УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ ПРЕДЕЛЬНО-КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

А.В. Гладких
Самарский государственный аэрокосмический университет

В последнее время достигнут существенный прогресс в генерации импульсов длительностью в несколько периодов колебания поля [1]. При малом количестве длин волн в импульсе, далее называемым предельно-коротким импульсом (ПКИ), его спектральная ширина $\Delta\omega \approx 2/T$ сравнима с несущей частотой ω_0, где T-полудлительность импульса. Из-за столь широкого частотного спектра наблюдаются следующие эффекты: уширение дифракционного порядка при дифракции на решетке [2], значительное удлинение ПКИ в оптических системах, содержащих элементы с материальной дисперсией [3]. Пространственное ограничение ПКИ, в поперечном сечении, привносит новые явления в процесс их распространения и преобразования оптическими системами. Пространственно-временные процессы, которые ранее не учитывались, такие как нарастание поля и его спад, для ПКИ могут принимать первостепенное значение. Одной из фундаментальных физических причин, приводящей к существенной трансформации пространственно-временной структуры ПКИ, является взаимосвязное дифракционное преобразование частотного и углового спектров.

Во многих задачах, связанных с применением ПКИ, требуется тщательный контроль пространственно-временной структуры излучения. В данной работе представлены две модификации одного способа решения волнового уравнения, описывающего распространение ПКИ в вакууме, в двумерном случае. Проанализировано сходство между полученными уравнениями и дифракционным интегралом Френеля [4]. Для удобства расчетов используется следующая нормировка: скорость света равна 1, несущая частота 2π. Таким образом, все временные параметры будут выражаться через количество периодов несущей частоты, а параметры с метровой размерностью через количество длин волн несущей частоты.

В скалярном приближении компоненты напряженностей полей светового импульса удовлетворяют волновому уравнению, наиболее корректно описывающему распространение ПКИ в вакууме [5, 6, 7]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

Зададим во входной плоскости поле в виде

$$E(x,z=0,t)=\varphi(x)\gamma(t) \qquad (2)$$

Решение будем искать с помощью метода Фурье. Частотный спектр искомого поля на расстоянии z определяется по формуле

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(x,z,\omega)&=g(\omega)\times\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\chi)\exp\left[i\chi x+iz\sqrt{\omega^2/c^2-\chi^2}\right]d\chi\end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(t)\exp[i\omega t]dt \qquad (4)$$

- частотный спектр входного импульса,

$$g_2(\chi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\exp[-i\chi u]du \qquad (5)$$

- угловой спектр входного импульса.

Функции частотного и углового спектров являются куполообразными, из-за конечности импульсов во времени и ограниченности в поперечном сечении. Основные энергонесущие частоты сосредоточены в диапазоне $\omega\in[\omega_0-1/T;\ \omega_0+1/T]$ и $\chi\in[-1/a_0;\ 1/a_0]$, где T - полудлительность импульса, a_0 - характерный поперечный размер первоначального импульса. Учитывая данные свойства, можно разложить корень

$$f=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\chi^2} \qquad (6)$$

в ряд. Популярно и часто используется разложение по формуле Эйлера [5,6]:

$$f\approx f_1=\frac{\omega}{c}-\frac{c\chi^2}{2\omega} \qquad (6.1)$$

Реже применяют разложение (6) в ряд Тейлора, как функцию двух переменных ω и χ [7]:

$$f\approx f_2=\frac{\omega}{c}-\frac{\chi^2}{\kappa_0}+\frac{\omega\chi^2}{2\kappa_0^2 c} \qquad (6.2)$$

Данные разложения справедливы для расстояний, на которых набег фазы от неучтенного члена разложения много меньше π. Для (6.1)

$$0\le z_Э << \frac{8\pi\omega^3 a_0^4}{c^3} \qquad (7.1)$$

Для (6.2)

$$0\le z_T << \frac{8\pi k_0^3 a_0^4 c^2 T^2}{c^2T^2+4a_0^2} \qquad (7.2)$$

Как можно заметить, для длинных импульсов, когда $cT >> 2a_0$, формула (7.2) переходит в (7.1), которая хорошо известна как условие применимости метода параболического приближения [8]. Рассмотрим накладываемые ограничения для случая $T = 5$, $a_0 = 100$: $z_Э << 6.2 \cdot 10^{11}$, $z_T << 10^8$. Получаем, что разложение Эйлера работает в большем диапазоне расстояний, по сравнению с разложением Тейлора. Т.е. применение разложения Эйлера для дальней зоны, наиболее интересной для традиционной оптики [7], является более предпочтительным.

Сравним точность разложения (6) в ряд (6.1) и (6.2). В таблице приведены результаты сравнения (6.1) и (6.2) по критерию $\varepsilon_i = \max\left|(f_i - f)/f\right|$ в диапазоне энергонесущих значений ω и χ . λ_0, T_0 - длина волны и период несущей частоты.

Сравнение разложения (6) в ряд Эйлера и Тейлора

	$a_0 = 100\lambda_0$		$a_0 = 500\lambda_0$		$a_0 = 1000\lambda_0$	
	ε_1, 10^{-11}	ε_2, 10^{-11}	ε_1, 10^{-14}	ε_2, 10^{-14}	ε_1, 10^{-15}	ε_2, 10^{-15}
$T = 1T_0$	6	10^5	9.5	$4.4 \cdot 10^6$	6	$1.1 \cdot 10^7$
$T = 5T_0$	1.6	$2.3 \cdot 10^3$	2.7	$9.4 \cdot 10^4$	1.6	$2.34 \cdot 10^5$
$T = 10T_0$	1.5	$5.5 \cdot 10^2$	2.3	$2.2 \cdot 10^4$	1.5	$5.5 \cdot 10^4$
$T = 20T_0$	1.4	$1.3 \cdot 10^2$	2.2	$5 \cdot 10^3$	1.4	$1.3 \cdot 10^4$
$T = 200T_0$	1.3	2.6	2.1	$5.4 \cdot 10$	1.4	$1.3 \cdot 10^2$

Из данных таблицы видно, что с увеличением длительности и ширины импульса точность обоих разложений растет (это обусловлено более узким частотным и угловым спектром). Формула (6.1) более точно аппроксимирует (6), чем (6.2) и это объясняет различие в допустимом диапазоне расстояний при разложении Эйлера (6.1) и Тейлора (6.2). Из представленных данных можно сделать вывод: оба подхода применимы для описания поля ПКИ в ближней зоне, что может быть использовано при исследовании ввода излучения ПКИ в волокно и в интегральной оптике.

После подстановки (5) и (6.1) в (3) и интегрирования по χ, получаем:

$$\tilde{E}(x,z,\omega) = \sqrt{\frac{-i}{z\lambda}}\, g(\omega) \exp\left[iz\frac{\omega}{c}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \exp\left[i\frac{\omega}{c}\frac{(x-u)^2}{2z}\right] du \tag{8.1}$$

Подставляя (5) и (6.2) в (3) и интегрируя по χ, получаем:

$$\tilde{E}(x,z,\omega) = \sqrt{\frac{-i}{2z\lambda A}}\, g(\omega) \exp\left[iz\frac{\omega}{c}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \exp\left[i\frac{\kappa_0}{z}\frac{(x-u)^2}{4A}\right] du \tag{8.2}$$

где

$$A = 1 - \frac{1}{2c\kappa_0}\omega .$$

Если $g(\omega)$ отлична от нуля в малой окрестности ω_0, т.е. импульс достаточно длинный, то (8.2) переходит в (8.1). Интегральное уравнение (8.1) аналогично применению дифракционного интеграла в приближении Френеля для определенной спектральной компоненты. Это является следствием того факта, что функция частотного спектра удовлетворяет уравнению Гельмгольца, применяя к нему теорему Грина, проводя все рассуждения аналогично [9], получим дифракционный интеграл для частотного спектра $g(\omega)$ в виде (8.1).

Подставляя (6.2) в (3) и интегрируя по $d\omega$, переходим к временному описанию эволюции импульса

$$E(x,z,t) = \int_{G(x,z,t)} g_2(\chi)\gamma\left[t - \frac{z}{c}\left(1 + \frac{\chi^2}{2\kappa_0^2}\right)\right] \times \exp\left(i\chi x - i\frac{z}{\kappa_0}\chi^2\right) d\chi \tag{8.3}$$

Пределы интегрирования меняются в зависимости от *x, z, t* так, чтобы аргумент функции $\gamma(...)$ принимал допустимые значения.

Для практического использования наиболее применимы интегралы (8.1) и (8.3). Выбор конкретного интеграла следует делать в зависимости от вида функций $\gamma(t)$, $\varphi(x)$ и их Фурье образов.

В частности, если $\varphi(x)$ гауссова функция, а $\gamma(t)=\exp(at+b)$, взятие интеграла (8.3) не составит труда [7] (получим выражения через интеграл вероятности), в то время как работа с интегралом (8.1) представит определенную трудность. Использование интеграла (8.2) не представляется целесообразным ни для каких функций из-за сложной зависимости подынтегрального выражения от ω. Принимая во внимание ограничения накладываемые (7.1) и (7.2), следует сказать, что интегральное уравнение (8.1) описывает пространственно-временную структуру дифрагированного поля ПКИ на больших расстояниях, чем (8.2) и (8.3). Из уравнений (8.1)-(8.3) получаем, что дифракционное поле ПКИ зависит от временной структуры первоначального импульса, чего не наблюдается, или точнее, на что не обращается внимание, для длинных импульсов.

В заключение отметим, что представленные в данной работе уравнения позволяют проводить качественный анализ волновых полей любой природы и допускают обобщение на случай диспергирующих сред. Получение численных результатов планируется в последующих работах.

Литература

1. Baltuska A., Wei Z., Phenichnicov M.S., Wiersma D.A., Opt. Lett.- 1997, vol. 22, p. 269.
2. Ichikawa H., Minoshima K., Femtosecond laser pulses diffracted by dielectric transmission gratings in the resonance-domain// Optics Communications-1999, vol. 166, p. 243-251.
3. Варданян А.О., Маилян А.Э., Оганесян Д.Л., Фокусировка фемтосекундных световых импульсов линзой// Оптика и спектроскопия- 1997, т. 82, № 3, стр. 454-457.
4. Борн М., Вольф Э., Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
5. Авакян Р.А., Варданян А.О., Маилян А.Э., Оганесян Д.Л., Дифракция пространственно-ограниченного фемтосекундного светового импульса на дифракционной решетке// Оптика и спектроскопия- 1994, т. 77, № 4, стр. 668-673.
6. Christov I.P., Propagation of femtosecond light pulses// Optics Communications- 1985, vol. 53, № 6, p. 364-366.
7. Бельский А.М., Хапалюк А.П., О распространении пространственно-ограниченного импульса в изотропной среде// Журнал прикладной спектроскопии- 1972, т. 27, в. 1, стр. 150-155.
8. Хапалюк А.П., Нестеренко Т.М., Вестник БГУ, сер. I, 1970, № 1, стр. 52.
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П., Теория волн. - М.: Наука, 1979.

Equations to govern the space-time evolution of extremely short impulses

A.V. Gladkikh
Samara State Aerospace University

Abstract

This paper presents two modifications of one method for solving the wave equation describing the propagation of primary cosmic rays in vacuum in the two-dimensional case. The article analyzes the similarity between the obtained equations and the Fresnel diffraction integral [4]. The following normalization is used for computational convenience: the speed of light is 1, the carrier frequency is 2π. Thus, all the time parameters will be expressed in terms of the number of periods of the carrier frequency, and the parameters measured in meters will be expressed in terms of the number of wavelengths of the carrier frequency.

Citation: Gladkikh AV. Equations to govern the space-time evolution of extremely short impulses. Computer Optics 2000; 20: 41 - 43.

References

[1] Baltuska A., Wei Z., Phenichnicov M.S., Wiersma D.A., Opt. Lett.- 1997, vol. 22, p. 269.
[2] Ichikawa H., Minoshima K., Femtosecond laser pulses diffracted by dielectric transmission gratings in the resonance-domain// Optics Communications1999, vol. 166, p. 243-251.
[3] Vardanyan AO, Mailyan AE, Oganesyan DL. Focusing of femtosecond light pulses with a lens. Optika i Spektroskopyia; 1997; 82(3): 454-457.
[4] Born M, Wolf E. Basics of optics. Moscow: Nauka Publisher; 1973: 856.
[5] Avakyan RA, Vardanyan AO, Mailyan AE, Oganesyan DL. Diffraction of a space-limited femtosecond optical pulse from a diffraction grating. Optika i Spektroskopyia; 1994; 77(4): 668-673.
[6] Christov I.P., Propagation of femtosecond light pulses// Optics Communications- 1985, vol. 53, № 6, p. 364-366.
[7] Belsky AM, Khapalyuk AP. Propagation of a spatially limited pulse in an isotropic medium. Journal of Applied Spectroscopy; 1972; 27(1): 150-155.
[8] Khapalyuk AP, Nesterenko TM, Bulletin of BSU, 1970, Ser. I(1): 52.
[9] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP, Theory of waves. Moscow: Nauka Publisher; 1979.