

В.В. Котляр, И.В. Никольский, В.А. Сойфер

ОПТИКО-ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА АНСАМБЛЯ МИКРОЧАСТИЦ ПО ЕГО ПРОСТРАНСТВЕННОМУ СПЕКТРУ

1. Постановка задачи

На рис. 1 показана оптико-электронная схема анализируемой в работе экспериментальной ситуации. Тонкая плоскопараллельная кювета К, через которую прокачи-

вается исследуемая среда (газ, жидкость) с диспергированными в ней частицами, освещается плоской волной когерентного монохроматического света с длиной волны меньше размеров микрочастиц. Объектив О формирует на фокусном расстоянии пространственный Фурье-спектр рассеянного частицами излучения. В фокальной плоскости объектива находится многоэлементный фотоприемник (линейный или кольцевой), регистрирующий среднюю интенсивность света вдоль радиальной координаты в Фурье-плоскости. Электронный сигнал с фотоприемника поступает в ЭВМ для последующей цифровой обработки.

В [1] дан обзор результатов о методах восстановления функции распределения микрочастиц по размерам (ФРМР) в оптико-электронной схеме на рис. 1. Следуя [1], получим выражение, связывающее распределение средней интенсивности спектра с ФРМР.

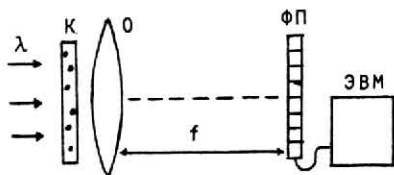


Рис. 1

Комплексная амплитуда рассеянного светового поля (без учета центрального нерассеянного максимума) в пространственном спектре в малоугловом приближении (обоснование применимости малоуглового приближения для исследования ансамбля микрочастиц см. в [2]) и при условии, что частицы сферические и поглощающие, описывается выражением

$$F(r, \varphi) = A \sum_{n=1}^M a_n r^{-1} J_1\left(\frac{k}{f} r a_n\right) \exp\left[i \frac{k}{f} r r_n \cos(\varphi - \varphi_n)\right],$$

где a_n - радиус частицы; M - число частиц; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число света с длиной волны λ ; f - фокусное расстояние объектива, A - постоянная, (r_n, φ_n) - полярные координаты центра частицы; $J_1(x)$ - функция Бесселя первого рода первого порядка. Средняя интенсивность спектра равна выражению

$$\begin{aligned} I(r, \varphi) &= \langle F(r, \varphi) F^*(r, \varphi) \rangle = \\ &= \frac{A^2}{r^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a_n a_m J_1\left(\frac{k}{f} r a_n\right) J_1\left(\frac{k}{f} r a_m\right) \times \\ &\times \langle \exp\left[\frac{ikr}{f} \{r_n \cos(\varphi - \varphi_n) - r_m \cos(\varphi - \varphi_m)\}\right] \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ - знак усреднения по ансамблю статистически подобных наборов микрочастиц. Если частиц одинакового радиуса $M_1(a_n)$ достаточно много ($N > 10$), то по центральной предельной теореме получим, что имеет место выражение

$$I(r) = \frac{A^2}{r^2} \sum_{n=1}^{M_2} a_n^2 J_1^2\left(\frac{k}{f} r a_n\right) M_1(a_n),$$

где M_2 - число "сортов" частиц с одинаковыми радиусами. В непрерывном варианте, когда мала разница между радиусами соседних "сортов" частиц $a_n - a_{n+1} \ll a_n$, сумма переходит в интеграл

$$I(r) = \frac{A^2}{r^2} \int_0^\infty P(a) a^2 J_1^2\left(\frac{k}{f} r a\right) da, \quad (1)$$

где $P(a)$ - функция распределения частиц по размерам.

Таким образом, задача определения ФРМР сводится к решению интегрального уравнения (1) относительно функции $P(a)$, считая, что функция $I(r)$ известна из эксперимента. Заметим, что если исследуемые частицы не сферической формы, но попадают в зону контроля со случайными ориентациями, то предыдущие рассуждения верны и для анализа таких частиц, но восстановленная ФРМР будет характеризовать распределение частиц по некоторому эффективному радиусу a_0 , равному

$$a_0 = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a(\theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

где $a(\theta, \varphi)$ - функция радиусов одного сорта частиц в зависимости от ориентации частицы в пространстве.

2. Определение ФРМР с помощью преобразований Ханкеля и Абеля

В [3] и более полно в [4] предложено решение уравнения (1) в виде

$$P(a) = A \int_0^a dx \frac{d^3}{dx^3} (\sqrt{x} \Theta(x)) \int_0^\infty I(r) r^2 J_1\left(\frac{2k}{f} r \sqrt{a^2 - x}\right) dr, \quad (2)$$

где $\Theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$. Видно, что обработка измеренной интенсивности $I(r)$ состоит из последовательности действий: умножения $I(r)$ на r^2 ; осуществление преобразования Ханкеля первого рода (второй интеграл в (2)) и свертки полученной функции с третьей производной функции $\sqrt{x} \Theta(x)$. Чтобы избежать операции взятия производной, предлагается иная форма записи решения уравнения (1), в которой преобразование свертки заменено на преобразование Абеля, для расчетов которого существуют эффективные алгоритмы (см. [5]).

С этой целью применим к обеим частям равенства (1) преобразование Фурье-Бесселя, тогда получим (см. [6], с. 232)

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^\infty I(r) r J_0\left(\frac{k}{f} r x\right) dr = \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{\frac{x}{2}}^\infty a^2 P(a) \left(\arccos \frac{x}{2a} - \frac{x}{4a^2} \sqrt{4a^2 - x^2} \right) da, \end{aligned} \quad (3)$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Функция $G(x)$ есть автокорреляция от функции, описывающей комплексное пропускание объема с частицами. Двукратное дифференцирование обеих частей равенства (2) приводит к выражению

$$\frac{2\pi}{A x} \frac{d^2 G(x)}{dx^2} = \int_{\frac{x}{2}}^\infty \frac{P(a) da}{\sqrt{4a^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что вторая производная функции автокорреляции связана с искомой функцией преобразованием Абеля. Известны две формы формулы обращения преобразования Абеля [5], на основе которых получаются две формы решения уравнения (1)

$$P(a) = -\frac{a}{A} \int_{2a}^\infty \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{-1} \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} \right) (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (5)$$

$$P(a) = -\frac{4}{A} \frac{d}{da} \int_{2a}^\infty \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (6)$$

Использование рекуррентных соотношений для цилиндрических функций и их производных позволяет выразить прямые части равенств (5), (6) через измеренную интен-

сивность $I(r)$. А именно, вместо (5), (6) имеют место, соответственно, соотношения (7), (8):

$$P(a) = - \frac{af}{Ak} \int_{2a}^{\infty} (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi \int_0^{\infty} I(r) S(r, \xi) dr, \quad (7)$$

где $S(r, \xi) = (r_0^4 \xi^{-1} - 3r_0^2 \xi^{-3}) J_1(r_0 \xi) + 2r_0^3 \xi^{-2} J_0(r_0 \xi)$,

$$P(a) = - \frac{4f}{Ak} \frac{d}{da} \int_{2a}^{\infty} (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi \int_0^{\infty} I(r) F(r, \xi) dr, \quad (8)$$

где $F(r, \xi) = r_0^2 \xi^{-1} J_1(r_0 \xi) - r_0^3 J_0(r_0 \xi)$, $r_0 = \frac{k}{f} r$.

Из (7), (8) видно, что функция $P(a)$ представляет собой результат последовательного применения к измеренной интенсивности преобразований типа Ханкеля и Абеля.

В решениях (7), (8) над функцией $I(r)$ осуществляются только интегральные преобразования. Ниже показывается как трансформируются эти решения, если измеренные данные предварительно подвергнуть операции дифференцирования.

Из (1) следует, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (r^2 I(r)) + r I(r) = \\ &= \frac{Ak}{f} \int_0^{\infty} a^3 P(a) J_1\left(\frac{k}{f} ra\right) J_0\left(\frac{k}{f} ra\right) da. \end{aligned} \quad (9)$$

Известно также соотношение ([6], с. 232)

$$\int_0^{\infty} x J_1(bx) J_0(bx) J_0(cx) dx = \frac{1}{\pi b} (4b^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что применение преобразования Фурье-Бесселя к обеим частям равенства (8) приводит к выражению

$$\int_0^{\infty} T(r) J_0\left(\frac{k}{f} r\xi\right) r dr = \frac{Af}{\pi k} \int_{\frac{k}{f} 2a}^{\infty} a^2 P(a) (4a^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} da. \quad (11)$$

Применение формул обращения преобразования Абеля, аналогичных формулам (5) и (6), но к выражению (11), приводит к еще двум новым формам решения интегрального уравнения (1)

$$P(a) = \frac{k^2}{2aAf^2} \int_{2a}^{\infty} (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi \int_0^{\infty} r^2 T(r) J_1\left(\frac{k}{f} r\xi\right) dr, \quad (12)$$

$$P(a) = - \frac{2k}{a^2 Af} \frac{d}{da} \int_{2a}^{\infty} (\xi^2 - 4a^2)^{-\frac{1}{2}} \xi d\xi \int_0^{\infty} r T(r) J_0\left(\frac{k}{f} r\xi\right) dr. \quad (13)$$

Полученные разные формы (формулы (7), (8), (12), (13)) решения уравнения (1) предоставляют возможность для выбора оптимального алгоритма восстановления ФРМР по таким параметрам, как точность восстановления, устойчивость к ошибкам измерения, быстродействие и т.д.

3. Определение ФРМР с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя

В предыдущем разделе ФРМР определена как результат последовательного применения двух интегральных преобразований, для численного осуществления которых требуется около $2N^2$ арифметических операций, где N - число интервалов, на которые разбивается область интегрирования в формулах (7), (8). В данном разделе

приводится метод, позволяющий сократить число требуемых арифметических операций в полтора раза и соответственно увеличить быстродействие алгоритма обработки измеренной интенсивности.

С этой целью воспользуемся ортогональностью цилиндрических функций одного порядка и разложим искомую ФРМР в ряд по функциям Бесселя нулевого порядка первого рода. Получим

$$a^3 P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_0(\rho_n \frac{a}{a_0}), \quad (14)$$

где ρ_n - нули функции Бесселя, $J_0(\rho_n) = 0$, $\rho_0 = 0$, a_0 - произвольный фиксированный радиус частицы. Подставив (14) в (1) и воспользовавшись выражением ([6], с. 232)

$$\int_0^{\infty} J_0(ax) J_1^2(bx) \frac{dx}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\arccos \frac{a}{2b} - \frac{a}{4b^2} \sqrt{4b^2 - a^2}), & 2b > a \\ 0, & 2b \leq a, \end{cases}$$

которое уже было использовано при выводе равенства (3), получим

$$\frac{\pi}{A} r^2 I(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\arccos \frac{\rho_n}{\omega} - \frac{\rho_n}{\omega^2} \sqrt{\omega^2 - \rho_n^2}), \quad (15)$$

где $\omega = 2ka_0 r f^{-1}$. Заменяя ряд (15) конечной суммой и выбирая отсчеты радиальной переменной r , удовлетворяющие неравенствам

$$f(2ka_0)^{-1} \rho_m \leq r_m \leq f(2ka_0)^{-1} \rho_{m+1}, \quad (16)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} i(r_1) = c_0 \\ i(r_2) = c_0 + c_1 \psi_1(\omega_2) \\ \vdots \\ i(r_N) = c_0 + c_1 \psi_1(\omega_N) + \dots + c_{N-1} \psi_{N-1}(\omega_N), \end{cases} \quad (17)$$

где $\omega_k = 2ka_0 r_k f^{-1}$, r_k - удовлетворяет (16),

$$i(r_k) = \pi A^{-1} r_k^2 I(r_k),$$

$$\psi_k(\omega_n) = \arccos \frac{\rho_k}{\omega_n} - \frac{\rho_k}{\omega_n^2} \sqrt{\omega_n^2 - \rho_k^2}.$$

Рекуррентная формула решения системы (17) записывается в виде

$$c_k = [i(r_{k+1}) - c_0 - \sum_{n=1}^{k-1} c_n \psi_n(r_{k+1})] \psi_k^{-1}(r_{k+1}). \quad (18)$$

Чтобы знаменатель в (18) был как можно большим, следует выбирать r_k из неравенств (16), равным $r_k = f(2ka_0)^{-1} \rho_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, получим следующую методику определения ФРМР: измеряется средняя интенсивность спектра $I(r)$. По известным отсчетам функции $r_k^2 I(r_k)$ и по формулам (18) находятся коэффициенты c_n , по которым из формулы (14) определяется искомая $P(a)$.

Из (16) следует, что отсчеты радиальной переменной r_k в данном случае будут неэквидистантные. Переход к неэквидистантным отсчетам позволил получить треугольную систему уравнений (17), для решения которой требуется около $\frac{N^2}{2}$ арифметических операций, а не N^2 операций, как это требуется для выполнения одного из преобразований по формулам (7) или (8).

Заметим, что получить треугольные системы уравнений, аналогичные системе (17), можно и другими способами. Например, воспользовавшись выражением ([6], с. 232)

$$\int_0^{\infty} J_0(ax) J_1^2(bx) dx = \frac{1}{\pi a} \left(\frac{2b^2 - a^2}{b \sqrt{4b^2 - a^2}} \right), \quad 2b > a > 0$$

и применяя вместо (14) разложение в ряд вида

$$a^2 P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_0\left(\rho_n \frac{a}{a_0}\right).$$

Предложенный метод апробировался численно. В качестве функций $P(a)$ выбирались равномерное распределение частиц по радиусам

$$P(a) = \{1, a \in [a_n, a_k]; 0, a \notin [a_n, a_k]\}$$

и супергауссовое распределение

$$P(a) = \exp\left[-\left(\frac{a - a_0}{\Delta}\right)^{2L}\right].$$

Дискретность отсчетов по радиусам частиц была равна 1 мкм, дискретность отсчетов по интенсивности (незаквидистантная) была около 150 мкм, $f = 100$ мм, $k = 10^4$ мм⁻¹. На рис. 2 показано распределение средней интенсивности спектра для равномерной ФРМР, вычисленное по формуле (1) методом Симпсона в точках r_k , удовлетворяющих условию (16). При этом дискретность по a была 0,1 мкм, $N = 100$ — общее число отсчетов, $a_n = 20$ мкм, $a_k = 30$ мкм.

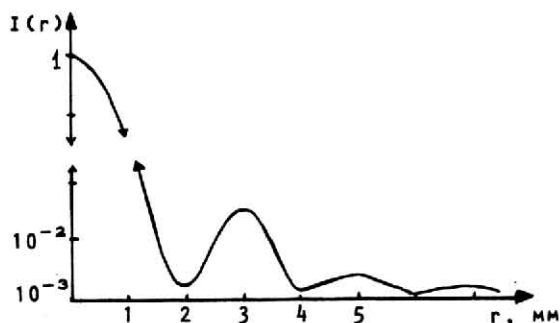


Рис. 2

На рис. 3 приведены восстановленные равномерные ФРМР для разного числа членов ряда (14): 1 — $N = 150$, 2 — $N = 100$, 3 — $N = 50$, 4 — $N = 20$. При этом $a_n = 20$ мкм, $a_k = 30$ мкм. На рис. 4 показана зависимость среднеквадратичной ошибки восстановления δ от числа N членов ряда (14). Погрешность δ вычислялась по формуле

$$\delta = \left[\frac{\sum_{a_m=a_n+1}^{a_k-1} (P_{\text{вос}}(a_m) - P_{\text{исх}}(a_m))^2}{\sum_{a_m=a_n+1}^{a_k-1} P_{\text{исх}}^2(a_m)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Из рис. 4 видно, что ряд (14) сходится, так как с ростом числа коэффициентов погрешность восстановления ФРМР убывает.

На рис. 5 показаны зависимости восстановленной равномерной ФРМР при одинаковой ширине "окна" $[a_n, a_k]$, но при изменении общего радиуса частиц, входящих

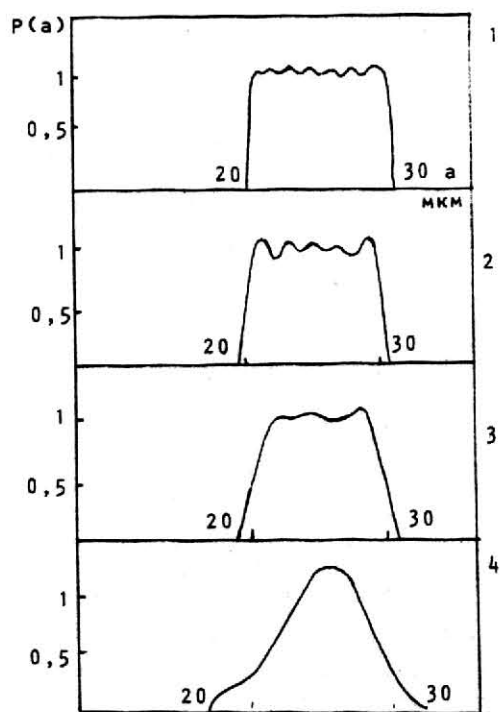


Рис. 3

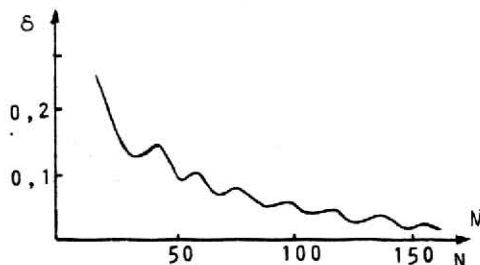
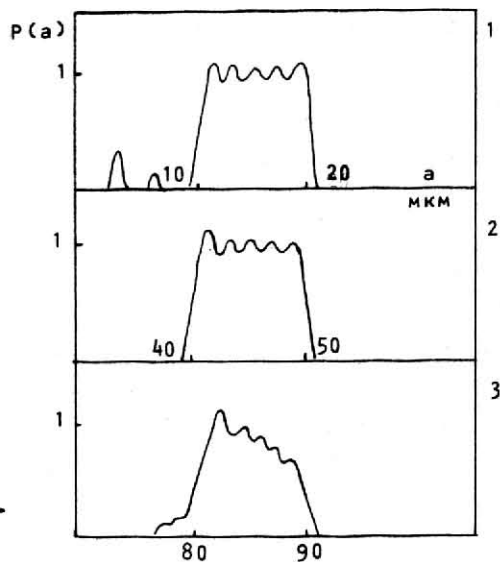


Рис. 4

Рис. 5 →



в ансамбль ($N = 100$): 1 - $a_n = 10$ мкм, $a_k = 20$ мкм, 2 - $a_n = 40$ мкм, $a_k = 50$ мкм, 3 - $a_n = 80$ мкм, $a_k = 90$ мкм. Погрешность, как видно из рис. 5, растет с ростом радиусов частиц, входящих в ансамбль и составляет: 1 - $\delta = 0,07$, 2 - $\delta = 0,1$, 3 - $\delta = 0,4$. Из рис. 5 видно также, что шкалу отсчетов по "а" следует выбирать так, чтобы "окно" $[a_n, a_k]$ оказывалось в средней части этой шкалы, так как при уменьшении радиусов "а" появляются дополнительные "паразитные" лепестки при восстановлении ФМР (рис. 5,1), а при увеличении радиусов происходит "завал" восстановленной ФМР при приближении к a_k (рис. 5,3).

На рис. 6 показаны восстановленные ФМР при различной ширине "окна" $[a_n, a_k]$ ($N=100$): 1 - $a_n = 29$ мкм, $a_k = 31$ мкм; 2 - $a_n = 26$ мкм, $a_k = 34$ мкм; 3 - $a_n = 22$ мкм, $a_k = 38$ мкм. При этом погрешность минимизируется при ширине "окна", равной $a_k - a_n = 20$ мкм, и медленно увеличивается при увеличении и уменьшении разности $a_k - a_n$.

На рис. 7,1 показана восстановленная супергауссова ФМР при $L = 1$, $N = 50$, $a_0 = 15$ мкм; пунктирная линия - исходная функция распределения. Ошибка δ подсчитывалась в "окне" $[a_0 - \Delta, a_0 + \Delta]$ и составила $\delta = 0,06$. На рис. 7,2 показана зависимость среднеквадратичной ошибки восстановления ФМР от показателя супергаусса L . Видно, что чем более круто изменяется функция распределения, чем ближе она к прямоугольному распределению, тем больше погрешность восстановления.

Численное исследование работы алгоритма по формулам (14), (18) в присутствии шумов данных, при этом к вычисленной по формуле (1) средней интенсивности $I(r)$ добавлялся аддитивный белый шум, генерируемый датчиком случайных чисел, равномерно заполняющих отрезок $[-\frac{QI(0)}{2}, \frac{QI(0)}{2}]$ (где $I(0)$ - максимальное значение интенсивности при $r = 0$), показало, что устойчивости работы алгоритма

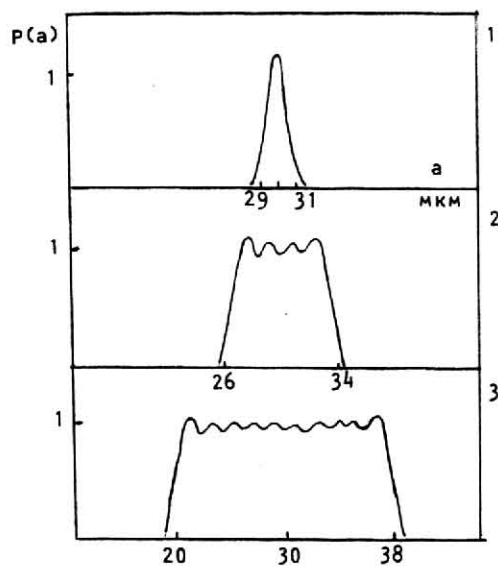


Рис. 6

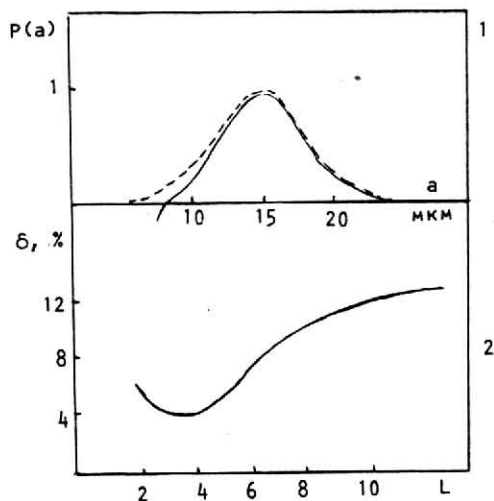


Рис. 7

можно достичь уменьшением числа членов в ряде (14), причем, правда, происходит искажение исходной ФРМР (см. рис. 3, 4). На рис. 8 показана зависимость погрешности δ восстановления ФРМР от величины амплитуды шума Q ($N = 12$). В этом случае $a_n = 10$ мкм, $a_k = 20$ мкм. Видно, что в широких пределах изменения величины погрешность δ остается примерно одинаковой.

Приведенные здесь результаты численного моделирования метода восстановления ФРМР по формулам (14), (18) демонстрируют работоспособность предложенного алгоритма и позволяют надеяться на успех в его практическом применении для анализа экспериментальных данных.

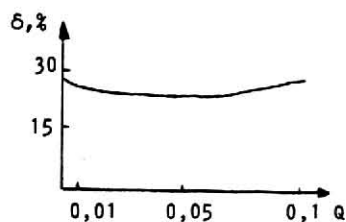


Рис. 8

4. Определение ФРМР с помощью преобразования типа Неймана-Ханкеля

В данном разделе предложен и анализируется метод восстановления функции распределения микрочастиц по размерам с помощью всего одного интегрального преобразования типа Неймана-Ханкеля, примененного к измеренной интенсивности $I(r)$. При этом увеличивается быстродействие по сравнению с алгоритмами (7), (8) в два раза и с алгоритмом (14), (18) в полтора раза. Это следует из того, что число арифметических операций, требуемых для выполнения одного интегрального преобразования, пропорционально N^2 (N — число интервалов разбиения области интегрирования).

В [7] предложено использовать для решения уравнения (1) две обобщенные трансформанты Фурье, найденные Бейтманом (1907 г.). Оказывается, что имеют место выражения

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(xy)g(y)dy, \quad (20)$$

$$g(y) = \int_0^{\infty} H(xy)f(x)dx,$$

$$\text{где } K(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{d}{dx} (x J_{\nu}^2(\frac{x}{2})),$$

$$H(x) = -\sqrt{\pi} J_{\nu}(\frac{x}{2}) Y_{\nu}(\frac{x}{2}),$$

где также $J_{\nu}(x)$, $Y_{\nu}(x)$ - функции Бесселя и Неймана, соответственно, ν -го порядка. Функция Неймана есть, по определению, функция Бесселя второго рода, которая связана с функцией Бесселя первого рода известным соотношением

$$Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu},$$

где ν - нецелое число, если же $\nu = m$, где m - целое число, то имеет место предельное соотношение

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \{Y_{\nu}(x)\}.$$

Выражения (20), применимые к уравнению (1), приводят к результату

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r \frac{d}{dr} (r^3 I(r)) J_1(\frac{k}{f} r a') Y_1(\frac{k}{f} r a') dr = \\ & = A \int_0^{\infty} r \frac{d}{dr} (r J_1^2(\frac{k}{f} r a')) dr \int_0^{\infty} a^2 P(a) J_1(\frac{k}{f} r a) Y_1(\frac{k}{f} r a) da = \\ & = -A \int_0^{\infty} a P(a) da \int_0^{\infty} a r \frac{d}{dr} (r J_1^2(\frac{k}{f} r a')) J_1(\frac{k}{f} r a) Y_1(\frac{k}{f} r a) dr = \\ & = -A \int_0^{\infty} a P(a) \delta(a-a') da = -A P(a') a', \end{aligned}$$

где $\delta(a-a')$ - дельта - функция Дирака. Отсюда получается окончательное выражение для решения уравнения (1) в виде

$$P(a) = -\frac{1}{aA} \int_0^{\infty} r \frac{d}{dr} (r^3 I(r)) J_1(\frac{k}{f} r a) Y_1(\frac{k}{f} r a) r dr. \quad (21)$$

Заметим, что решение в виде (21) не приведено в [7], в которой только намечен путь к его получению.

Из (21) следует алгоритм обработки измеренной интенсивности $I(r)$: первая операция - взятие производной от функции $r^3 I(r)$, вторая операция - осуществление преобразования типа Неймана-Ханкеля от функции $\frac{d}{dr} (r^3 I(r))$.

Далее предлагается модернизация решения (21), в которой отсутствует операция дифференцирования измеренных данных, что, очевидно, должно увеличить точность восстановления ФРМР. С этой целью используем соотношение ([6], с. 283)

$$\int_0^{\infty} x J_1^2(ax) J_1(bx) Y_1(bx) dx = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi ab}, & b < a \\ 0, & b > a. \end{cases} \quad (22)$$

Применение формулы (22) к уравнению (1) дает следующее выражение

$$\int_0^{\infty} r^3 I(r) J_1(\frac{k}{f} r \xi) Y_1(\frac{k}{f} r \xi) dr = -\frac{A f^2}{2\pi k^2 \xi} \int_0^{\infty} a P(a) da. \quad (23)$$

Дифференцируя по ξ обе части равенства (23), получим

$$P(a) = \frac{2\pi}{A a_0} \int_0^{\infty} r^3 I(r) \frac{d}{da} \{a J_1(\frac{k}{f} r a) Y_1(\frac{k}{f} r a)\} dr, \quad (24)$$

где $A_0 = A(\frac{f}{k})^2$. Ядро преобразования (24) можно получить в виде без операции

дифференцирования, используя известные рекуррентные соотношения для производных цилиндрических функций. Можно показать, что имеют место выражения

$$\frac{d}{da} \{a J_1(r_0 a) Y_1(r_0 a)\} = r_0 a [J_1(r_0 a) Y_0(r_0 a) + J_0(r_0 a) Y_1(r_0 a)] - J_1(r_0 a) Y_1(r_0 a) = \Phi(r_0 a), \quad (25)$$

где $r_0 = \frac{k}{f} r$. Окончательно решение уравнения (1) записывается в виде

$$P(a) = \frac{2\pi}{a A_0} \int_0^\infty r^3 I(r) \Phi(r_0 a) dr. \quad (26)$$

Из (1) и (23) следует, что обнаружены две новые взаимные обобщенные Фурье-трансформанты

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x) &= x J_1^2(x), \\ \mathcal{H}(x) &= 2\pi \frac{d}{dx} [x J_1(x) Y_1(x)], \end{aligned} \quad (27)$$

для которых выполняются соотношения, аналогичные (20), но при $f(x) = x^3 I(x)$, $g(y) = yP(y)$.

Таким образом, согласно (26) алгоритм восстановления ФРМР содержит всего одну операцию над измеренной интенсивностью, т.е. применение интегрального преобразования типа Неймана-Ханкеля с ядром $\Phi(r_0 a)$ к функции $r^3 I(r)$.

Предложенный метод апробировался численно. Для расчетов функции Бесселя и Неймана применялась аппроксимация полиномами (см. [8], с. 191), интеграл (1) считался по методу Симпсона. Расчетные параметры были следующие: $k = 10^4 \text{ мм}^{-1}$, $f = 10^2 \text{ мм}$, дискретность по радиальной переменной - 0,1 мм, дискретность по радиусам частиц - 1 мкм, однако при расчете интеграла (1) дискретность по радиусам была 0,1 мкм. Исходная ФРМР выбиралась прямоугольного вида на отрезке $[a_n, a_k]$.

На рис. 9,1 показана восстановленная прямоугольная ФРМР при $N = 100$, $a_n = 20 \text{ мкм}$, $a_k = 30 \text{ мкм}$. Погрешность восстановления, рассчитанная по формуле (19), равна $\delta = 0,02$. Видно, однако, что в области $a \in [0, a_n]$ имеют место дополнительные "паразитные" лепестки, возникающие из-за ошибок при вычислении интегралов (1) и (26) в конечных пределах. Если априорно известно, что период модуляции "паразитных" лепестков меньше периода модуляции значений искомой ФРМР (этому всегда можно удовлетворить, выбирая N достаточно большим), то эти дополнительные лепестки могут быть отфильтрованы подходящим фильтром. Действительно, можно было заметить, что максимумы дополнительных лепестков лежат в точках a_n , которые связаны с нулями функции Бесселя первого порядка $J_1(\rho_n) = 0$ выражением

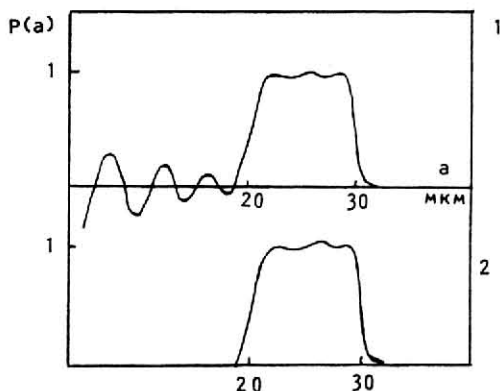


Рис. 9

$a_n = \rho_n \left(\frac{k}{f} HN\right)^{-1}$, где $N = 0,1$ мм - дискретность по радиальной переменной. А минимумы (отрицательные максимумы) модуляции дополнительных лепестков лежат в точках b_n , связанных с нулями функции Неймана первого порядка $Y_1(\omega_n) = 0$ выражением $b_n = \omega_n \left(\frac{k}{f} HN\right)^{-1}$. В связи с тем, что искомая ФРМР не может менять знак от отсчета к отсчету, так как она положительная, по определению, то понятно как фильтровать "паразитные" лепестки. Если за два последующих отсчета a_n и b_n , выбранных как указано выше, восстановленная функция распределения меняет знак, то ее надо положить равной нулю в обоих отсчетах. Если же знак функции не изменился (и положительный), то функцию распределения в этих отсчетах оставляют без изменения.

На рис. 9,2 показан результат описанной фильтрации восстановленной ФРМР на рис. 9,1. Видно, что дополнительные лепестки полностью устранены.

Проведено сравнение работы алгоритмов восстановления ФРМР по формулам (26) и (14), (18), которое показало, что в точностном плане оба алгоритма сравнимы, так как при одинаковых параметрах численного эксперимента, и если число членов ряда (14) равно числу интервалов разбиения области интегрирования в (26), то погрешности восстановления функции распределения для обоих методов отличаются не более чем на 20%.

5. Определение ФРМР с помощью быстрого преобразования Фурье

В данном разделе предложен метод восстановления ФРМР, обеспечивающий быстрое действие, превышающее быстрое действие методов предложенных ранее, поскольку интегральное преобразование интенсивности осуществляется с помощью быстрого преобразования Фурье, для выполнения которого требуется около $N \log_2 N$ арифметических операций.

С этой целью предлагается рассматривать интегральное уравнение (1) относительно функции распределения $P(a)$ как уравнение типа свертки. Для этого вводятся переобозначения

$$i(r) = r^2 I(r), \quad s(a) = a^3 P(a), \quad F(ra) = J_1^2\left(\frac{k}{f} ra\right)$$

и замена переменных

$$r = r_0 \exp(x), \quad a = a_0 \exp(y).$$

Безразмерные переменные x, y принадлежат уже всей числовой оси, a_0, r_0 - произвольные постоянные, задающие диапазон изменения неэквидистантных отсчетов по переменным a и r . При этом вместо уравнения (1) получится уравнение вида

$$i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(y) F(x+y) dy. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) записывается в виде [9]

$$s(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) R(\alpha, \omega)}{\Phi(\omega)} \exp(-i\omega y) d\omega, \quad (29)$$

$$\text{где } U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(x) \exp(ix\omega) dx,$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \exp(iy\omega) dy,$$

$R(\alpha, \omega)$ - стабилизирующий множитель, который можно выбрать в виде, аналогичном виду фильтра Винера [9]:

$$R(\alpha, \omega) = \frac{|\Phi(\omega)|^2}{|\Phi(\omega)|^2 + \alpha \omega^{2n}}, \quad (30)$$

где α - параметр регуляризации, $n = 1, 2, 3, \dots$

Окончательное выражение для искомой функции распределения с учетом (29), (30) имеет вид

$$P(a) = a^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) \Phi^*(\omega)}{|\Phi(\omega)|^2 + \alpha \omega^{2n}} \exp(-i\omega \ln \frac{a}{a_0}) d\omega, \quad (31)$$

где $P(a) \geq 0$. Таким образом, методика восстановления ФМР сводится к следующему: измеряется радиальное распределение средней интенсивности $I(r)$ Фурье-спектра; измеренная функция $r^2 I(r)$ после замены переменных $r = r_0 \exp(x)$ численно подвергается быстрому преобразованию Фурье; полученная при этом функция $U(\omega)$ подставляется в выражение (31), и окончательно вычисляется функция $P(a)$.

Предложенный метод восстановления ФМР включает в себя процедуру регуляризации и поэтому оказывается устойчивым к ошибкам в данных измерения. Для апробации полученных выражений проводилось численное моделирование при следующих параметрах: $N = 128$ - общее число отсчетов, дискретность эквидистантных отсчетов по переменным x, y была равна 0,03; $r_0 = 9$ мм; $a_0 = 23$ мкм, при этом отсчеты по переменным r и a оказывались неэквидистантными в диапазоне $0,1 \text{ мм} < r < 6 \text{ мм}$ и $3 \text{ мкм} < a < 150 \text{ мкм}$, соответственно.

В качестве функции $P(a)$ выбиралось равномерное распределение частиц по радиусам на отрезке $[a_n, a_k]$, при $a_n = 20$ мкм, $a_k = 25$ мкм. К рассчитанной по формуле (1) интенсивности добавлялся аддитивный шум, генерировавшийся датчиком случайных чисел, равномерно заполняющих отрезок значений $[-\frac{I(0)Q}{2}, \frac{I(0)Q}{2}]$; Q - задает амплитуду шума.

На рис. 10 показаны восстановленные по (31) равномерные ФМР: 1 - $\alpha = 10^{-9}$; 2 - $\alpha = 10^{-7}$; 3 - $\alpha = 10^{-5}$. При этом в (31) выбиралось $n = 2$. Из рис. 10 видно, что при увеличении параметра регуляризации α края прямоугольного распределения сглаживаются (пунктиром показана исходная ФМР).

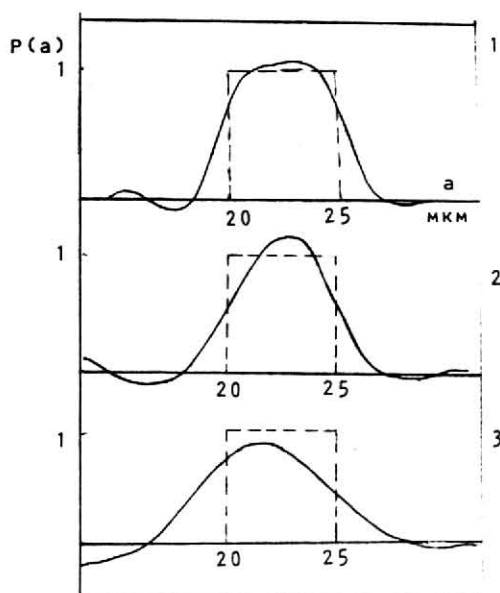


Рис. 10

На рис. 11 показаны восстановленные ФМР ($\alpha = 10^{-5}$) при различных амплитудах шума: 1 - $Q = 0$; 2 - $Q = 10^{-2}$; 3 - $Q = 10^{-1}$. Видно, что при увеличении амплитуды шума восстановленная функция распределения сужается в заданном "окне" $[a_n, a_k]$ и увеличивается амплитуда "паразитных" лепестков.

На рис. 12 показаны зависимости погрешности восстановления ФРМР в процентах, рассчитанной по формуле (19), в зависимости от амплитуды шума Q . На рис. 12,а показаны графики для $r_0 = 9$ мм: 1 - $\alpha = 10^{-7}$; 2 - $\alpha = 10^{-6}$; 3 - $\alpha = 10^{-5}$; на рис. 12,б - графики для $r_0 = 16$ мм: 1 - $\alpha = 10^{-7}$, 2 - $\alpha = 10^{-6}$, 3 - $\alpha = 10^{-5}$. Увеличение r_0 означает увеличение диапазона изменения радиальной пе-

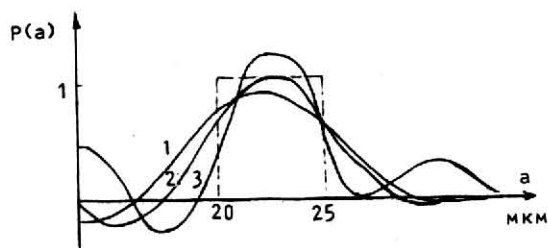


Рис. 11

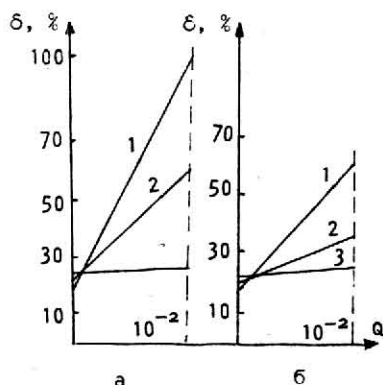


Рис. 12

ременной или увеличение числа периодов модуляции в зарегистрированной интенсивности. Из рис. 12 видно, что устойчивость алгоритма (31) к шумам начинается с величины параметра регуляризации, равной $\alpha = 10^{-5}$, при этом погрешность восстановления ФРМР практически не изменяется при изменении амплитуды шума Q в широком диапазоне от 0 до 10^{-1} . При $Q = 0,1$ амплитуда шума составляет 10% от максимального значения интенсивности $I(0)$, при этом погрешность восстановления ФРМР не превышает 30%.

* * *

В работе освещаются новые оптико-цифровые методы анализа пространственного ансамбля микрочастиц. При этом получены разные формы решения интегрального уравнения с ядром в виде функции Бесселя первого рода первого порядка, которые выражают в явном виде искомую функцию распределения микрочастиц по размерам через измеренную среднюю интенсивность Фурье-спектра излучения, рассеянного частицами. Приведенные численные результаты демонстрируют работоспособность предложенных методов.

Л и т е р а т у р а

1. Применение методов Фурье-оптики /Под ред. Г. Старка. М.: Радио и связь, 1988.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
3. Fleuret J., Mautre H., Thery J.F. Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng., 1977, vol. 136, p. 277.
4. Nakadate S., Saito H. Opt. Lett., 1983, vol. 8, N 11, p. 578.
5. Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: изд-во НГУ, 1978.
6. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
7. Шифрин К.С. // Труды ВЗЛТИ, 1956. Вып. 3, с. 20.
8. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979.
9. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.