М.А. Зуев, И.Н. Сисакян, А.Б. Шварцбург

О СТРУКТУРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОЙ СРЕДОЙ

Исследования дифракции плоских волн на голографических решетках, а также проблемы управления параметрами излучения вызывают интерес к структуре полей в периодических средах [1,2].

В данной работе рассматривается падение s-поляризованной волны $\vec{E} = (E(y,z)\cdot e^{-i\omega t}, 0, 0)$ из полупространства $z > 0$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \mathrm{const}$ на среду $(z < 0)$ с неоднородным возмущением $\varepsilon_- = \hat{\varepsilon} + \Delta\hat{\varepsilon}(y,z)$. При этом структура полей определяется уравнениями Гельмгольца $(k_o = \omega/c)$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_o^2 \cdot \varepsilon \cdot E = 0 \quad \text{при} \quad z > 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_o^2 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot E = -k_o^2 \cdot \Delta\hat{\varepsilon}(y,z)\cdot E \quad \text{при} \quad z < 0 \tag{1}$$

и стыковкой граничных условий:

$$E\Big|_{z=+0} = E\Big|_{z=-0} \qquad \frac{\partial E}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial E}{\partial z}\Big|_{z=-0} \tag{2}$$

Теория возмущений, традиционно применяемая для подобных задач, может быть построена различными способами [1-3]. Ниже предлагается рекурентная схема решения системы эквивалентных (1), (2) интегродифференциальных уравнений. Пусть $E(y,z > 0) = E_{пад} + E_{отр}$, где задана падающая волна $E_{пад} = E_o\cdot e^{ik_y\cdot y - ik_z z}$, $(k_y^2 + k_z^2 = k_o^2\cdot\varepsilon)$, а отраженная $E_{отр}$ и преломленная $E_{пр} = E(y,z < 0)$ описывается вытекающими из (1) уравнениями:

$$E_{отр}(y,z > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy'\cdot g_k(\Delta_y,z)\cdot E_{отр}(y',0); \tag{3}$$

$$E_{пр}(y,z < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy'\cdot g_{\hat{k}}(\Delta_y,z)\cdot E_{пр}(y',0) + F; \tag{4}$$

$$F = \int_0^{-\infty} dz'\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy'\cdot G_{\hat{k}}(\Delta_y,z',z)\cdot k_o^2\cdot\Delta\hat{\varepsilon}(y',z')\cdot E_{пр}(y',z'), \tag{5}$$

где G и g определяются с учетом условий излучения функциями Ханкеля $H^{(1)}$ [3]:

$$G_k(\Delta_y,z',z) = \frac{i}{4}\left[H_o^{(1)}\left(k\sqrt{\Delta_y^2 + (z'+z)^2}\right) - H_o^{(1)}\left(k\sqrt{\Delta_y^2 + (z'-z)^2}\right)\right];$$

$$g_k(\Delta_y,z) = \frac{\partial G_k(\Delta_y,z',z)}{\partial z'}\Big|_{z'=0} = \frac{ik\cdot|z|}{2\sqrt{\Delta_y^2 + z^2}}\cdot H_1^{(1)}(k\sqrt{\Delta_y^2 + z^2});$$

$k = k_o\sqrt{\varepsilon}$, $\hat{k} = k_o\sqrt{\hat{\varepsilon}}$, $\Delta_y = y' - y$.

При этом граничные условия (2) сводятся к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=0} \int_{-\infty}^{\infty} dy'\cdot\left[g_k(\Delta_y,z) - g_{\hat{k}}(\Delta_y,z)\right]\cdot E_{пр}(y',0) = 2ik_z\cdot E_o\cdot e^{ik_y\cdot y} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{6}$$

Уравнения (4)-(6) позволяют построить разложение $E_{пр}(y,z)$ по степеням $\Delta\hat{\varepsilon}$, после чего определяется $E_{отр}(y,0) = E_{пр}(y,0) - E_o \cdot e^{ik_y \cdot y}$ и в соответствии с (3) находится $E_{отр}(y,z)$.

Будем рассматривать отклик на периодическое возмущение

$$\Delta^{\wedge}\varepsilon(y,z) = \Delta\varepsilon \cdot e^{i\sigma_y \cdot y - i\sigma_z \cdot z}.$$

Тогда, вводя

$$q_m = \sqrt{k^2 - (k_y + m\cdot\sigma_y)^2}, \quad \hat{q}_m = \sqrt{\hat{k}^2 - (k_y + m\sigma_y)^2}, \quad (q_o = k_z, \ \hat{q}_o = \hat{k}_z), \tag{7}$$

на основании изложенной схемы получим интересующую нас структуру полей:

$$\frac{E_{пр}}{E_o} = \sum_{m=0}^{\infty} (\Delta\varepsilon)^m \cdot e^{i(k_y + m\sigma_y)\cdot y} \cdot \sum_{n=0}^{m} b_{mn} \cdot e^{-i(\hat{q}_{m-n} + n\sigma_z)\cdot z}; \tag{8}$$

$$\frac{E_{отр}}{E_o} = \left(\frac{q_o - \hat{q}_o}{q_o + \hat{q}_o}\right) e^{ik_y \cdot y + iq_o \cdot z} + \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta\varepsilon)^m \cdot e^{i(k_y + m\sigma_y)\cdot y + iq_m \cdot z} \cdot \sum_{n=0}^{m} b_{mn}, \tag{9}$$

где для коэффициентов b_{mn} реализуются рекурентные соотношения:

$$b_{oo} = \frac{2q_o}{q_o + \hat{q}_o}, \quad b_{mn} = \frac{k_o^2 \cdot b_{m-1,n-1}}{(\hat{q}_{m-n} + n\cdot\sigma_z)^2 - \hat{q}_m^2}, \tag{10}$$

$$b_{mo} = -\sum_{n=1}^{m} b_{mn} \cdot \frac{(q_m + \hat{q}_{m-n} + n\cdot\sigma_z)}{(q_m + \hat{q}_m)}.$$

Полученное решение (8)-(10) удовлетворяет исходной системе (1)-(2), что может быть проверено непосредственной подстановкой. Соотношения (8), (9) наглядно демонстрируют возникновение серии боковых лучей в каждом порядке теории возмущений по $\Delta\varepsilon$. При этом для каждого порядка m реализуется один отраженный луч с конечной амплитудой $\sim(\Delta\varepsilon)^m$ и $(m+1)$ преломленных. Как и следовало ожидать [2], направления отраженных лучей характеризуется углами φ_m к оси z:

$$\sin\varphi_m = (k_y + m\sigma_y)/k = \sin\alpha + m\cdot\frac{\lambda}{r_y},$$

где

α - угол падения ($\sin\alpha = k_y/k$);

$\lambda = 2\pi/k$ - длина волны;

$r_y = 2\pi/\sigma_y$ - продольный масштаб неоднородности возмущения $\Delta^{\wedge}\varepsilon$.

Несколько сложнее описание преломленных лучей, амплитуды которых имеют, согласно (10), резонансный характер при $\sigma_z = (\hat{q}_m - \hat{q}_{m-n})/n$. Соответствующий предельный переход целесообразно обсудить, ограничиваясь первым порядком теории возмущений. В этом случае из (8)-(10) имеем компактные выражения:

$$\frac{E^{(1)}_{отр}}{E_o} = \left(\frac{q_o - \hat{q}_o}{q_o + \hat{q}_o}\right) \cdot e^{ik_y \cdot y + iq_o \cdot z} - a\cdot e^{i(k_y + \sigma_y)\cdot y + iq_1 \cdot z}; \tag{11}$$

$$\frac{E^{(1)}_{пр}}{E_o} = \frac{2q_o}{(q_o+\hat{q}_o)} \cdot e^{ik_y\cdot y-i\hat{q}_o\cdot z} - (a+b)\cdot e^{i(k_y+\sigma_y)\cdot y-i\hat{q}_1\cdot z} + b\cdot e^{i(k_y+\sigma_y)y-i(\hat{q}_o+\sigma_z)\cdot z}, \tag{12}$$

где

$$a = \frac{2k_o^2\cdot\Delta\varepsilon\cdot q_o}{(q_o+\hat{q}_o)(q_1+\hat{q}_1)(\hat{q}_o+\hat{q}_1+\sigma_z)}; \tag{13}$$

$$b = \frac{2k_o^2\cdot\Delta\varepsilon\cdot q_o}{(q_o+\hat{q}_o)\cdot\left[(\hat{q}_o+\sigma_z)^2-\hat{q}_1^2\right]} \tag{14}$$

Из (11)-(14) ясно, что в резонансном случае $\sigma_z \to \sigma_z^{рез} = \hat{q}_1-\hat{q}_o$ амплитуда a (13) отраженной волны остается конечной. В преломленной волне при этом происходит слияние находящихся в противофазе боковых лучей. Соответствующая структура поля, обеспечивающая различные предельные переходы, имеет вид:

$$\frac{E^{(рез)}_{пр}}{E_o} = \frac{2q_o}{q_o+\tilde{q}_o}\cdot e^{i(k_y+\sigma_y)\cdot y-i\tilde{q}_1\cdot z} + \frac{2q_o}{q_o+\hat{q}_o}\left[e^{ik_y\cdot y-i\hat{q}_o\cdot z} - e^{i(k_y+\sigma_y)\cdot y-i\hat{q}_1\cdot z}\right], \tag{15}$$

где

$$\tilde{q}_o = \sqrt{\hat{q}_o^2 + \frac{\hat{q}_o\cdot(q_o+\hat{q}_o)}{\hat{q}_1\cdot(q_1+\hat{q}_1)}\cdot k_o^2\cdot\Delta\varepsilon};$$

$$\tilde{q}_1 = \sqrt{\hat{q}_1^2+k_o^2\cdot\Delta\varepsilon}.$$

Действительно, при $|k_o\cdot\Delta\varepsilon\cdot z| \ll 1$ и $|(\sigma_z-\sigma_z^{рез})\cdot z| \ll 1$ выражения (12) и (15) переходят друг в друга, а при $\vec{\sigma} = 0$ (но конечных $\Delta\varepsilon$) соотношение (15) соответствует френелевскому [2]:

$$\frac{E_{пр}}{E_o} = \frac{2k_z}{k_z+\tilde{k}_z}\cdot e^{ik_y\cdot y-i\tilde{k}_z\cdot z},$$

где

$$\tilde{k}_z = \sqrt{k_o^2\cdot(\hat{\varepsilon}+\Delta\varepsilon) - k_y^2}$$

В заключение следует отметить, что при малых $\vec{\sigma}$ рассмотренная резонансная ситуация реализуется, если $\vec{\sigma}$ ортогонален к направлению невозмущенного луча:

$$\sigma_y\cdot k_y + \sigma_z^{рез}\cdot\hat{k}_z = 0.$$

Литература

1. Константинов О.В., Романов Ю.Ф., Рыхлов А.Ф. ЖТФ, 1981, т. 51, вып. 2, с. 239.

2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.