а}$$
$$\hat\beta_j = \pm\hat\beta_k \pm\hat\beta_m \pm\hat\beta_n. \tag{26б}$$

Благодаря этому можно провести обычную классификацию нелинейных эффектов в МС, связанных с нелинейной проницаемостью $\varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\pm\omega_k \pm\omega_m \pm\omega_n) \equiv \equiv \varepsilon^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_j = \pm\omega_k \pm\omega_m \pm\omega_n)$, роль которой в уравнениях (22) играет $\hat R^{jk}_{mn}(\pm\omega_k, \pm\omega_m, \pm\omega_n) \equiv \equiv \hat R^{jk}_{mn}(\omega_j = \pm\omega_k \pm\omega_m \pm\omega_n)$. К примеру, генерация третьей гармоники в световодах описывается членами $\hat R^{jk}_{kk}(\omega_j = \omega_k + \omega_k + \omega_k)\psi_k^3$; процессы, в которых из двух волн накачки в модах k, m рождаются волны в модах n, j, – членами $\hat R^{jk}_{mn}(\omega_j = \omega_k + \omega_m - \omega_n)\psi_k\psi_m\psi_n^*$; одночастотные эффекты самовоздействия - членами вида $\hat R^{jj}_{mm}(\omega = \omega + \omega - \omega)\psi_j\psi_m\psi_m^*$, обращение волнового фронта - членами вида $\ddot R^{jm}_{-m-j}(\omega = \omega + \omega - \omega)\psi_m\psi_{-m}\psi^*_{-j}$. Отметим, что до сих пор в работах, посвященных получению эволюционных уравнений для МС, учитывались лишь члены вида:

$$\hat R^{jj}_{mm}(\omega_j = \omega_j + \omega_m - \omega_m)\psi_j\psi_m\psi_m^* \text{ и } \hat R^{jk}_{mn}(\omega_j = \omega_k + \omega_m - \omega_n)\psi_k\psi_m\psi_n^* \quad [2\text{-}4].$$

Эффективное протекание нелинейных процессов при распространении и взаимодействии световых волн возможно при выполнении условий синхронизма (26а,б). За исключением случаев, в которых эти условия выполняются автоматически (например, для самовоздействия импульсов и обращения волнового фронта) в световодах по сравнению с однородными средами больше возможностей для их удовлетворения за счет компенсации материальной и волноводной дисперсии - межмодовой. В однородных средах для этой цели приходится использовать неколлинеарные процессы, что снижает их эффективность из-за малой длины взаимодействия. Кроме того, в световодах возможны эффекты, не имеющие аналога в однородных изотропных средах из-за невозможности выполнения условий синхронизма даже при неколлинеарном взаимодействии. Таким эффектом может быть нелинейное одночастотное возбуждение мод, описываемое членом $\hat R^{jk}_{mn}(\omega = \omega + \omega - \omega) \cdot \psi_k\psi_m\psi_n^*$ при таком подборе параметров световода, что выполняется условие $\beta_j(\omega) = \beta_k(\omega) + \beta_m(\omega) - \beta_n(\omega)$.

Нетрудно убедиться, что в бездиссипативных средах при выполнении условия синхронизма (26а) и отсутствии нерегулярностей система (22) допускает выполнение закона сохранения энергии:

$$\sum_j E_j(z) = \text{const}, \tag{27}$$

где

$$E_j(z) = \text{sign}(j) \cdot \int |\psi_j(z,t)|^2 dt \text{ для импульсов и}$$

$$E_j(z) = \text{sign}(j)|\psi_j(z)|^2 \text{ - для монохроматических волн.}$$

Кроме того, выполняются соотношения Мэнли-Роу. Например, для эффектов, связанных с $\hat R^{jk}_{mn}(\omega_j = \omega_k + \omega_m - \omega_n)$, эти соотношения имеют вид:

$$\frac{1}{\omega_j}\frac{dE_j}{dz} = \frac{1}{\omega_n}\frac{dE_n}{dz} = -\frac{1}{\omega_k}\frac{dE_k}{dz} = -\frac{1}{\omega_m}\frac{dE_m}{dz}, \tag{28}$$

соответствующий процессу, в котором фотоны в модах j и n рождаются, а в модах k и m поглощаются (или наоборот).

Кроме процессов взаимодействия мод, обусловленных отдельно нерегулярностью и нелинейностью световодов, на основе (22) могут исследоваться эффекты, в которых становится важным их совместное проявление. Таким эффектом может быть, например, самовоздействие световых импульсов в периодически нерегулярной среде [7].

Другим интересным случаем является проявление самофокусировки в статистически-нерегулярных световодах с большим числом мод.

Если нелинейные взаимодействия поля со средой сопровождаются диссипацией, то уравнения (22) могут применяться для описания таких эффектов, как ВКР, двухфотонное поглощение и других, связанных с мнимой частью нелинейной восприимчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Самовоздействие волновых пакетов в нелинейной среде и генерация фемтосекундных лазерных импульсов // УФН, 1986, т. 149, с. 449-509.

2. Hasegawa A. Self-confinement of Multimode Optical Pulse in a Glass Fiber // Opt. Lett., 1980, v. 5, p. 416-417.

3. Crosignani B., Cutolo A.P. Di Porto Coupled-mode Theory of Nonlinear Propagation in Multimode and Single-mode Fibers: Envelope Solitons and Self-confinement // J. Opt. Soc. Amer., 1982, v. 72, p. 1136-1141.

4. Haelterman M., Mestdagh D. Dynamic Coupled-mode Theory of Nonlinear Propagation in Optical Fibers // Opt. Commun., 1987, v. 63, p. 205-210.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

6. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.

7. Sipe J.E., Winful H.G. Nonlinear Schrodinger solitons in a periodic structure // Opt. Lett., 1988, v. 13, p. 132-133.