М.В. Першина, М.А. Чичева

О РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДВУМЕРНОГО ДПФ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДАННЫХ В АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ

ВВЕДЕНИЕ

В теории быстрых спектральных преобразований хорошо известны способы использования вещественности входного сигнала: совмещение и уменьшение размера фундаментальной области [1,2]. Такие возможности обеспечиваются избыточностью комплексных базисных функций по отношению к вещественному входному сигналу, а точнее, наличием в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ нетривиального автоморфизма (комплексного сопряжения).

В двумерном случае использование таких приемов осложняется тем, что поле $\mathbb{C}$ имеет слишком мало автоморфизмов, необходимых для разделения частичных спектров [1] или уменьшения длины преобразования [2]. Поэтому возникает необходимость использования других алгебраических структур, обладающих большим числом автоморфизмов над $\mathbb{R}$, реализация которых не требует выполнения нетривиальных операций умножения.

В данной работе рассматриваются быстрые алгоритмы двумерного ДПФ вещественной последовательности с представлением данных в алгебре кватернионов. Разработаны алгоритмы, учитывающие вещественность входного сигнала двумя указанными способами: совмещением и уменьшением размера фундаментальной области. Приведены различные схемы декомпозиции преобразования, получены оценки мультипликативной сложности.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ

Под телом $\mathbb{H}$ гамильтоновых кватернионов [3] понимается четырехмерная ассоциативная алгебра над $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{H} = \left\{ q = a + bi + cj + dk ; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

с определяющими соотношениями для умножений базисных элементов $\{1, i, j, k\}$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k. \tag{1}$$

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ канонически вкладывается в $\mathbb{H}$:

$$a + bi \to a + bi + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \tag{2}$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j. \tag{3}$$

Операция сложения кватернионов осуществляется покомпонентно, а умножения - с учетом правил (1) и с приведением подобных членов.

Далее, отображения

$$\varepsilon_i : q \mapsto i^{-1}qi, \qquad \varepsilon_j : q \mapsto j^{-1}qj, \quad \varepsilon_k : q \mapsto k^{-1}qk, \qquad \varepsilon_o : q \mapsto q \tag{4}$$

являются автоморфизмами $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$, причем

$$\begin{cases} \varepsilon_o(q) = a + bi + cj + dk, \\ \varepsilon_i(q) = a + bi - cj - dk, \\ \varepsilon_j(q) = a - bi + cj - dk, \\ \varepsilon_k(q) = a - bi - cj + dk. \end{cases} \tag{5}$$

Система уравнений (5), рассматриваемая относительно a, b, c, d, разрешима при любых значениях левых частей и требует для решения не более четырех вещественных умножений:

$$\begin{cases} 4a = \varepsilon_o(q) + \varepsilon_i(q) + \varepsilon_j(q) + \varepsilon_k(q), \\ 4bi = \varepsilon_o(q) + \varepsilon_i(q) - \varepsilon_j(q) - \varepsilon_k(q), \\ 4cj = \varepsilon_o(q) - \varepsilon_i(q) + \varepsilon_j(q) - \varepsilon_k(q), \\ 4dk = \varepsilon_o(q) - \varepsilon_i(q) - \varepsilon_j(q) + \varepsilon_k(q). \end{cases} \tag{6}$$

Считая умножения на степени двойки более элементарной операцией по сравнению с вещественным умножением [2,4], мы не будем учитывать их при анализе вычислительной сложности рассматриваемых алгоритмов.

Определим число вещественных умножений, необходимых для перемножения двух кватернионов. Умножение комплексных чисел может быть реализовано по схеме "три умножения, три сложения" [4], тогда, в соответствии с представлением (3), умножение двух кватернионов общего вида может быть реализовано с помощью девяти вещественных умножений. Пусть далее $s = \alpha + \beta i$ - i-кватернион; $t = \gamma + \delta j$ - j-кватернион. Тогда для вычисления произведений sq и qt необходимо по шесть вещественных умножений, а для одновременного вычисления произведения sqt - девять вещественных умножений:

$$\begin{aligned} sq = &\big((\alpha - \beta)b + \alpha(a - b)\big) + \big((\alpha - \beta)b + \beta(a + b)\big) + \\ &+ \big((\alpha - \beta)d + \alpha(c - d)\big)j + \big((\alpha - \beta)d + \alpha(c + d)\big)k; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} sqt = &\Big(\big[(\alpha - \beta)(b - d) + \alpha(a - b - c + d)\big]\delta + \big[(\alpha - \beta)b + \alpha(a - b)\big](\gamma - \delta)\Big) + \\ &+ \Big(\big[(\alpha - \beta)(b - d) + \beta(a + b - c - d)\big]\delta + \big[(\alpha - \beta)b + \beta(a + b)\big](\gamma - \delta)\Big)i + \\ &+ \Big(\big[(\alpha - \beta)(b - d) + \alpha(a - b - c + d)\big]\delta + \big[(\alpha - \beta)d + \alpha(c - d)\big](\gamma - \delta)\Big)j + \\ &+ \Big(\big[(\alpha - \beta)(b - d) + \beta(a + b - c - d)\big]\delta + \big[(\alpha - \beta)d + \beta(c + d)\big](\gamma - \delta)\Big)k. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом считаем, что произведения и суммы констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ выполнены заранее.

2. АЛГОРИТМ ДВУМЕРНОГО ДПФ С СОВМЕЩЕНИЕМ

Пусть $x(n_1,n_2)$ вещественная N-периодическая по каждому аргументу функция; N - четное. Ее спектр Фурье:

$$\hat{x}(m_1,m_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}x(n_1,n_2)\omega^{n_1m_1+n_2m_2}=\sum_{a,\,b=0}^{1}\omega^{am_1+bm_2}S_{ab}(m_1,m_2), \tag{9}$$

где

$$S_{ab}(m_1,\,m_2)=\sum_{n_1,n_2=0}^{N/2-1}x(2n_1+a,\ 2n_2+b)(\omega^2)^{m_1n_1+m_2n_2}. \tag{10}$$

Используя для представления входных данных функцию $q(n_1,n_2)$ со значениями в теле кватернионов $\mathbb{H}$:

$$q(n_1,n_2)=x(2n_1,\,2n_2)+x(2n_1,\,2n_2+1)i+x(2n_1+1,2n_2)j+x(2n_1+1,\,2n_2+1)k, \tag{11}$$

вычисление спектра исходной последовательности можно свести к вычислению спектра новой последовательности иной внутренней структуры, но меньшего объема, что и делает алгоритм более быстрым.

"Кватернионный спектр" $Q(m_1,\,m_2)$ такой последовательности определяется равенством [5]:

$$Q(m_1,m_2)=\sum_{n_1,n_2=0}^{N/2-1}q(n_1,n_2)(\omega^2)^{m_1n_1+m_2n_2}.$$

Выделить "частичные спектры" $S_{ab}(m_1,\,m_2)$ из массива кватернионов, являющегося результатом ДПФ в алгебре кватернионов, можно решением следующей системы уравнений вида (6):

$$\begin{cases}4S_{00}(m_1,m_2)=Q(m_1,m_2)+\varepsilon_i(Q(m_1,m_2))+\varepsilon_j(Q(-m_1,-m_2))+\varepsilon_k(Q(-m_1,-m_2)),\\ 4iS_{01}(m_1,m_2)=Q(m_1,m_2)+\varepsilon_i(Q(m_1,m_2))-\varepsilon_j(Q(-m_1,-m_2))-\varepsilon_k(Q(-m_1,-m_2)),\\ 4jS_{10}(m_1,m_2)=Q(m_1,m_2)-\varepsilon_i(Q(m_1,m_2))+\varepsilon_j(Q(-m_1,-m_2))-\varepsilon_k(Q(-m_1,-m_2)),\\ 4kS_{11}(m_1,m_2)=Q(m_1,m_2)-\varepsilon_i(Q(m_1,m_2))-\varepsilon_j(Q(-m_1,-m_2))+\varepsilon_k(Q(-m_1,-m_2)).\end{cases} \tag{12}$$

Для решения данной системы требуется не более 4 вещественных умножений на степени двойки.

Комплексные значения отсчетов спектра двумерного ДПФ в области $0\le m_1,m_2\le N/2$ находятся непосредственным применением формулы (9), для чего требуется $3\left(N/2-1\right)^2$ умножений на степени базисной функции ω.

Вычисление спектра для остальных значений пар (m_1, m_2) производится без дополнительных умножений и может быть представлено в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X(m_1, m_2) \\ X(m_1 + N/2, m_2) \\ X(m_1, m_2 + N/2) \\ X(m_1 + N/2, m_2 + N/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{00}(m_1, m_2) \\ \omega^{m_1} S_{10}(m_1, m_2) \\ \omega^{m_2} S_{01}(m_1, m_2) \\ \omega^{m_1+m_2} S_{11}(m_1, m_2) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Таким образом, мультипликативная сложность рассматриваемого алгоритма определяется, в основном, мультипликативной сложностью вычисления кватернионного аналога спектра двумерного ДПФ. Рекуррентное соотношение для оценки мультипликативной сложности алгоритма имеет при этом вид:

$$M(N \times N) = M^{*}\left(N/2 \times N/2\right) + 3\left(N/2 - 1\right)^2. \tag{14}$$

где M^{*} - оценка мультипликативной сложности вычисления кватернионного аналога спектра.

При использовании построчно-столбцового алгоритма в качестве способа декомпозиции двумерного ДПФ и кватернионного аналога алгоритма Кули-Тьюки с прореживанием по времени для вычисления одномерного ДПФ, а также с учетом того, что для умножения кватерниона общего вида на комплексное число требуется 6 вещественных умножений, получаем следующее значение этой оценки:

$$M^{*}\left(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}\right) = \frac{3N^2}{2}\left(\log_2 N - 1\right). \tag{15}$$

Откуда

$$M(N \times N) = \frac{3N^2}{2}\left(\log_2 N - \frac{1}{2}\right) - 3N + 3. \tag{16}$$

3. АЛГОРИТМЫ ДВУМЕРНОГО ДПФ С УМЕНЬШЕНИЕМ РАЗМЕРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $x(n_1, n_2)$ - входной вещественный массив размера NxN, где $N = 2^n$; его спектр Фурье

$$\begin{gathered} \hat{x}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \omega^{n_1 m_1 + n_2 m_2}; \\ 0 \le m_1, m_2 \le N - 1, \quad \omega = \exp\left\{2\pi i / N\right\}. \end{gathered} \tag{17}$$

Следуя [5], определим кватернионный спектр соотношением:

$$X(m_1,m_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\omega_1^{m_1n_1}x(n_1,n_2)\omega_2^{m_2n_2}, \tag{18}$$

где $\omega_1=\exp\{2\pi i/N\}$, $\omega_2=\exp\{2\pi j/N\}$, $0\le m_1,m_2\le N-1$.

Поскольку кватернион $q=a+bi+cj+dk$ определяется набором четырех вещественных чисел (a,b,c,d), то комплексный спектр (17) может быть получен из кватернионного спектра (18) следующим образом:

$$\hat{x}(m_1,m_2)=X(m_1,m_2)\mathbf{L}\,\mathbf{I}, \tag{19}$$

где $X(m_1,m_2)=(\chi_0(m_1,m_2),\chi_1(m_1,m_2),\chi_2(m_1,m_2),\chi_3(m_1,m_2))$ - компоненты кватернионного спектра,

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{I}=(1\quad i).$$

Таким образом, мультипликативная сложность вычисления $\hat{x}(m_1,m_2)$ совпадает со сложностью вычисления кватернионного спектра, т.к. умножения на матрицы **L**, **I** не требуют выполнения нетривиальных операций вещественного умножения.

Рассмотрим далее 3 способа декомпозиции кватернионного ДПФ, являющиеся аналогами различных схем двумерного комплексного БПФ, и приведем оценки мультипликативной сложности.

3.1. Алгоритм двумерного ДПФ с декомпозицией по основанию 2

Представим (18) в виде четырех сумм, разделяя входную последовательность по четным и нечетным значениям каждого индекса n_1,n_2:

$$\begin{aligned}X(m_1,m_2)&=\sum_{n_1,n_2=0}^{N-1}\omega_1^{m_1n_1}x(n_1,n_2)\omega_2^{m_2n_2}=\\&=\sum_{a,b=0}^{1}\omega_1^{am_1}\sum_{n_1,n_2=0}^{N/2-1}\left(\omega_1^2\right)^{m_1n_1}x_{ab}(n_1,n_2)\left(\omega_2^2\right)^{m_2n_2}\omega_2^{bm_2}=\\&=\sum_{a,b=0}^{1}\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2},\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$x_{ab}(n_1,n_2)=x(2n_1+a,2n_2+b),$$

$$X_{ab}(m_1,m_2)=\sum_{n_1,n_2=0}^{N/2-1}\left(\omega_1^2\right)^{m_1n_1}x_{ab}(n_1,n_2)\left(\omega_2^2\right)^{m_2n_2},\qquad 0\le m_1,m_2\le N/2-1.$$

Вычисление спектра для остальных значений пар (m_1, m_2) производится без дополнительных умножений и может быть записано в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} X(m_1,m_2) \\ X(m_1+N/2,\ m_2) \\ X(m_1,\ m_2+N/2) \\ X(m_1+N/2,\ m_2+N/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X_{00}(m_1,m_2) \\ \omega_1^{m_1} X_{10}(m_1,m_2) \\ X_{01}(m_1,m_2)\omega_2^{m_2} \\ \omega_1^{m_1} X_{11}(m_1,m_2)\omega_2^{m_2} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Кроме того покажем, что умножения на фазовые множители достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\{0 \le m_1, m_2 \le N/4\} = \Omega_0,$$

остальные значения определяются с использованием автоморфизмов поля кватернионов (5) без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$\omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2} \quad \text{для } (m_1,m_2) \in \Omega_0, \quad \text{и} \quad \mu_1 = N/2 - m_1, \quad \mu_2 = N/2 - m_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega_1^{a\mu_1} X_{ab}(\mu_1,m_2)\omega_2^{bm_2} &= (-1)^a \varepsilon_j\left(\omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right), \\ \omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,\mu_2)\omega_2^{b\mu_2} &= \varepsilon_i\left(\omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right)(-1)^b, \\ \omega_1^{a\mu_1} X_{ab}(\mu_1,\mu_2)\omega_2^{b\mu_2} &= (-1)^a \varepsilon_k\left(\omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right)(-1)^b. \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая количество вещественных умножений для перемножения кватернионов (7), (8), получим рекуррентное соотношение для определения оценки мультиплика-тивной сложности изложенного алгоритма с разбиением по основанию 2:

$$M(N \times N) = 4M\left(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}\right) + 6\frac{N^2}{16}2 + 9\frac{N^2}{16}. \tag{23}$$

Отсюда, как обычно [4], следует

$$M(N \times N) = \frac{21}{16} N^2 \log_2 N + O(N^2). \tag{24}$$

Переход от $X(m_1,m_2)$ к $\hat{x}(m_1,m_2)$ осуществляется без умножений (19), значит оценка (24) с константой 21/16 справедлива и для вычисления комплексного спектра $\hat{x}(m_1,m_2)$.

3.2. Алгоритм двумерного ДПФ с декомпозицией по основанию 4

Разобьем теперь входную последовательность на 16 подпоследовательностей и запишем (2) в виде:

$$X(m_1,m_2) = \sum_{a,b=0}^{3} \omega_1^{am_1} X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}, \tag{25}$$

где

$$x_{ab}(n_1,n_2) = x(4n_1 + a, 4n_2 + b),$$

$$X_{ab}(m_1,m_2)=\sum_{n_1,n_2=0}^{N/4-1}\left(\omega_1^4\right)^{m_1n_1}x_{ab}(n_1,n_2)\left(\omega_2^4\right)^{m_2n_2},\qquad 0\le m_1,m_2\le N/4-1.$$

При этом значения спектра для остальных значений аргументов вычисляются без дополнительных умножений, а именно:

$$X\left(m_1+r\frac{N}{4},m_2+p\frac{N}{4}\right)=\sum_{a,b=0}^{3}i^{ar}\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}j^{bp},\qquad r,p=0,1,2,3. \tag{26}$$

Умножения на степени базовых элементов i и j тривиальны, они сводятся к перестановкам элементов кода и/или смене знака компонент.

Кроме того, умножения на фазовые множители $\omega_1^{am_1}$, $\omega_2^{bm_2}$ достаточно производить только в фундаментальной области

$$\{0\le m_1,m_2\le N/8\}=\Omega_1.$$

Остальные значения находятся без дополнительных умножений с использованием автоморфизмов (6). Пусть в области Ω_1 найдены значения

$$\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2},\qquad \text{и}\quad \mu_1=N/4-m_1,\quad \mu_2=N/4-m_2,$$

тогда:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{a\mu_1}X_{ab}(\mu_1,m_2)\omega_2^{bm_2}&=i^a\varepsilon_j\left(\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right),\\
\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,\mu_2)\omega_2^{b\mu_2}&=\varepsilon_i\left(\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right)j^b,\\
\omega_1^{a\mu_1}X_{ab}(\mu_1,\mu_2)\omega_2^{b\mu_2}&=i^a\varepsilon_k\left(\omega_1^{am_1}X_{ab}(m_1,m_2)\omega_2^{bm_2}\right)j^b.
\end{aligned} \tag{27}$$

Такой алгоритм приводит к следующему рекуррентному соотношению для оценки мультипликативной сложности:

$$M(N\times N)=16M\left(\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}\right)+6\frac{N^2}{64}6+9\frac{N^2}{64}9, \tag{28}$$

откуда следует

$$M(N\times N)=\frac{117}{128}N^2\log_2 N+O(N^2). \tag{29}$$

3.3. Алгоритм с расщеплением основания

Рассмотрим еще одну схему декомпозиции кватернионного спектра (18), в которой ДПФ объема $N\times N$ сводится к ДПФ $N/2\times N/2$ элементов входной последовательности с четными индексами и двенадцати ДПФ объемом $N/4\times N/4$ с элементами, имеющими хотя бы один нечетный индекс. Пусть

$$A=\{(0,1),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\},$$